$e^{ix}, e^{i\pi}=-1$の研究

$-e^{ix}$の定義の見直しによる$e^{i\pi}=-1$の可視化−

山形県高畠町　鈴木啓一　　　　　E-Mail：szk_kei@yahoo.co.jp

概要：複素関数論におけるe^{ix}の定義、オイラーによる導入経緯を調査し、その観点を見直すことにより、$e^{i\pi}=-1$を視覚的に解釈できる方法の研究。

検索語：オイラー、オイラーの公式、オイラーの等式、オイラー定数、複素数、円周率

1　はじめに（研究のねらい）

現代の数学において、e^{ix}は複素関数論により定義されている。e^{ix}の性質として$e^{i\pi}=-1$という「オイラーの等式」がある。等式の$e,i,\pi,-1$という数学上の重要な定数の大変すばらしい関係式だが、この式の示す意味が不明である。そこで、e^{ix}はオイラーによって導入されたので、オイラーの考え方も調査し、等式の意味を検討する。

2　研究の内容

2.1 複素関数論ける定義・考え方の調査

2.1.1 現代の複素関数論でのe^{ix}の定義、及び$e^{i\pi}=-1$の説明

複素関数論での論法は

・複素数による四則演算の定義

・級数を使った関数の定義

関数の例として、

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots, z\in C$$

・$z=ix, x\in R$ならば、

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

・特に$x=\pi$ならば、$e^{i\pi}=-1$

となっている。

2.1.2 複素関数論での$e^{i\pi}=-1$の考え方

上記の方法から、$e^{i\pi}=-1$は式の変換により論理的に導かれている。

2.2 オイラーによる定義・考え方の調査

2.2.1 オイラーによるe^{ix}の定義の概要

オイラーの証明方法が現代の証明方法と違うので、概要を Leonhard Euler(1748,1,PP.85-107) , Leonhard Euler (2001,PP.99-125)より説明する。

オイラー定数eの導入

aを定数、ωを十分に小さい正の数とする。a^{ω}は1より少し大きい数となり、$a^{\omega}=1+k\omega$を満たすkが存在する。Nを十分に大きな自然数とする。

$$a^{\omega N}=\left(1+k\omega\right)^N$$

$$=1+\frac{N}{1}k\omega+\frac{N\left(N-1\right)}{2!}k^2\omega^2+\cdots$$

$\omega N=x$とおく。xは正の実数となる。

$$a^x=\left(1+kx/N\right)^N$$

$$=1+\frac{1}{1}kx+\frac{1\cdot\left(N-1\right)}{2!N}k^2x^2+\cdots$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{N}=1, \lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{2N}=\frac{1}{2}, \lim_{N\to\infty}\frac{N-2}{3N}=\frac{1}{3},\cdots$$

（注：文献では$\lim\limits_{N\to\infty}$という記号は使われていない）

$$a^x=1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^3x^3}{3!}+\frac{k^4x^4}{4!}+\cdots$$

となる。$x=1, k=1$とすると、

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.71828\cdots$$

ここで、aをeと表記する。

$e=\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+1/N\right)^N$という定義である。

三角関数の導入

円の半径を1とすると、半周は 3.14159…である。これをπと表記する。（注：弧度法の導入になるが、導入理由は記載されていない。）

$\sin 0\pi=0$, $\sin\pi/2=1$, $\sin 3\pi/2=-1$, …などの記載がある。（注：$\sin 3\pi/2=-1$により、オイラーは負の数を認めていたことになる。）さら

に、三角関数の様々な公式が記載されている。

$$\cos z = \sin\left(\pi/2 - z\right), \sin z = \sin\left(\pi/2 - z\right)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\tan z = \sin z / \cos z$$

$$\sin\left(y + z\right) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$

他に、三角関数の倍角の公式、和と積の公式等である。

オイラーの公式の導入

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ より、

$\left(\cos x + i\sin x\right)\left(\cos x - i\sin x\right) = 1$

そして、一般的に n を自然数として、

$\left(\cos x \pm i\sin x\right)^n = \cos nx \pm i\sin nx$ となる。十分に小さい正の実数 x に対し、$\sin x = x$, $\cos x = 1$ とできる。(注：現代風に記述すると、$\lim_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ のことであるが、証明は記載されていない。)

