

ヨハン・ベルヌーイ全集

第1巻

医学博士・数学教授、パリ・ロンドン・ペテルブルク・ベルリン王立協会の会員ヨハン・ベルヌーイ氏の著作。これまで散発的に出版されたものと、未刊のものをあわせて収録。第1巻には1690年から1713年に発表された著作が含まれている。

カール・フリードリヒ、最も強大なるプロイセン王へ。 最も尊厳ある王よ

古代の人々は哲学者たちに哲学的・数学的な論考を献呈するのを常としましたが、現代の著者たちはこうした論考を諸侯（高貴な君主）に捧げるのを好むのです。わたしたちは幸いにも、陛下のご寛大なお許しをいただき、偉大なる幾何学者にして哲学者であるヨハン・ベルヌーイ氏の著作を、哲人王である陛下に奉呈することを許されました。陛下は人々の上に高貴な位を占めておられるだけでなく、卓越した才能と精神の偉大さ、そして王者の威光を飾るあらゆる徳においても優れておられます。陛下は早くから洞察しておられました。人間の魂がその起源を引いた神性の模範に、最も近づくことができるのは、真理を認識し、人々に救いが与えられることによってである、と。そのため、陛下は常に生涯をその目的に向けて営まれ、すべてをそこに歸し、決して心の眼差しをその目標から逸らされなかったことは、今や明らかなのであります。それゆえ、神が王笏と王座にあらかじめ定め給うたあの偉大にして高貴な精神を、困難な時代と難事のただ中で鍛えようとお決めになったとき、あなたはただひとり、まさに壮年の盛りにあって、その重い帝国の担い手を引き受けられました。かくして、まことに王者にふさわしいこれらの徳をもって、陛下は次のことを成し遂げられました。ヨーロッパ全土がほとんど戦乱の悲惨に苛まれている間にも、陛下の庇護にゆだねられた幸運なる人民は、武力の苦難をこうむったとしても、それはむしろ平和の甘美さをいっそう深く味わうためであった、と私たちに信じさせるのであります。大いなる王よ、あなたの栄光を存分に享受なさってください。その栄光は、同時代や近隣の地域に限られてとどまるものではありません。太陽のごとく、ひとたび昇れば、その光で万物を満たし、進むにつれてますます力と輝きを増しながら、最果ての民族にまで及び、永遠の世代にまで伝わってゆくでしょう。後世に伝える歴史はこう語るでしょう。「その王は、その姿も言葉も共に尊く、愛すべき人柄であり、仲間や臣下には親しみ深く、敵に対しては寛容で、戦では不敗、しかし平和を愛し、人類の幸福のために生まれ、我らの時代の栄誉であり喜びであった」と。そしてミューズたちも、あなたを沈黙させることはありません。諸侯が読むべき書を著す時も、あるいは書かれるべきものを書かせる時も、彼女たちは自ら進んであなたを歌うでしょう。ある時は優雅に、またある時は厳粛に。あなたはそうしたすべての学芸の女神たちを崇敬することをいとわず、むしろ才智と地位のゆえに保護者・守護者であられます。あなたは学者たちを自国が生んだ者であれ、あるいは遠方から宮廷に召し寄せられた者であれ同じ顔つきの温かさ、同じ厚意をもって遇されます。ですから彼らは皆、ミューズの寵児として、あなたの愛する者であるかのように見えるのです。さて、あの名誉あるご招待、学界全体の称賛を受けつつ、わがベルヌーイ氏を、その最も博学会なる子らとともに陛下のもとへとお招きになったあのご招待がございましたゆえに、この最も高名な人の著作は、ただ陛下のご後援を求めるほかありませんでした。そしてこのことによって、私どものささやかな贈り物が、偉大なる王にとってまったくふさわしくないものであったり、また陛下にご不快を与えるものであったりはしないであろう、と私たちは信じることができます。どうか、この献呈を慈しみ深くご覧くださり、常に善良なる人々の努力をお受け取りになるその御心をもってお受けくださいますよう、謹んで切にお願い申し上げます。

