$e^{ix}, e^{i\pi} = -1$の研究

鈴木　啓一

自己紹介

現住所	山形県
年齢	68歳(孫３人)
学歴	新潟大学理学部数学科
職業	会社員→定年
研究分野	解析学・複素関数論
ホームページ	「こだわりハウス」　http://szkkei.main.jp/
	＞　自作の数学(今回の発表の詳細)

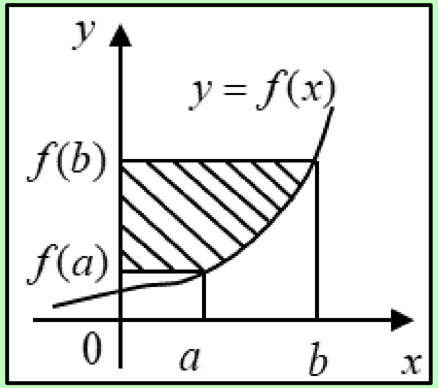
今から2・30年前、ディレクトリ・サービス全盛時代、
日本　Yahoo　自然科学と技術　＞　数学
アメリカ・イギリス・カナダ　・オーストラリア・・・
Yahoo Science>Mathematics>Calculus
に登録されてました。

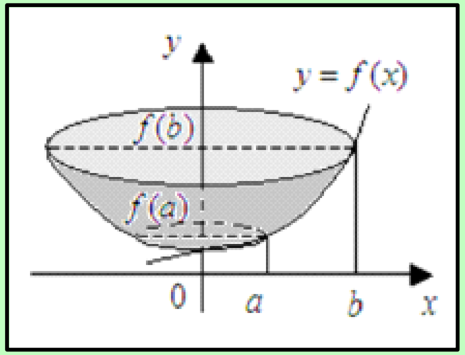
今でも数学をやる理由（数学とのかかわり）

① 高校3年でのできごと

$$y=f(x)\Rightarrow\int_a^b xf'(x)\,dx,\ 2\pi\int_a^b x^2 f'(x)\,f(x)\,dx$$

$$,\pi\int_a^b x^2 f'(x)\,dx,\cdots$$





y 軸に対する面積、回転体の体積。

⇒数学とは造っていい学問、と解釈できた

１０数年後、参考書に掲載され始める。
理由は、アメリカから、上記式の論文が発表された。

② 39歳でのできごと

$$y=f(x)\Rightarrow\int y\,dx+\int x\,dy=xy+C$$

関数の積分と、逆関数の積分とは、１次式の関係がある。それも不定積分で。

⇒研究再開

予稿集での記載間違い

１頁

誤　$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+1/N\right)^N$ という定義である。

正　$e = \lim_{N\to\infty}\left(1+1/N\right)^N$ という定義である。

複素関数論による $e^{i\pi}=-1$ の理由

複素数において、四則演算を定義

級数・解析接続により関数を定義

関数例：$e^{z}=1+z+\dfrac{z^{2}}{2!}+\dfrac{z^{3}}{3!}+\dfrac{z^{4}}{4!}+\cdots$

$z=ix$ の場合、$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$x=\pi$ のとき、$e^{i\pi}=-1$ $\Rightarrow$ 論理的な導入

オイラーの功績の研究

予稿集の式の記述方法

原書の表記方法では一部誤解をまねくので、現代の表記方法に変更。

オイラーの功績の研究

「オイラーの無限解析」の原書の記号比較

名称	原書	現代表記
組合せの記号	なし	${}_nC_r$
虚数の記号	$\sqrt{-1}$	i
十分に大きな自然数	i	N
階乗	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots$	$5!$
数列	$a, b, c, d, e\cdots$ $P, Q, R, S, \cdots$	$\{a_m\}(m=1,2,\cdots)$ $\{P_n\}(n=1,2,\cdots)$
	$a+b+c+\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} a_i$

オイラーの功績の研究

「オイラーの無限解析」の原書の記号比較

名称	原書	現代表記
三角関数	$\int in.$、$co\int.$	$\sin$、$\cos$
	$\left(\int in.v\right)^n$、$\left(co\int.v\right)^n$	$\sin^n v$、$\cos^n v$
極限値の記号	なし	$\lim$、$N\to\infty$
変数の定義域	$0<x$ 注:0が含まれるかどうかは不明	$-\infty<x<\infty$ この資料では、正の実数として扱う。

オイラーの功績の研究

オイラー定数eの導入

aを定数、ω十分に小さい正の実数とする。

$a^{\omega}=1+k\omega$を満たすkが存在する。Nを十分に大きな自然数とする。

$$a^{\omega N}=\left(1+k\omega\right)^{N}=1+\frac{N}{1}k\omega+\frac{N\left(N-1\right)}{2!}k^{2}\omega^{2}+\frac{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)}{3!}k^{3}\omega^{3}+\cdots$$

$\omega N=x$とおく。$\omega=\dfrac{x}{N}$、xは正の実数。

$$a^{x}=\left(1+\frac{kx}{N}\right)^{N}=1+\frac{1}{1}kx+\frac{1\cdot\left(N-1\right)}{2!N}k^{2}x^{2}+\frac{1\cdot\left(N-1\right)\left(N-2\right)}{3!N^{2}}k^{3}x^{3}+\cdots$$

$\dfrac{N-1}{N}=1,\dfrac{N-1}{2N}=\dfrac{1}{2},\dfrac{N-2}{3N}=\dfrac{1}{3},\cdots\left(N\to\infty\right)$、$k=x=1$とおくと、

$$a=\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.71828\cdots$$

ここで、aをeと表記する。

オイラーの功績の研究

オイラー定数 e の導入のポイント

十分に大きな自然数 N 乗の2項定理で、

$$a^x = \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N = 1+\frac{1}{1}kx+\frac{1\cdot(N-1)}{2!N}k^2x^2+\frac{1\cdot(N-1)(N-2)}{3!N^2}k^3x^3+\cdots$$

$$\frac{N-1}{N}=1,\ \frac{N-1}{2N}=\frac{1}{2},\ \frac{N-2}{3N}=\frac{1}{3},\cdots(N\to\infty)$$

