複素係数の多項式の加減乗除

「多項式の加減乗除」は、実係数のみの多項式を扱った。なお、係数の解釈は複素数に拡張できる。実係数と複素係数の演算規則が同じなので、拡張できることは当然である。ただし、拡張の証明は省略する。

実際に例を示す。$\dfrac{1}{z+i}$ の級数表示。

$|z|<1$ の場合、

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+i} &= \frac{i}{iz-1} \\ &= -\frac{i}{1-iz} \\ &= -i\left(1+iz+(iz)^2+(iz)^3+(iz)^4+\cdots\right) \\ &= -i+z+iz^2-z^3-iz^4+\cdots\end{aligned}$$

これを、係数だけを使って計算する。

・	・	$-i$	-1	i	1	$-i$	
						1	(1 i
					$-i$	1	
					i	0	
				1	i		
				-1	0		
			i	-1			
			$-i$	0			
		-1	$-i$				
		1	0				
	$-i$	1					
	i	0					

$|z|>1$の場合、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-i/z)} \\
&= \frac{1}{z}\left(1+\left(-\frac{i}{z}\right)+\left(-\frac{i}{z}\right)^2+\left(-\frac{i}{z}\right)^3+\left(-\frac{i}{z}\right)^4+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{z}-\frac{i}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{i}{z^4}+\frac{1}{z^5}+\cdots
\end{aligned}
$$

これを、係数だけを使って計算する。

$$
\begin{array}{cc|cccccccc}
 & & 0. & 1 & -i & -1 & i & 1 & \cdot & \cdot \\ \cline{3-10}
1 & i & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & i & & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & -i & & & & & & \\
 & & & -i & 1 & & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & 0 & -1 & & & & & \\
 & & & & -1 & -i & & & & \\ \cline{5-7}
 & & & & 0 & i & & & & \\
 & & & & & i & -1 & & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & 1 & i & & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & 0 & -i & &
\end{array}
$$

このように、係数が一致することがわかる。

さらに拡張する。$\dfrac{1}{z-2+i}$ の級数表示。

$|z|<\sqrt{5}$ の場合、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-2+i} &= \frac{\dfrac{1}{-2+i}}{\dfrac{z}{-2+i}+1} \\
&= \frac{1}{-2+i}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z}{-2+i}\right)} \\
&= \frac{1}{-2+i}\left(1+\left(-\frac{z}{-2+i}\right)+\left(-\frac{z}{-2+i}\right)^2+\left(-\frac{z}{-2+i}\right)^3+\left(-\frac{z}{-2+i}\right)^4+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{-2+i}-\frac{z}{(-2+i)^2}+\frac{z^2}{(-2+i)^3}-\frac{z^3}{(-2+i)^4}+\frac{z^4}{(-2+i)^5}-\cdots
\end{aligned}
$$

これを、係数だけを使って計算する。

$$
\begin{array}{cccccc|l}
\cdot & \cdot & -\dfrac{1}{(-2+i)^4} & \dfrac{1}{(-2+i)^3} & -\dfrac{1}{(-2+i)^2} & \dfrac{1}{-2+i} & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 \quad -2+i \\
 & & & & \dfrac{1}{-2+i} & 1 & \\
\cline{5-6}
 & & & & -\dfrac{1}{-2+i} & 0 & \\
 & & & -\dfrac{1}{(-2+i)^2} & -\dfrac{1}{-2+i} & & \\
\cline{4-5}
 & & & \dfrac{1}{(-2+i)^2} & 0 & & \\
 & & \dfrac{1}{(-2+i)^3} & \dfrac{1}{(-2+i)^2} & & & \\
\cline{3-4}
 & & -\dfrac{1}{(-2+i)^3} & 0 & & &
\end{array}
$$

$|z| > \sqrt{5}$ の場合、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-2+i} &= \frac{\dfrac{1}{z}}{1-\left(\dfrac{-2+i}{z}\right)} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(\dfrac{-2+i}{z}\right)} \\
&= \frac{1}{z}\left(1+\left(-\frac{-2+i}{z}\right)+\left(-\frac{-2+i}{z}\right)^2+\left(-\frac{-2+i}{z}\right)^3+\left(-\frac{-2+i}{z}\right)^4+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{z}-\frac{-2+i}{z^2}+\frac{(-2+i)^2}{z^3}-\frac{(-2+i)^3}{z^4}+\frac{(-2+i)^4}{z^5}-\cdots
\end{aligned}
$$

これを、係数だけを使って計算する。

$$
\begin{array}{ll|llllll}
 & & 0. & 1 & -(-2+i) & (-2+i)^2 & -(-2+i)^3 & (-2+i)^4 \quad \cdot\ \cdot \\
\hline
1 & -2+i & 1 & & & & & \\
 & & 1 & -2+i & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & 2-i & & & & \\
 & & & 2-i & -(-2+i)^2 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & (-2+i)^2 & & & \\
 & & & & (-2+i)^2 & (-2+i)^3 & & \\
\cline{5-6}
 & & & & 0 & -(-2+i)^3 & & \\
 & & & & & -(-2+i)^3 & -(-2+i)^4 & \\
\cline{6-7}
 & & & & & 0 & (-2+i)^4 & \\
 & & & & & & (-2+i)^4 & (-2+i)^5 \\
\cline{7-8}
 & & & & & & 0 & -(-2+i)^5
\end{array}
$$

このように、係数が一致することがわかる。