　N を十分に大きな自然数とする。

$$\left(\cos x \pm i\sin x\right)^N = \cos Nx \pm i\sin Nx$$

$$\cos Nx = \left\{\left(\cos x + i\sin x\right)^N + \left(\cos x - i\sin x\right)^N\right\}\Big/2$$

$$\sin Nx = \left\{\left(\cos x + i\sin x\right)^N - \left(\cos x - i\sin x\right)^N\right\}\Big/2i$$

$x = v/N$ とおく。v は実数となる。

$$\cos v = \left\{\left(\cos\left(v/N\right) + i\sin\left(v/N\right)\right)^N + \left(\cos\left(v/N\right) - i\sin\left(v/N\right)\right)^N\right\}\Big/2$$

$$\sin v = \left\{\left(\cos\left(v/N\right) + i\sin\left(v/N\right)\right)^N - \left(\cos\left(v/N\right) - i\sin\left(v/N\right)\right)^N\right\}\Big/2i$$

v/N が十分に小さい正の実数なので、

$\sin\left(v/N\right) = v/N$, $\cos\left(v/N\right) = 1$ とできる。

$$\cos v = \left\{\left(1 + iv/N\right)^N + \left(1 - iv/N\right)^N\right\}\Big/2$$

$$\sin v = \left\{\left(1 + iv/N\right)^N - \left(1 - iv/N\right)^N\right\}\Big/2i$$

$e^x = \left(1 + x/N\right)^N$ なので、x を iv にかえて、

$\cos v = \left(e^{iv} + e^{-iv}\right)/2$, $\sin v = \left(e^{iv} - e^{-iv}\right)/2i$ となる。したがって、$e^{iv} = \cos v + i\sin v$ となる。

$e^{i\pi} = -1$ の表記の調査

　オイラーの執筆による文献の中で微積分に関するもの、及び日本語に翻訳された文献を調査した。調査した文献は引用・参考文献 Leonhard Euler(1748,1) ～ Leonhard Euler(2005)のとおりである。上記の資料は、オイラー・アーカイブ https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/ の中の文献だが、サイト内の他の文献も調査したが、$e^{i\pi} = -1$ は見つからなかった。

2.2.2 オイラーの e^{iv}, $e^{i\pi} = -1$ の考え方

　オイラーは、$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1 + x/N\right)^N$ の x を iv と置き換えて表記したので、関数の変数を実数から複素数に置き換えることができる、という仮定のもとの式の変換である。論理的な式の変換である。なお、文献に $e^{i\pi} = -1$ の記載がなかったことから、$e^{i\pi} = -1$ をだれが作ったかは不明である。

2.3 $e^{i\pi} = -1$ の問題点

　$e^{i\pi} = -1$ は大変すばらしい式だが、どのような意味を示すかが不明である。

2.4 e^{ix} の定義案、及び $e^{i\pi} = -1$ の可視化

　複素平面上で次の関数を定義する。

$f\left(x\right) = \{$複素平面上の単位円において、偏角がxのときの座標$\}$

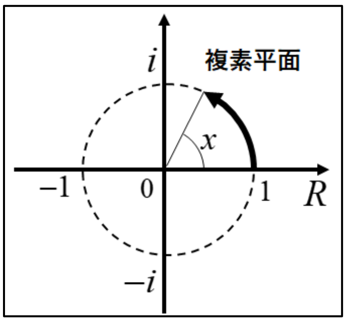

図１　複素平面上の単位円

$f\left(x\right) = \cos x + i\sin x$ とおける。

$f\left(x\right)$ の性質は、

① $f\left(x_1 + x_2\right) = \cos\left(x_1 + x_2\right) + i\sin\left(x_1 + x_2\right)$