$k=x=1$とおくと、

$$e=\left(1+\frac{1}{N}\right)^N=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.71828\cdots$$

オイラーの功績の研究

三角関数・πの導入

円の半径を1とすると、半周は3.14159…である。これをπと表記する。正弦を$\sin z$、余弦を$\cos z$、正接を$\tan z$と表記する。
（注：弧度法の導入理由は記載されていない）

$$\sin 0\pi = 0、\sin\frac{1}{2}\pi = 1、\sin\pi = 0、\sin\frac{3}{2}\pi = -1、\sin 2\pi = 0$$

（注：$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$より、オイラーは負の数を認めていたことになる）

$$\cos z = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), \sin z = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right), \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$$

$$\sin(y+z) = \sin y\cos z + \cos y\sin z$$

三角関数の倍角の公式、和と積の公式などが導かれている。

オイラーの功績の研究

三角関数・πの導入の疑問点

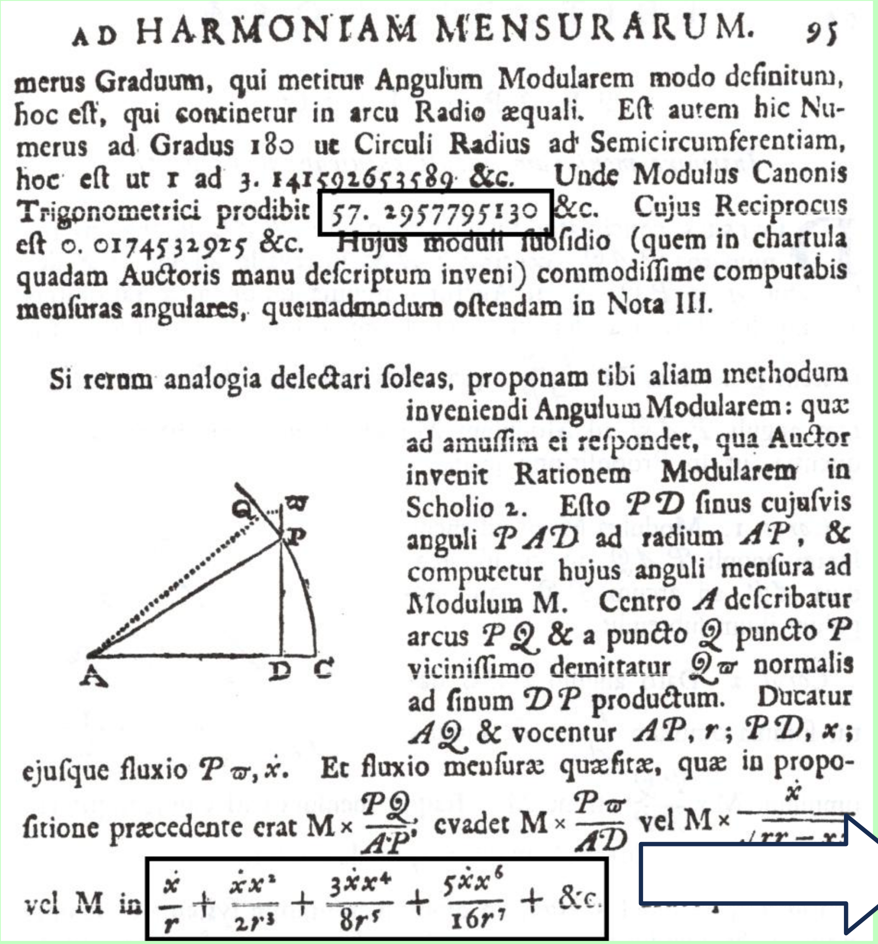
オイラーの文献では、弧度法の詳しい導入理由がない。

弧度法はだれが作った？

オイラーの功績の研究

ロジャー・コーツ(イギリス、1682−1716)、弧度法を最初発見した人？

文献「対策の調和」の原書



AD HARMONIAM MENSURARUM. 95

merus Graduum, qui metitur Angulum Modularem modo definitum, hoc est, qui continetur in arcu Radio æquali. Est autem hic Numerus ad Gradus 180 ut Circuli Radius ad Semicircumferentiam, hoc est ut 1 ad 3.141592653589 &c. Unde Modulus Canonis Trigonometrici prodibit $\boxed{57.2957795130}$ &c. Cujus Reciprocus est 0.0174532925 &c. Hujus moduli subsidio (quem in chartula quadam Auctoris manu descriptum inveni) commodissime computabis mensuras angulares, quemadmodum ostendam in Nota III.

Si rerum analogia delectari soleas, proponam tibi aliam methodum inveniendi Angulum Modularem: quæ ad amussim ei respondet, qua Auctor invenit Rationem Modularem in Scholio 2. Esto PD sinus cujusvis anguli PAD ad radium AP, & computetur hujus anguli mensura ad Modulum M. Centro A describatur arcus PQ & a puncto Q puncto P vicinissimo demittatur $Q\varpi$ normalis ad sinum DP productum. Ducatur AQ & vocentur AP, r; PD, x; ejusque fluxio $P\varpi$, $\dot{x}$. Et fluxio mensuræ quæsitæ, quæ in propositione præcedente erat $M \times \frac{PQ}{AP}$, evadet $M \times \frac{P\varpi}{AD}$ vel $M \times \frac{\dot{x}}{\sqrt{rr-xx}}$ vel M in $\boxed{\frac{\dot{x}}{r} + \frac{\dot{x}x^2}{2r^3} + \frac{3\dot{x}x^4}{8r^5} + \frac{5\dot{x}x^6}{16r^7} + \&c.}$

