微積分の記号の意味について視覚的に理解できるようにする。

鈴木　啓一　szk_kei@yahoo.co.jp

概要：高校の数学において、初めて微積分を習う。そこで使われる記号 $\dfrac{dy}{dx},\int ydx$ の定義・意味について、ライプニッツの功績を参考にしながら、理解しやすくする方法を提案する。

検索語：微積分、記号、微小差、総和

1　はじめに

私は数学教員ではなく、いまだに趣味で数学をやっている一般の人間です。

高校までの数学は十分に完成されたものと扱われ、かつ模範解答のみが要求されます。高校までの過程に関する学会は、「いかに教えるか」という教育学会が該当します。

さて、私は、高校数学・大学数学でさえまだまだ改善できる余地があると思い、研究してきました。そしてそれを発表したいと思ったのですが、該当する学会が、数学教育学会の Note「学術的あるいは文化的な･･･」しかありませんでした。

今回は、微積分の記号 $\dfrac{dy}{dx},\int ydx$ を、理解しやすくする方法の提案する。

2　高校で学ぶ微積分の定義

高校で習う微分の定義は、

$$\lim_{x_1\to x}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{dy}{dx}$$

そして定積分の定義は

区間 $[a,b]$ を n 等分し、$a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$ とし。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx$$

である。

私もそうだったが、この定義を初めて習ったとき、＝の右側の式 $\dfrac{dy}{dx},\int ydx$ について疑問も持たないで「このように書くんだ」という「**おまじない**」のような感覚で覚えた。なおかつ $\dfrac{dy}{dx}$ は割算 $dy\div dx$ とは別物に思ったし、$\int ydx$ とは、「 y を x で積分する」という意味だから、$\int$ と dx は対をなし、日本語的には $\int y\mathrm{by}x$ と記述したほうがわかりやすいのにとも思った。

また、大学(理工系)の数学で、$pdy=qdx$ 等の微分に使う d の一次式が出てくる。高校において、$\dfrac{dy}{dx}$ 等の分数形式の定義・演算規則は学ぶが、一次形式は学ばないので、とまどいを感じるものである。

3　ライプニッツの功績（抜粋）からみる $\dfrac{dy}{dx},\int ydx$ の起源

3，1　１６６６年、学位取得のときの論文「結合法の理論」・「歴史と起源」

整数の減少数列 $a,b,c,\cdots,z,0$ を考える。

（注：当時、数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ の表記はなかったようである）

$$\begin{array}{ccccccc}
a, & b, & c, & \cdots & \cdots & z, & 0\\
da, & db, & dc, & \cdots & & dz & \\
d^2a, & d^2b, & d^2c, & & d^2z & & \\
d^3a, & d^3b, & \cdots & d^3z & & &
\end{array}$$

なお、たとえば

$da=a-b,db=b-c,\cdots$

$d^2a=da-db,d^2b=db-dc,\cdots$

d は差(Difference)の頭文字である。

（注：ライプニッツは階差数列を想定したようである）

数列 $a,b,\cdots,z$ までの項の数を x とする。

$1+1+\cdots+1=x$

$1+2+3+\cdots=\sum x$

$1+1+2+1+2+3+\cdots=\sum\sum x$

（注：現代数学では、

$x=n,\sum x=\dfrac{1}{2}n(n+1),\cdots$）

とおけば、一般解は

$$a = xda - \left(\sum x\right)d^2a + \left(\sum\sum x\right)d^3a - \left(\sum{}^3 x\right)d^4a + \cdots$$

Σ を $\int$ で置き換えて、

$$a = xda - \int x \cdot d^2a + \int\int x \cdot d^3a - \int{}^3 x \cdot d^4a + etc.$$