陛下におかれましては

最も献身的にして、最も忠実なる僕マルクス＝ミカエル・ブスケ氏とその仲間一同

神聖皇帝陛下の特権

カール七世は、神の慈悲のお導きによって選ばれた神聖ローマ皇帝、常に尊厳ある者であり、ドイツとボヘミアの王、両バイエルンおよび上プファルツの公爵、ライン宮中伯、オーストリア大公、ロイヒテンベルク領伯、その他の称号を有する者である。我らはまた本書状をもって万人に告げる。マルクス＝ミカエル・ブスケ氏とその仲間が、謹んで我らに申し立てたところによれば、ヨハン・ベルヌーイ氏の著作全集を、既に散発的に刊行されたものも、これまで未刊であったものも含めて、四巻に編成し、四つ折り版（quarto 版）で出版する決意をした。しかし、競争者たちが嫉妬からこの版を模倣し、彼らの費用と労力の成果を奪ってしまうのではないかと恐れている。我らの皇帝特権によって彼らを保護し、損害を被らぬようお助けいただきたいと、謹んで請願した。我らはまた、その謙虚にして正当な願いに応じるのが妥当であると判断した。それゆえ、我らの皇帝権威をもって、すべての書籍商、製本業者、印刷業者、ならびにその他あらゆる書籍業を営む者たちに対し、厳しく禁止し、命じ、禁令を発する。いかなる者も、上記のヨハン・ベルヌーイ全集を、いまのこの題名であれ別の題名であれ、全体であれ一部であれ、本日より起算して 10 年間にわたり、神聖ローマ帝国領および我らの世襲領土の範囲内において、再版すること、他人に再版させること、他所で印刷したものを持ち込むこと、あるいは販売することを、当該請願者（ブスケ氏ら）およびその相続人・継承者の書面による承認なくして、敢えて行ってはならないし、行うことを許されない。もし誰かが、これに反して我らのこの特許あるいは禁令を破り、無視することを敢えてするならば、その者からは、かかる違反によって再版されたり持ち込まれたりした全ての冊子を、いずれの場所で見つかったとしても没収する。これらの没収は、マルクス＝ミカエル・ブスケ氏およびその仲間が、自らの権限によって、あるいは現地当局の助力によって、自分たちのものとして取り立てることができる。さらに、その違反者は、純金 10 マルクの罰金に処され、これは皇帝財務局および被害者（ブスケ氏ら）に折半して支払わねばならない。赦免の望みは一切与えられない。ただし、この我らの特許状の文言が書物の冒頭に印刷されており、かつ慣例に従って 5 部が我らの宮廷顧問会議に納められることを条件とする。それゆえ、我らはすべての臣民および神聖ローマ帝国ならびに我らの世襲領土に属する忠実な従者たち、聖職者・俗人を問わず、身分・階級・地位・秩序のいかなを問わず、とりわけ官職にあって自己または上官の名のもとに法と裁きを司る者たちに命ずる。彼らは誰ひとりとして、この我らの皇帝特許を罰せられることなく侵し、軽んじ、あるいは違反することを許してはならない。もし反抗する者を発見したならば、我らが定めた罰金で処罰し、あらゆる適切な方法をもって抑え込むようにせよ。そうすることで、彼ら自身もまた我らのもっとも厳しい怒りと、先に述べた刑罰を免れることができるのである。この文書を証するために、我ら自ら署名し、また我らの皇帝印璽を押した。この文書は、我らのローマ王国およびボヘミア王国の治世第一年にあたる、1742 年 6 月 12 日、マイン河畔フランクフルトにおいて 発給された。

神聖ローマ皇帝カール 7 世

印

証人として、ヨハン・ゲオルク・ケーニヒスフェルト伯

III

神聖皇帝陛下ご自身の命令により。
ヴァルトシュテッテンの J.ハイエックの署名

ポーランド王かつザクセン選帝侯である最も高貴なる君主の特権

最も尊厳にして強大なる君主フリードリヒ・アウグスト（ポーランド王、神聖ローマ帝国大元帥、ザクセン選帝侯、マクデブルク城伯ほか）は、ローザンヌおよびジュネーヴの書籍商マルク・ミカエル・ブスケ氏とその商会の謹んだ請願に応じて、ヨハン・ベルヌーイ数学教授の全集（これまで散在して刊行されたものと未刊のもの）を4巻にまとめて出版することを、慈愛をもって許可した。このヨハン・ベルヌーイ全集を、附図付きで、国王陛下並びに選帝侯殿下の特許によって印刷・販売することを許可する。ただし条件として、ザクセン選帝侯領、その属領・修道院領においては、他の書店や印刷業者は、この日付から10年間、この書物を再版（無断で複製）してはならない。もし違反した場合、すべての違法コピーを没収され、さらに100ライン・金グルデンの罰金を科される。また、この書物を出版する権利を持つ者たちは、内容を正しく校正し、できるだけ美しく印刷し、良質な白紙を用いることを義務付けられる。そして、出版のたびに20部を国王陛下に献上しなければならない。出版者は、この書物を販売する前に、国王陛下および選帝侯殿下の最高宗務局に見本を提出しなければならない。費用は出版者の負担とする。この特許は、国王陛下と選帝侯殿下の事前の承認なしには、他人に譲渡してはならない。出版者は、この特許によって10年間、独占的に保護される。もし誰かがこの権利に反して行動した場合、出版者が執行を求めれば、罰則が発動され、規定の罰金が徴収される。ただし条件として、出版者は最長でも5年以内に実際に印刷を完成させ、通常の部数を刊行して納入しなければならない。もしそれを怠れば、この特許の効力を失う。