和訳

対数正典では、対数と呼ばれる特定の数体系が提示されています。このフィフテマの係数は、コロルのモジュラー比を測定する対数です。 6.定義されています。同様に、接線と接線の三角関数正準では、度という特定の数値体系が提示されます。この体系の係数は、定義された方法で定義されたモジュラー角度を測定する度数です。半径に等しい円弧内に含まれます。この数字は 180 度に等しく、円の半径が半円に等しいのと同じです。これは r が

3. 141592653589 などしたがって、三角法の係数は 57. 2957795130 などになります。その逆数は 0.0174532925 などです。このモジュール（著者の特定の論文で説明されているのを見つけました）を使用すると、注 3 で説明するように、角度の測定値を簡単に計算できます。

微小差 $PW = \dot{x}$、と記載されている。

$$\frac{\dot{x}}{r} + \frac{\dot{x}x^2}{2r^3} + \frac{3\dot{x}x^4}{8r^5} + \frac{5\dot{x}x^6}{16r^7} + \&$$

オイラーの功績の研究

三角関数・πの導入の疑問点

$\sin(3/2)\pi = -1$、オイラーは負の数を認めていた？

この時代、「−１」とは、「１を引く」という演算操作、「マイナス１（負数）」ではないはずである。
文献の前後を見ても、負の数を認めた形跡がない。

オイラーの功績の研究

三角関数・π の導入の疑問点

$\sin(3/2)\pi = -1$、オイラーは負の数を認めていた？

原書でのオイラーの公式

vero $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos.\, v + \sqrt{-1}.\,\sin.\, v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos.\, v - \sqrt{-1}.\,\sin.\, v.$

現代風に記述

$$e^{+vi} = \cos v + i\sin v,\quad e^{-vi} = \cos v - i\sin v$$

評価

変数 v は正数であって、負数ではない。

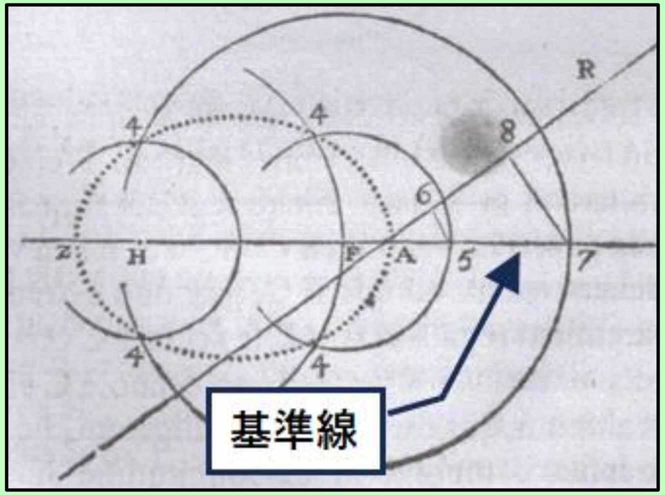
オイラーの功績の研究

三角関数・π の導入の疑問点

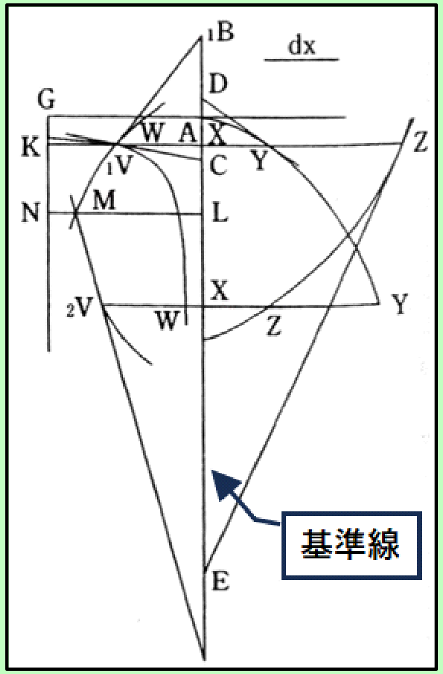
$\sin\left(3/2\right)\pi = -1$ という負の数の、別の観点からの疑問点。