$$= \left(\cos x_1 + i\sin x_1\right)\left(\cos x_2 + i\sin x_2\right)$$

$$= f\left(x_1\right) f\left(x_2\right)$$

② $\dfrac{d}{dx} f\left(x\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\cos x + i\sin x\right)$

$$= i\left(\cos x + i\sin x\right)$$

$$=i\,f\left(x\right)$$

③ $f\left(x\right)=\cos x+i\sin x$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=1+ix+\frac{\left(ix\right)^2}{2}+\frac{\left(ix\right)^3}{3!}+\cdots$$

性質①・②・③により、$f\left(x\right)$には、aを実数の定数とする指数関数e^{ax}と同じ性質があることがわかる。そこで実数の指数関数を参考に、$f\left(x\right)=e^{ix}$と表記する。このことは､「複素平面上の単位円の円周の軌跡と、実数の指数関数の軌跡とは同じ性質を持つ」という意味である。

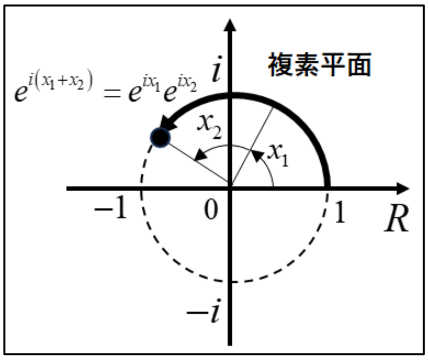

図２　複素平面上の単位円

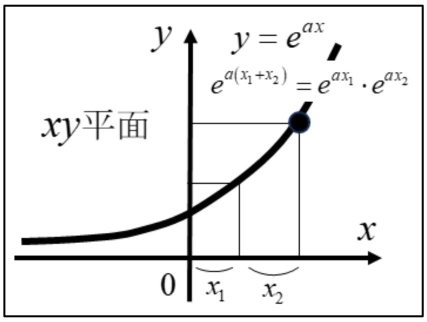

図３　指数関数

ここで、$x=\pi$とおくと$e^{i\pi}=-1$となる。これを言葉で言うと､「複素平面上の単位円において、偏角がπの場合の座標は-1である」となる。これで$e^{i\pi}=-1$の可視化ができた。

各記号の考え方は、

i：虚数、$i^2=-1$
π：偏角、$\pi=3.14\cdots$
e：関数記号、$e\neq 2.71\cdots$
と解釈できる。

３　まとめ

e^{ix}に特化した定義を考えることにより、$e^{i\pi}=-1$の意味が理解できた。ただし、$\sin\left(ix\right)$や$\cos\left(ix\right)$等の複素関数で特化した定義も考えたが、特別な性質は見つからなかった。

引用・参考文献

[1]Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum volume 1, (無限解析序説Ⅰ), https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/101/, 1748, 閲覧 2023/11/30
[2]Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum volume 2, (無限解析序説Ⅱ), https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/102/, 1748, 閲覧 2023/11/30
[3]Leonhard Euler, Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi fifinitorum, (微分法), https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/212/, 1755, 閲覧 2023/11/30
[4]Leonhard Euler, Institutionum calculi integralis volume primum, (積分法Ⅰ), https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/342/, 1768, 閲覧 2023/11/30
[5]Leonhard Euler, Institutionum calculi integralis volume secundum, (積分法Ⅱ), https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/366/, 1769, 閲覧 2023/11/30
[6]Leonhard Euler, Institutionum calculi integralis volume tertium, (積分法Ⅲ), https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/385/, 1770, 閲覧 2023/11/30
[7]Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum volume 1;高瀬正仁(訳), オイラーの無限解析, 海鳴社, 2001
[8]Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum volume 2;高瀬正仁(訳), オイラーの解析幾何, 海鳴社, 2005