なお、本書は、正式な原本の特許状が発給されるまでの暫定証明書として作成されたものである。その間は、この書面が特許状に代わる効力を持つ。これは国王陛下および選帝侯殿下の教会参事会・最高宗務局において署名・押印された。さらに、出版者に対しては、任命された書籍監督官ヨハン・ザカリアス・トレフル（Johann Zacharias Trefur）を通じて、書籍商にこの証明を伝達させる。もしこの伝達が適切に行われなかった場合には、その告知は無効とみなされる。これはドレスデンにおいて、1742年7月13日に執行された。

印

ホルツェンドルフ家の L. G.
クリスティアン・フリードリヒ・トイヒャー

書簡

著者ヨハン・ベルヌーイ氏が、書籍商兼印刷業者マルク・ミシェ
ル・ブスケ氏に宛てて書いたもの

閣下、私の小著作集の印刷もほとんど終わりに近づきました。つい先ほど、第4巻にして最後の巻の多くの刷り葉を受け取ったからです。私はただ、あなたに満足の意を表し、この本の印刷に際して、あなたが払ってくださった数々の労苦、迅速さ、正確さ、そして多大な費用に対して感謝を述べるばかりです。あなたはこの書物に、それが本来値する以上の名誉を与えてくださっていると私は思います。そして、あなたが決してこのことで後悔するようなことがないようにと願っております。なぜならご存じのとおり、閣下、私はこの作品集の刊行について、同意したという以外に何の関わりも持っておりません。実際には、その同意を与えるのも簡単ではなく、またあなたの熱心な勧誘、さらにはあなたがこのために動員された方々のしきりな説得に、私は長いあいだ抵抗してきたのです。

実のところ閣下、今回収録された数多くの小論文や断片の中には、私が編集者であったなら、かなりの部分を削除していただろうし、少なくとも手を入れ直したのも少なくありません。なぜなら、その多くは私が若いころに書いたものであり、また相当数は、私自身の便宜のために、たまたま手もとにあった紙切れに大急ぎで書き付けただけのもので、まさか将来公に出ることになるとは全く思っていなかったからです。したがって、それらが粗雑な形のまま世に出てしまったことについて、読者が簡単に気づくであろうことは承知しています。それゆえ、あらゆる批判を避けるために、私はここではっきりと申し上げておきます。このような未完成の作品群を出版するに至ったのは、私自身の意思ではなく、もっぱらあなたの熱意によるものであると。ですから、私が決めた方針、つまり自分はこの出版物の中に姿を現さない、という決意を変えずに貫いている以上、あなたが求めている序文を書くことをお断りするのをどうか悪く思わないでください。もしどうしても序文が必要だとお考えなら、私は、すでにこの全集の編集を快く引き受け、しかも非常な正確さをもって監督してくださったあの博識な教授にお願いするのがよいだろうと勧めます。その代わりに、私はすでに自分の著作集の印刷に同意したのですから、あなたが望まれるように、その同意を与えたことを証する正式な宣言をお渡ししましょう。さらに一步進めて申し上げるなら、今後、あなた以外の誰かが私の著作集を版行するようなことがあったとしても、私はそれを決して承認しない、とここに宣言いたします。