現代、x 軸 y 軸座標をデカルト座標という。

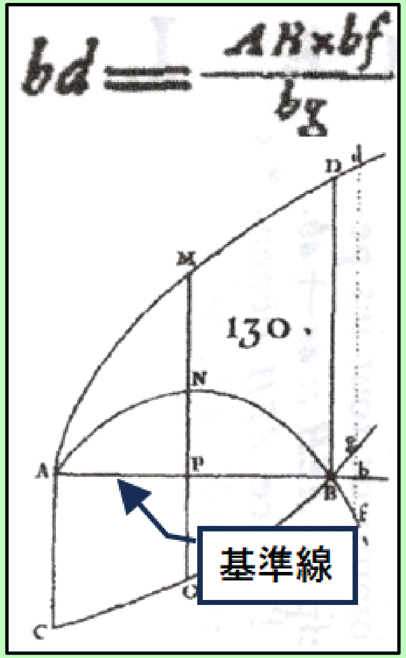
デカルト、方法序説の原書



ライプニッツ著作集



ロピタルの原書



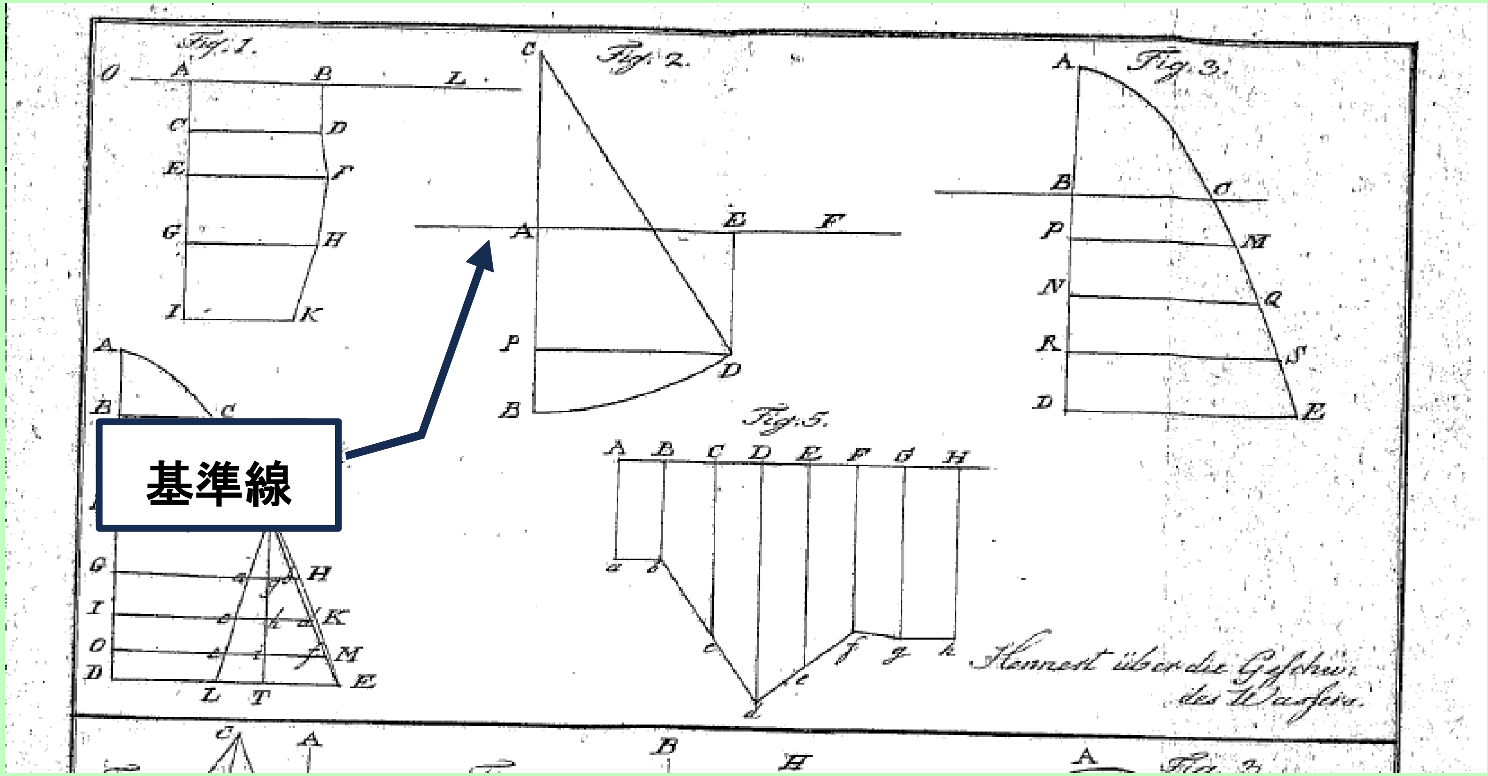
オイラーの功績の研究

三角関数・πの導入の疑問点

$\sin\left(3/2\right)\pi = -1$という負の数の、別の観点からの疑問点。

オイラーのアーカイブより

682 Von dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf einer Flaeche



オイラーの功績の研究

オイラーの公式の導入

$\cos Nx = \dfrac{(\cos x + i\sin x)^N + (\cos x - i\sin x)^N}{2}$、$v = Nx$ とおくと、

$$\cos v = \frac{\left(\cos\dfrac{v}{N} + i\sin\dfrac{v}{N}\right)^N + \left(\cos\dfrac{v}{N} - i\sin\dfrac{v}{N}\right)^N}{2}$$

$\dfrac{v}{N}$ は十分に小さい数なので、$\cos\dfrac{v}{N} = 1, \sin\dfrac{v}{N} = \dfrac{v}{N}$ とおける。したがって、

$\cos v = \dfrac{\left(1 + \dfrac{iv}{N}\right)^N + \left(1 - \dfrac{iv}{N}\right)^N}{2}$、ところで、$e^x = \left(1 + \dfrac{x}{N}\right)^N$ なので、x の代わりに iv と表記し、

$\cos v = \dfrac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \sin v = \dfrac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}$ となる。したがって、$e^{iv} = \cos v + i\sin v$ となる

オイラーの功績の研究

オイラーの公式の導入ポイント

$$\cos v = \lim_{N\to\infty}\frac{\left(1+\frac{iv}{N}\right)^N+\left(1-\frac{iv}{N}\right)^N}{2}\text{、}\Rightarrow \quad \cos v = \frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}$$

オイラーは、$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$ の変数を実数から複素数に置き換えることができる、という仮定のもとの式の変換である。