と表現した。

なお、$\int$ は Integral ではなく、和の最初の文字 s を縦に伸ばしただけである。

（注：個人的な見解であるが、Σ だと式が長くなるので $\int$ に置き換えたのだと思う。）

３，２　１６７３年、固有三角形の発見（接線問題と求積問題との関係）

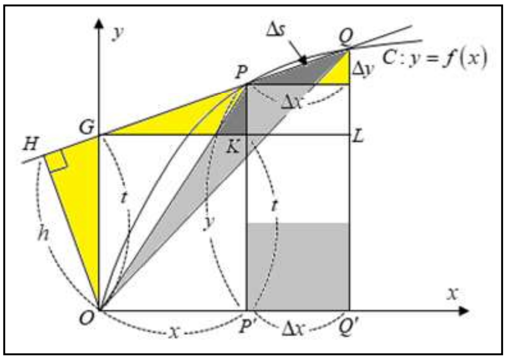

図1

$$t = y - x\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

（注：$t(x)$ は面積関数になる）

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\square P'Q'LK$$ ：有限変換定理

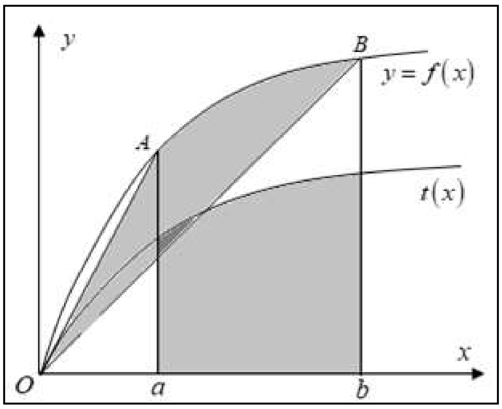

図　２

扇型 $OAB = \dfrac{1}{2}\int_a^b t(x)\,dx$ ：変換定理

（注：実際の原稿で $\frac{1}{2}\int_a^b t(x)\,dx$ をどのように表記したかは不明である。

３，３　１６７５年・１６７６年の手稿（接線・求積問題に $d, \int$ を導入）

ライプニッツは、接線問題・求積問題を取り組むにあたり、記号化、その計算方法の確立に取り組んだ。

この手稿の中で、記号の導入に試行錯誤があったようである。最初、接線・求積の変数を上バーで表記した。ここでは、手稿の中の記号・計算式を列記する。

・$\int \overline{x} = \dfrac{x^2}{2}, \int \overline{x^2} = \dfrac{x^3}{3}$

・$\int \overline{\dfrac{a}{b}l} = \dfrac{a}{b} \times \int \overline{l} \left(\dfrac{a}{b}\text{は定数}\right)$

・$\int \overline{(l+m)} = \int \overline{l} + \int \overline{m}$

・$d\overline{x} = 1, d\overline{x^2} = 2x, d\overline{x^3} = 3x^2$

・関数の合成

$$d\sqrt{a+bx+cz^2} = \frac{b+2cz}{2\sqrt{a+bx+cz^2}}$$

３，４　１６８４年微分算の論文（微分算の計算規則）

論文の題名「極大・極小および接線の新方法、分数あるいは無理量によって妨げられないこれらの量の新式の計算」

（注：個人的な意見だが、「微小差の計算規則」と解釈したほうがいいと思う）

(1) aを定数、$da = 0, d(ax) = adx$

(2) $y = v$ならば、つまり曲線 YY と VV に対する縦座標が等しいならば、$dy = dv$

(3)加法と減法、

$$d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx$$

(4)乗法、$d(xv) = xdv + vdx$

(5)除法 $d\left(\dfrac{v}{y}\right) = \dfrac{vdy - ydv}{yy}$

(6)極大・極小の判定は $dv = 0$ 、曲線の凹凸は差の差である $ddv = 0$ の正負で定まる。

(7) 変曲点の判定は $ddv = 0$

証明は、図3を使ったが、詳細は不明ある。

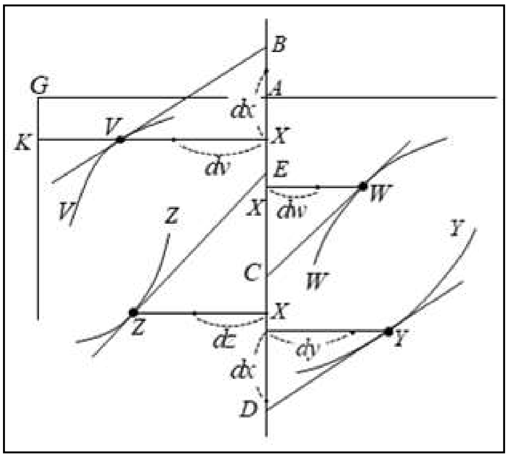

図　3

３，５　１６８６年　積分算（和文算）の論文

論文の題名「深奥な数学、不可分量あるいは無限小量の解析について」

その中の、たった38行で説明されている。

要点

1 $\int$ と d との関係

$$pdy = xdx \Leftrightarrow \int pdy = \int xdx$$

2 演算の適用範囲

代数式のみ⇒機械的曲線つまり超越的問題にまで拡張できる。

４　微積分の定義の改善案

４、１　微小差の定義

微分の定義の前に、ライプニッツの微分の論文のような、微小差の定義および演算規則を入れるべきである。高校数学では難しいかもしれないが、専門的な解析学の中には入れるべきである。

４、２　微積分の定義

現在の微分の定義

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{dy}{dx}$$

改善案

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{dy}{dx}$$

d :微小差$(difference)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\text{の微小差}}{x\text{の微小差}}$ であり、微小差の割算である。

現在の積分の定義

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\, dx$$

改善案

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \left(f(x) \times dx \right)$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

式の途中の $\int_a^b \left(f(x) \times dx \right)$ の意味は、「微小差 dx と、区間 dx 上の x での $f(x)$ とを掛算し、面積を求め、a から b までの総和を求める」というものである。この後、×と( )を省略すれば、$\int_a^b f(x)\, dx$ となる。

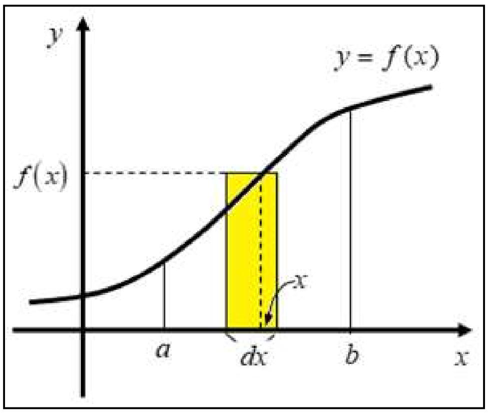

図　4

したがって、$\int$ と dx が対をなすのではなく、$\int$ と $f(x)\,dx$ が対をなす。

５　効果

大学において、特に理工系に進めば、たとえば、ルベーグ積分・面積分・ベクトル上の線積分のように、高校数学とは違った積分表示が出てくる。しかし、$\int_a^b \left(f(x) \times dx \right)$ の意味さえわかっていれば、大学においても積分の意味が簡単に理解できるはずである。

６　引用・参考文献

[１]近世数学の歴史

初版第３刷 P209-242

著者　　中村幸四郎

発行者　大石進

発行所　日本評論社