敬具

閣下

バーゼルにて、1743年1月9日

あなたのきわめて謙遜にして従順なるしもべ
ヨハン・ベルヌーイ数学教授

編集者より読者へ

多くの言葉であなたを引き止めるつもりはありません。誠実な読者よ、あなたにとっても長々とした前置きは必要ないと思われますし、また私自身の性分も、しばしば他人の著作を編集する際に人々がするように、選び出した著者を大いに褒めそやして天まで持ち上げる、といったことをする気にはならないからです。卓越した人物ヨハン・ベルヌーイ氏が、数学と哲学の分野にどれほどの功績を残したかについては、すでにすべての人に知られており、いま君の手にあるこの全集が十分に物語っていることです。しかも、この人物の謙虚さは非常に大きく、正当な称賛の言葉ですら避けようとするほどです。それゆえ、最も雄弁な人々ですら十分にふさわしく讃えきれないであろう人物を、私がその名誉を損なうような称賛の仕方を取り上げることなど、望むはずありません。

それゆえ、私は喜んであなたを本書の読書から、たとえ一言でも長く引き離すのを控えたいところですが、学問に大きな功績を残したマルクス・ミカエル・ブスケ氏から、この版の目的と方法に関わることを述べるよう強く求められました。したがって、ここにその要点を簡潔に記します。

高名なるベルヌーイ氏の著作が、数学者たちの日々昼夜の研鑽に供すべきものとして、多くの人から強く望まれていることを、誠実な書籍商が理解した。そして著者の許可を得たうえで、それらすべてを一度に、正確かつ美しく出版する計画を立てた。その際、彼は私に、この企画を助けてくれと依頼したのである。それは多くの苦労と莫大な費用なしには成し得ない事業であったが、数学を学ぶ者たちにとってきわめて有益であると私自身認めるものであった。そこで私は、ベルヌーイ家の名を愛する者として、自分の力に応じてできる援助を惜しまないことにしたのである。

最初に、かの最も著名な人物のすでに刊行されていたすべての著作を集めることが、私たちの課題となった。正直に申せば、この作業は少なからぬ労力と注意を必要としたからである。それらの著作はあまりにも広く、また遠くにまで散らばっていたのである。その一部はライプツィヒの学術誌 *Acta Eruditorum* から抜き出し、また一部はパリの *Journal des Sçavans* から取り出した。多くはフランス王立科学アカデミーの「歴史と紀要」から、いくらかはベルリンの *Miscellanea* から、いくつかはペテルブルク科学アカデミーの論集から引き出し、その他はさまざまなところから取り寄せた。そして、それぞれの論文がどこから抜き取られたかは、各論文の欄外に付した見出しに示してある。

さて、これらすべてのもの（既刊論文）は、すでにあなたのものと言えるかもしれないが、とはいえ一冊にまとめられる以前には、真にあなたのものとは言えなかったのだが、そこにさらに二つのものが加わる。これは、あなたが誰であれ数学研究を楽しむ者にとって、きわめて喜ばしいものとなるだろう。第一に、かつてパリで高貴な若者たちのために行われた 積分法に関する講義である。その積分法講義は、かつてパリでロピタル侯のために書かれたもので、確かに一部の人々の手元にはあり、まるで秘蔵されているかのように扱われていたが、まだ一般には公開されていなかった。第二は、さまざまなテーマに関する多くの草稿であり、今回初めて私たちの書庫から世に出されるものである。これらがいかに価値の高いものであるかについては、著者が自分の学才を必要以上に控えめに見せる謙虚さを引き合いに出すよりも、むしろ読者であるあなた自身に、その読書を通じて判断していただきたい。これらの中には、彼自身が「若書き」と呼ぶものもある。しかしそこにベルヌーイ氏の若き日の才能を見いだすことができよう。しかも、走り書きのように紙に書き留めたものでも、他の多くの丹念に練られた著作よりも、むしろ豊かな実りを備えていることが分かるだろう。

これらの論文が、もう少し早く我々の手に届いていたならば、それぞれを本来の順序に配列し、また他

の関連する論文と結びつけることができただろうに。我々が収集したものは番号を付して区別し、秩序立てて配置しなければならなかったからである。しかしその配置においては、事柄の順序を優先すべきか、それとも年代の順序を守るべきか、という難しさがあった。そして実際のところ、前者を推す理由もあれば、後者を推す理由もあったのである。すべてを長らく熟慮した末に、我々は論文を、それぞれが公表された年代に従って整理するのが最善であると判断した。その理由は、第一に、そのように並べれば近代幾何学の歴史的な一覧表を示すことになり、発見の源泉や進展の段階がより明確になり、しばしばどのような契機に、どのような思考の連鎖や推論の構造、他の命題の助けによって新しい真理が発見されたのかが見て取れるからである。これは発見の技術を進展させる上で非常に重要なことである。第二に、そうしなければ、しばしば複数の異なる主題を含む多くの小論文を分割し、ほとんど切り裂いてしまわねばならなかったが、それは我々には不当なことと考えられたからである。そこで、時系列の順序を保ち、かつ各項目同士をできる限り関連づけるために、多くの番号の末尾に、前の番号の続きとなる別の番号を指し示す注記を付しました。こうした注記が道しるべ・案内役となるので、同一テーマの論文を順に、しかも簡単にたどって読むことができるようになっています。