オイラーの功績の研究

オイラーの等式

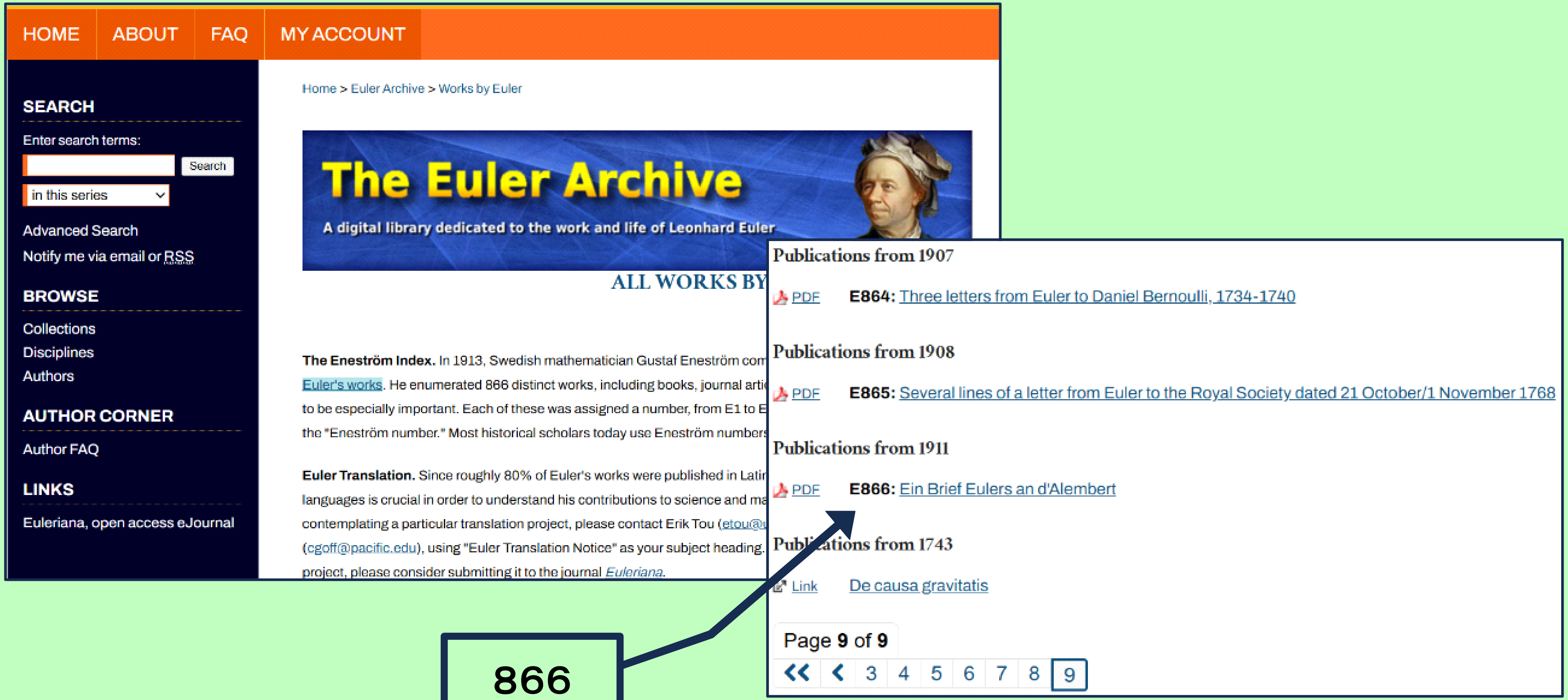
オイラーの文献から、$e^{i\pi} = -1$ の記載は見つけられなかった。

