定積分の定義の研究

－定積分の定義に論理的な解釈を加え、理解しやすくするための提案－

山形県高畠町　鈴木啓一
E-Mail：szk_kei@yahoo.co.jp

概要：高校の数学の授業において、積分の基本的性質・計算方法・応用を学習する。しかしながら、積分の記号の成り立ちまでは学ばないため、定積分の記号の意味を十分理解できなかったり、誤解してしまうケースがある。ここでは、ライプニッツの積分の考え方を元にした定積分の定義の考え方を提案する。この考え方に基づくと、定積分の記号の意味が理解しやすくなり、大学で習うさまざまな積分の記号の意味が理解できる。

検索語：定積分の定義、記号の意味、ライプニッツ、インテグラル

１　研究のねらい

区分求積法による定積分の定義は、岡部恒治(2021)によると、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

ただし、$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}, x_k=a+k\Delta x$

とされている。

ところで、定積分の定義をよく見ると、左辺と右辺の表現方法にギャップがあることがわかる。「=」とは「定義です」という意味で解釈することも可能だが、方程式の「=」という意味で解釈するならば、「左辺=右辺」となる演算規則に相当する規則が説明できない。そこで、両辺の間の演算規則に相当する規則を見出すため、ライプニッツの功績を調査し、積分の記号の由来を調べることにした。本研究では、ラプニッツの功績を説明しつつ、そこから示唆される定積分の定義についての考え方を提案する。

さらに、大学ではさまざまな積分を学ぶ。その中で、福田安蔵(1976)では、D が有界で $f\left(x,y\right)$ が連続のとき、

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy=\int_c^d\left\{\int_a^b f\left(x,y\right)\right\}dy$$
$$=\int_c^d dy\int_a^b f\left(x,y\right)dx$$

、と重積分が紹介されている。

ここで $\int_a^b f\left(x,y\right)dx=F\left(y\right)$ とおくと、$\int_c^d F\left(y\right)dy=\int_c^d dyF\left(y\right)$ が成り立つ。この式において、$F\left(y\right)$ と dy の間で交換法則が成り立つことになる。したがって、交換法則が成り立つ根拠も提案する。

２　研究の内容（ライプニッツの功績調査）

2.1 功績の概要

中村幸四郎(1999,P.209-242)よると、ライプニッツの功績の概要は下記のようになる。

１６６６年

学位論文「結合法の理論」・「歴史と起源」を発表。記号 d と $\int$ を作る。ただし、差・和の記号であって、微積分の意味はない。

１６７３年

固有三角形による変換定理を発見。関数の接線と、接線から定義できる面積関数の存在を示した。この後、接線・求積のための記号として d と $\int$ を使い始めた。ただ、使い方に試行錯誤があった。

１６８４年

微分算の論文を発表。題名「極大・極小および接線の新方法、分数あるいは無理量によって妨げられない…」

１６８６年

積分算の論文を発表。題名「深奥な数学…不可分量あるいは無限小量の解析について」

2.2 d と $\int$ の使い方の推移、及び考察

ライプニッツは、学位論文で、記号 d を差、記号 $\int$ を和として扱った。固有三角形・変換定理の

発見以降、接線問題・求積問題に取り組み、その手法として、記号化と計算方法の確立に取り組んだ。微小差（微分）の記号にd、面積を求める記号に$\int$を使い始める。そして使い方に試行錯誤があった。

2.2.1 dと$\int$の使い方の推移

Gottfried Wilhelm Leibniz(1997)より紹介する。

１６７５年１０月①(P. 150)

求積問題にてカヴァリエリが考案した記号「omn.」を使う。

（例） $\text{omn.}\overline{yx\ \text{ad}\ x}\sqcap\frac{b^2c}{2}-\text{omn.}\overline{\frac{x^2}{2}\ \text{ad}\ y}$

「omn.」はラテン語の「omnes」の略で不可分法の「すべての線」の意味、「$\overline{xy}$」は「(xy)」の意味、「$ad\ x$」は「xに関係づけられた」という意味、「⊓」は「=」の意味である。

１６７５年１０月②(P. 165)

「omn.のかわりに$\int$と記すと便利であろう」と記載されている。数学史上初めて記号$\int$が導入された。

（例） $\int x\sqcap\frac{x^2}{2}$

１６７６年７月(P. 212-213)

デカルトの逆接線法の問題において、

$\frac{t}{y}\sqcap\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}$と初めて微分記号を分母においた。さらに、この式を変換し、

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}\sqcap\frac{n}{y-x}$$

$$d\bar{x}y-xd\bar{x}\sqcap d\bar{y}n$$

$$\int d\bar{x}y-\int\overline{xd\bar{x}}\sqcap n\int d\bar{y}$$

とし、求積問題に展開している。

１６７６年１１月(P. 238-241)

単純べきの微積分の一般規則を導く。

$$\frac{dx^e}{dx}\sqcap ex^{e-1},\int\overline{x^e d\bar{x}}\sqcap\frac{x^{e+1}}{e+1}$$

下記のような複雑な無理式・分数式にも適用する。

$$d\overline{\sqrt{a++bz+cz^2}}\sqcap-\frac{b+2cz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}$$

１６８４年１０月微分算の論文(P. 296-297)

$dx, dy, \cdots$を曲線$X, Y, \cdots$の接線の有限線分とみなし、有限線分間の演算規則が記載されている。

- aが定量ならば$da=0$
- $d\overline{ax}=adx$
- $d\overline{z-y+w+x}=dz-dy+dw+dx$
- $d\overline{xv}=xdv+vdx$
- $d\frac{v}{y}=\frac{\pm vdy\mp ydv}{yy}$