オイラーの功績の研究

$e^{i\pi} = -1$ の記載は見つけられなかった。

オイラー・アーカイブ

https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/



866

疑問点

「$e^{i\pi} = -1$」さん、あなたは綺麗

だけど、なにが言いたいの？

疑問の改善

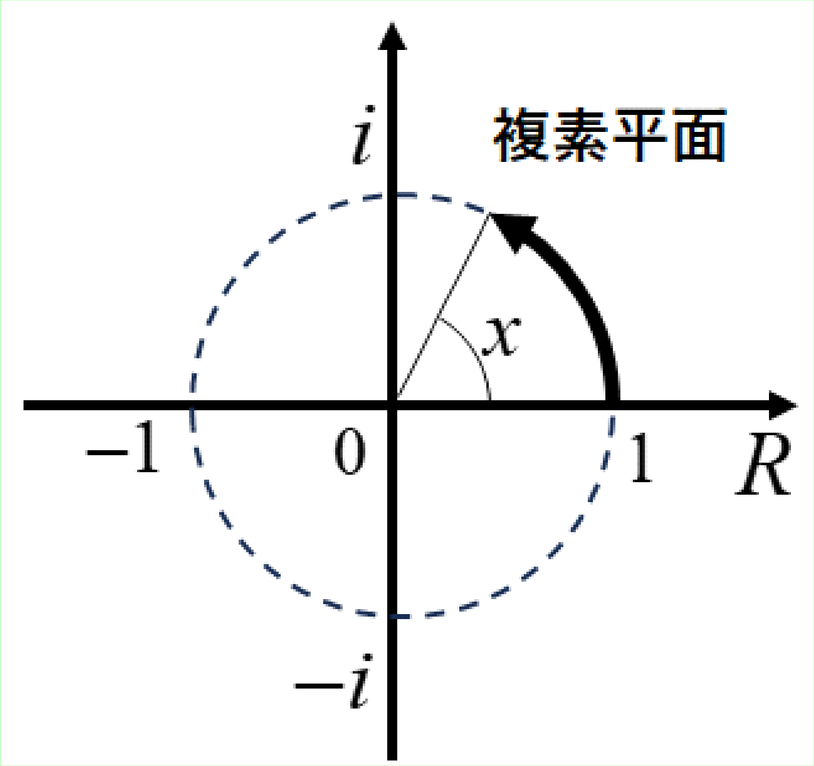
定義順序、書き換えればＯＫ？

$e^{i\pi}=-1$ のための定義の再構築

複素平面上で次の関数を定義する。

$f(x)=\{$複素平面上の単位円において、偏角がxのときの座標$\}$

$f(x)=\cos x+i\sin x$とおける。



$f\left(x\right)$の性質①

$$f\left(x_1+x_2\right)=\cos\left(x_1+x_2\right)+i\sin\left(x_1+x_2\right)$$

$$=\left(\cos x_1+i\sin x_1\right)\left(\cos x_2+i\sin x_2\right)$$

$$=f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)$$

$f(x)$の性質②

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}(\cos x+i\sin x)$$

$$=i(\cos x+i\sin x)$$

$$=i\ f(x)$$

$f\left(x\right)$の性質③

$$f\left(x\right)=\cos x+i\sin x$$

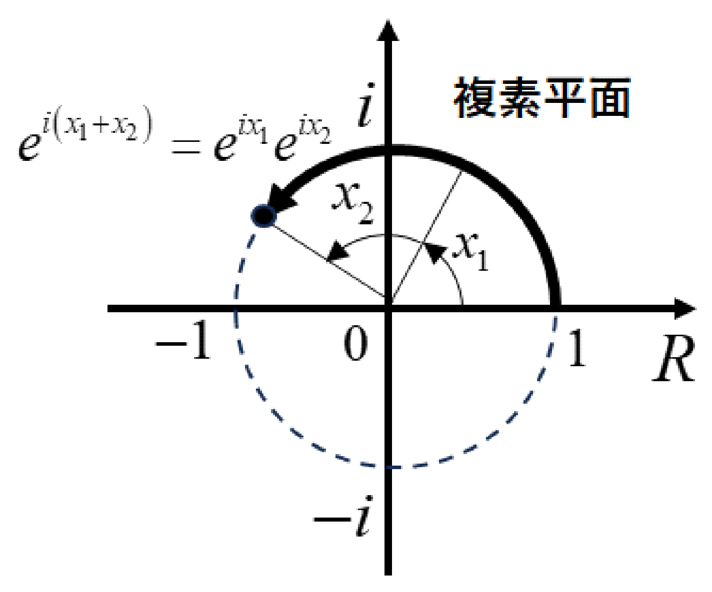
$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=1+ix+\frac{\left(ix\right)^2}{2}+\frac{\left(ix\right)^3}{3!}+\cdots$$

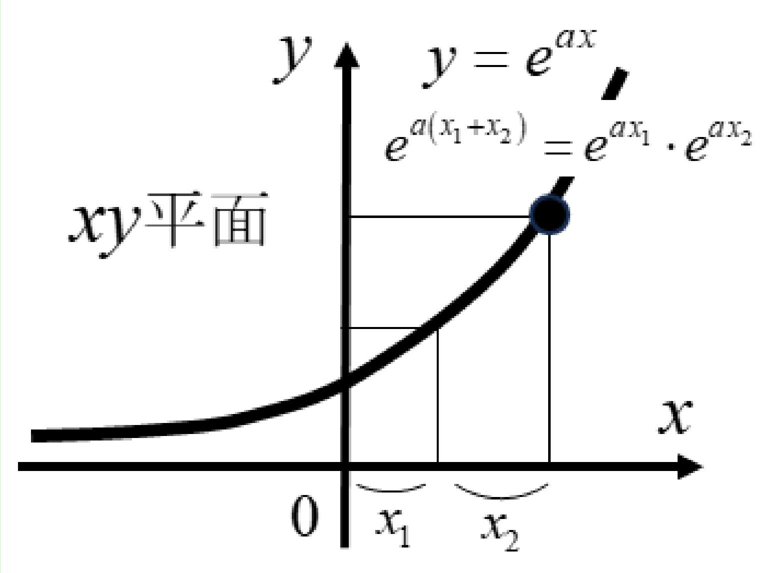
$f\left(x\right)$の記述

性質①･②･③により、実数の指数関数を参考に、$f\left(x\right)=e^{ix}$と表記する。

複素平面の円周上の点の軌跡と、実数の指数関数の点の軌跡とは、同じ性質を持つ。



⇔

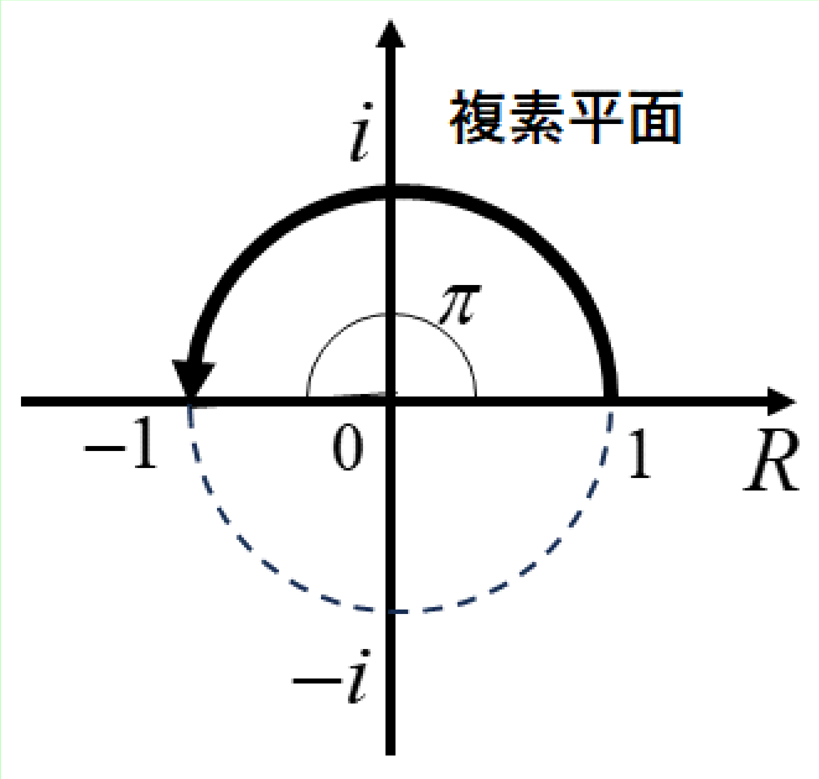


$f(x)$の記述

$x=\pi$ とおくと、$e^{i\pi}=-1$となる。
「複素平面上の単位円において、偏角が
π の場合の座標は−1 である」

i:虚数、$i^2=-1$
π :偏角、$\pi=3.14\cdots$
e :関数記号、$e\neq 2.71\cdots$

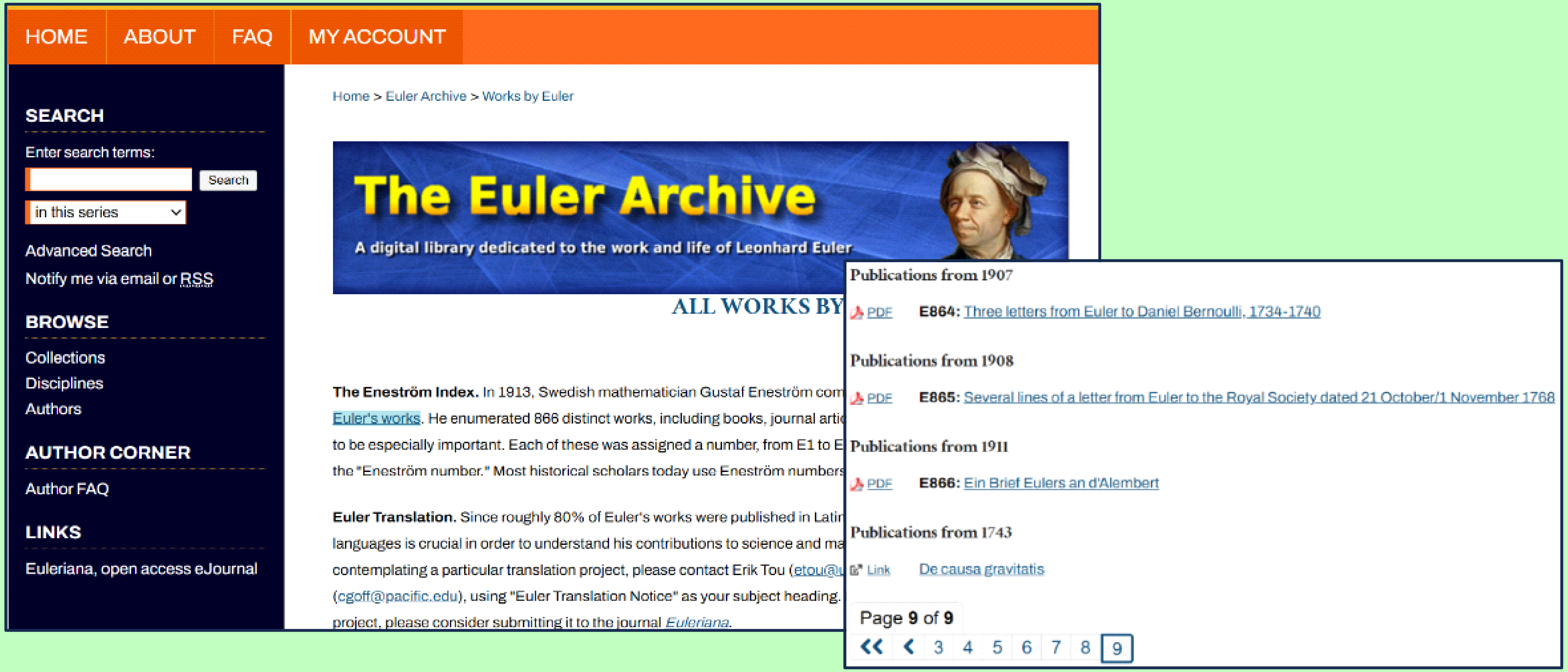
参考、関数記号の例:$\Gamma(x),\zeta(s),\cdots$



その他、オイラーの調査

オイラー・アーカイブの調査

https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/



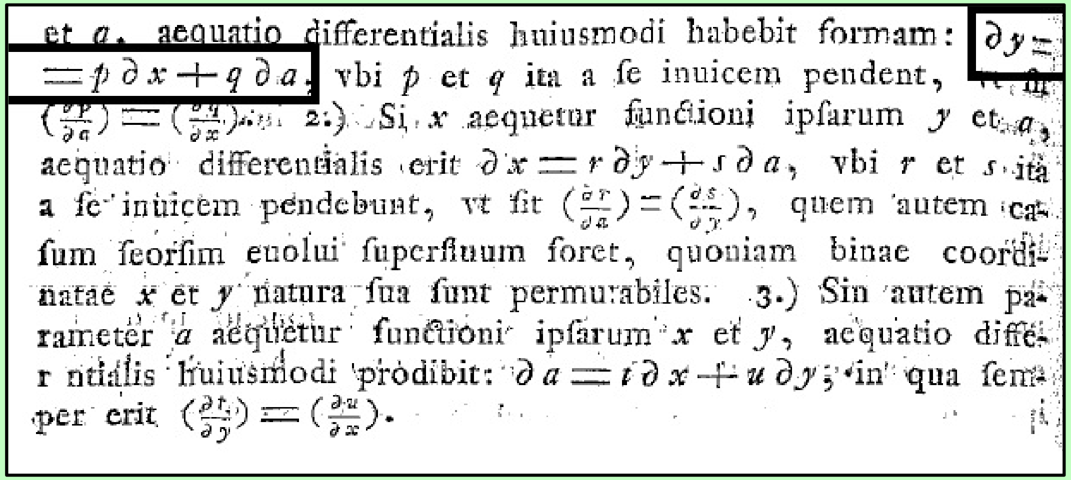
とりとめもない、くだらない話、調査による成果はない。
歴史学者ではないので、新発見はない。

その他、オイラーの調査

1787 年 Considerationes super traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis

（直線軌道と斜軌道に関する考察）

https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/609/



et a. aequatio differentialis huiusmodi habebit formam: $\boxed{\partial y =}$ $\boxed{= p\,\partial x + q\,\partial a}$, vbi p et q ita a ſe inuicem pendent, vt sit $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$. 2.) Si x aequetur functioni ipſarum y et a, aequatio differentialis erit $\partial x = r\,\partial y + s\,\partial a$, vbi r et s ita a ſe inuicem pendebunt, vt ſit $\left(\frac{\partial r}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)$, quem autem caſum ſeorſim euolui ſuperfluum foret, quoniam binae coordinatae x et y natura ſua ſunt permutabiles. 3.) Sin autem parameter a aequetur functioni ipſarum x et y, aequatio differentialis huiusmodi prodibit: $\partial a = t\,\partial x + u\,\partial y$; in qua ſemper erit $\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

この箇所で、初めて∂x・∂yが使われた。
これ以降、の文献では dx や dy を一切使わず、すべて∂x・∂y 。

下記のように翻訳したが、∂ の由来の説明はない。

(1) y がパラメータ x と a の関数に等しい場合、微分方程式は次の形式になります: ∂ y=p ∂ x+q ∂ a、ここで、p と q は fe に逆依存するため、次のようになります。(∂ p/ ∂ a)=(∂ q/ ∂ x)
(2) x がパラメーター y と a の関数に等しい場合、微分方程式は ∂ x=r ∂ y+s ∂ a になります。ここで、r と s は fe に逆依存するため、(∂ r / ∂ a)=(∂ s/ ∂ y)、2 つの座標 x と y は本質的に不変であるため、ギリシャ人にとっては不必要です。
(3) しかし、パラメータ a がパラメータ x と y の関数に等しい場合、次のような微分方程式が現れます。∂ a=t ∂ x+u ∂ y;この場合、フレームは (∂ t/ ∂ y)=(∂ u/ ∂ x) になります。

その他、オイラーの調査

∂x を作った人は？

オイラーの調査

コンドルセ、1765 出版、初めて∂を使った文献

(36.) Pour cela, je ſuppoſe que x, au lieu de devenir $x + \Delta x$, ſoit devenu $\boxed{x + \Delta x + \partial x}$, ∂x étant une quantité quelconque ajoutée à Δx; on aura alors la valeur de $F' = F:(x + \Delta x + \partial x)$ en mettant dans l'équation précédente $F' = F + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 \dots$ ſoit $x + \partial x$ au lieu de x; ſoit $\Delta x + \partial x$ au lieu de Δx; cela eſt évident de ſoi-même.

このため、x は x+Δx ではなく x+Δx+∂x になる必要があると仮定します。**∂x は Δx に加算される任意の量**、すると、F'=F+AΔx+BΔx^2+…を前の式に代入すると、F'=F(x+Δx+∂x)の値が得られます。x の代わりに x+∂x を、Δx の代わりに Δx+∂x を足すと、それ自体が明らか

オイラーの調査

635_Innumera theoremata circa formulas integrales quorum demonstrati.pdf

（数式積分に関する無数の定理、）

https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/635/

Fundamentum horum Theorematum in eiusmodi formulis integralibus $\int V \partial x$ eſt conſtitutum, quarum valor a termino $x = o$ vsque ad certum terminum definitum $x = k$ per expreſſionem finitam aſſignari queat. Quod ſi enim iſtum valorem littera P deſignemus, ita vt ſit $\int V \partial x \begin{bmatrix} ab & x = o \\ ad & x = k \end{bmatrix} = P$ quoniam ipſa variabilis x in P non amplius ineſt, ea tanquam functio alius cuiuspiam quantitatis p, quae ſimul in functione V contineatur, ſpectari poterit; tum autem ſub iisdem integrationis terminis innumerabiles aliae formulae integrales tam per differentiationem quam per integrationem, quemadmodum iam aliquoties fuſius expoſui, deriuari poſſunt, quae ſunt:

$$\int V \partial x \begin{bmatrix} ab & x = 0 \\ ad & x = k \end{bmatrix} = P$$

現代表記、$\int_0^k V \partial x = P$

これらの定理の基礎は、そのような積分公式 $\int V \partial x$ に基づいており、その値は、x=0 の項から特定の項 x = k まで有限式によって決定できます。この値を文字 P で定義すると、$\int V \partial x \begin{bmatrix} ab & x = 0 \\ ad & x = k \end{bmatrix} = P$ となり、変数 x はもはや P には存在しないので、関数 V に含まれる他の量 p の関数として見ることができる。しかし、同じ積分条件から、微分と積分の両方によって無数の他の積分公式を導くことができます。これは、私が以前に何度か説明したとおりです。

その他、オイラーの調査

定積分の区間表示の様式

$\int_a^b f\left(x\right)dx$ を作った人は？

オイラーの調査

積分の区間表示

1816　化学物理学年報 PP.350-374 フーリエ　熱理論

https://iris.univ-lille.fr/handle/1908/1420

$$F x = \frac{1}{\varpi} \Sigma_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2\varpi} dp\, Fp . \cos(ix - ip) \qquad (E)$$

$$f x = \frac{2}{\varpi} \int_{0}^{\infty} dq . \int_{0}^{\infty} dp\, fp . \sin qx . \sin qp \qquad (\sigma)$$

$$\varphi x = \frac{2}{\varpi} \int_{0}^{\infty} dq . \int_{0}^{\infty} dp\, \varphi p \cos qx \cos . qp \qquad (\epsilon)$$

Nous employons ici la notation de l'auteur, qui joint ordinairement aux signes Σ et ∫ l'indice des limites entre lesquelles on doit effectuer l'intégration.

ここでは著者の表記法を使用します。これは通常、記号　Σ　と　∫　に結合して、その間で積分を実行する必要がある極限のインデックスです。

とりとめもない話、失礼しました。

以上です。ご清聴ありがとうございました。