文献では、「=」ではなく言葉で「等しいであろう」となっている。「=」については、同じ文献のP.299から出てくる。「有限線分」という言葉は中村幸四郎(1999,P.238)から引用した。

１６８６年７月積分算の論文(P. 326, 327)

一般関数の積分について「$pdy=xdx$ならば、この微分方程式を求和方程式に移せば、$\int pdy=\int xdx$となる」と記載されている。

2.2.2 dと$\int$の使い方の推移の考察

１６７６年７月の考察

$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}\sqcap\frac{n}{y-x}$を$d\bar{x}y-xd\bar{x}\sqcap d\bar{y}n$に変換する方法は、$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}\sqcap\frac{n}{y-x}$の両辺に$d\bar{y}(y-x)$を掛けることである。したがって、

$d\bar{x}\times y-x\times d\bar{x}\sqcap d\bar{y}\times n$と解釈できる。

そして、差の式$\left(d\bar{x}\times y-x\times d\bar{x}\right)$の総和と、差の式$\left(d\bar{y}\times n\right)$の総和が等しいというのが、式$\int d\bar{x}y-\int\overline{xd\bar{x}}\sqcap n\int d\bar{y}$である。総和の記号$\int$とは、たとえば$\int d\bar{x}y$において、$d\bar{x}$のみや$y$のみに対しての作用ではなく、$d\bar{x}\times y$に対して作用すると解釈するのが妥当である。

$\int\left(d\bar{x}\times y\right)-\int\left(x\times d\bar{x}\right)\sqcap n\times\int d\bar{y}$と解釈できる。

１６８６年７月積分算の論文の考察

$\frac{dx}{dy}=\frac{p}{x}$の両辺に$xdy$を掛けることから、

$p\times dy=x\times dx$、さらに$\int\left(p\times dy\right)=\int\left(x\times dx\right)$と解釈できる。

「•」を省略したことの考察

ライプニッツは固有三角形・変換定理の発見移

行、d と $\int$ で記号化に取り組んだが、Gottfried Wilhelm Leibniz(1997)では、積分の記号の中に「·」の記載はない。「·」を省略したと考えられる。ライプニッツはなぜ「·」を省略したか、という疑問が生じる。ところで、中村幸四郎(1999,P.40-56) でデカルト(1596-1650)の方法序説が紹介されている。その中で中村幸四郎(1999,P.47)に「二つの線分の四則をそれぞれ $a+b$,$a-b$,ab ,$\dfrac{a}{b}$ と表す」と記載されていて、乗法においては「·」や「×」が省略されている。つまり、ライプニッツはデカルトの表記方法を継承したと考えられる。

３　研究の成果

これらのことから、定積分の定義を下記のように改めることを提案する。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)$$
$$=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

$\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)$ の意味は、微小差 dx と微小区間上の x での $f\left(x\right)$ をかけて面積を求め、カッコで閉じる。そしてインテグラルの元は和（ラテン語 summa）という意味だから「a から b までの総和を求めなさい」というものである。この後、×と $(\ \ )$ を省略すれば、従来の式になる。

４　「×」の性質・厳密化

$\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)$ における「×」の性質について考える。

置換積分は、

$$\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)=\int_\alpha^\beta\left(f\left(g\left(t\right)\right)\times\frac{dx}{dt}\times dt\right)$$
$$=\int_\alpha^\beta f\left(g\left(t\right)\right)\frac{dx}{dt}dt$$

のように記述することができる。したがって、「×」は掛算と同じ性質がある。掛算の交換法則により、$\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)=\int_a^b\left(dx\times f\left(x\right)\right)$ が成り立つ。

さて、前節で、dx は微小差であると説明したが、「微小差の差とはどの程度か？」という疑問が生じる。これに対し、小数による記述にすれば小数点の後の０の個数は無限個であり、正確な微小差の値を特定することはできない。そのため、微小差とは抽象的な概念である。抽象的な微小差の演算なので、「×」 も抽象的な概念の掛算である。

５　定義を理解することによる学習効果

本論文で説明した定積分の定義を高校生の学習過程に取り入れることによる学習効果について説明する。
区分求積法で定積分の定義を学ぶとき、本論文で説明した内容を取り入れることにより、高校生が理工系の大学に進んだ時に学ぶ高度な積分が無理なく理解できることが想定される。重積分・面積分・線積分・複素積分・ベクトル上の積分、数学科であればルベーグ積分の記号の意味が理解できるはずである。また、これまでの指導方法では定積分の定義について十分説明する必要がなかったため、定義部分を正しく理解できていない高校生が存在する可能性がある。このような高校生に対し、本研究で説明した方法を用いることで、定積分の定義を正しく理解できるようになることが期待される。

引用・参考文献

Gottfried Wilhelm Leibniz;
原享吉,佐々木力,三浦伸夫,馬場郁,斎藤憲,安藤正人,倉田隆（訳）,
ライプニッツ著作集２数学論・数学,工作舎,
1997

Gottfried Wilhelm Leibniz;
原享吉,横山雅彦,三浦伸夫,馬場郁,倉田隆,長島秀男,西敬尚（訳）,
ライプニッツ著作集３数学・自然学,工作舎,
P.310-315,1999

岡部恒治,阿原一志,市原一裕,井原俊輔,大矢雅則,落合豊行,戸瀬信之,中村八束,本橋信義,森田純,八木克己,吉田正章,加藤春紀,舘麻由美,西牧守,山本圭子,吉地佳弘,数研出版編集部
高等学校数学Ⅲ、数研出版、P.227,2021

中村幸四郎、近世数学の歴史、日本評論社、
1999

福田安蔵,鈴木七緒,安岡善則,黒崎千代子
微積分演習Ⅱ,共立出版,P71, 1976