ベルヌーイ氏の著作集が互いによりよく結びつき、より理解しやすくなるように、他所から採ったいくつかの草稿（小論・覚え書き）を挿入すべきだ、とこの方面に非常に詳しい私どもの友人たちが判断しました。そもそも、著者が学者たちと交わした数多くの論争を、双方の言い分をすべて聞かないでどうして深く理解できるでしょうか。また、ある文章に対する批評だけを読むのに、元の文章そのものが手元になければどんな意味があるでしょう。私たちは友人たちの助言に従い、それらの著作をベルヌーイ氏の著作に結びつけることをためらいませんでした。そうしなければベルヌーイ氏を十分に理解することはできなかったからです。しかも、こうすることで、親愛なる読者であるあなたを、稀少で高価な本を何度も探し求める手間に送り出さずに済む、と考え、なおさら喜んでこの方針を採用したのです。

もっとも、本書の題名を決して忘れたわけではなく、またこれらの巻があまりにも大部になり過ぎることを恐れて、ベルヌーイ氏の著作に他人の文章をむやみに付け加えることはせず、必要最小限にとどめました。長過ぎるものは要約して載せるか、あるいはまったく割愛しました。また、ベルヌーイ自身のものと他人のものとが混同されないように、他人の文章は小さめの活字で印刷することにしました。

われらの著者（ベルヌーイ氏）は両方の言語に通じ、ラテン語でもフランス語でも書いていました。この書物を編むにあたっては、それぞれの小論を本来書かれた言語のままで出すべきか、それとも全部をラテン語にそろえるか、あるいは全部をフランス語にそろえるか、迷いました。ある人々は、むしろ何らかの統一感、いわば言語の一体性があった方が良く、と考えたからです。しかし最終的には別の人々の意見が勝ちました。その人々は、もしベルヌーイ氏の著作のために翻訳版を与えれば、著者の意図から逸れてしまうおそれがある、と禁じたのです。確かに、ラテン語の固有の語彙ではうまく表しにくいものはいくつかあります。たとえば航海術のハンドブックに関する語などです。また、ラテン語で書かれたものをフランス語に訳すのもあまり適切でないように思われました。しかし、フランス語もラテン語も、いまや博学者の間ではほとんど共通語に近く、（両方を理解しない学者は少ないと私たちは思いますので）、これほど多くの題材と多様なテーマを含む本書では、たとえ耳の繊細な人であっても、言語の入り混じりによって不快に感じることはないだろうと私たちは信じました。

さらに親愛なる読者よ、あなたに注意しておかねばなりません。代数の記号や符号の使い方において、私たちはほとんど常にライブニッツ式の慣習に従いました。この方式は印刷業者にとって扱いやすく、誤植の危険を減らすもので、そういう理由で現在多くの人々に用いられています。したがって、掛け算は

VIII

一点(・)で、割り算は二点(：)で表されます。比(=比率の等式)は等号記号で示します。根号や積・商などの結びつきを表すのには、かつては文字の上に曖昧な線を引いていましたが、今ではより適切に括弧やかぎを使います。こうしたことはすでに広く知られ、今ではごく一般的なので、これ以上説明する必要はありません。

さて、この著作を誤りなく世に出すために、私たちは現場に立ち会えなかったとはいえ、できる限りの注意を払いました。以前の版に散見された多くの誤りや汚点を取り除きましたが、目をすり抜けたものや、印刷作業員の不注意で刷り込みの際に紛れ込んだ誤植については、読者ご自身で訂正していただくようお願い申し上げます。さらに、各小論ごとの索引および全体で特に注目すべき事項の索引も付けるように配慮しました。

あなたに申し上げます。あなたのために私たちがこの仕事にどれほど熱心に取り組んできたか、その熱意にふさわしいだけの寛容さで、その成果を受け取り、どんな出来ばえであっても私たちの努力をよしとしていただきたいと思います。さようなら。ジュネーヴにて、1743年3月1日。

No. I

発泡と発酵について、新しい仮説に基づく論文

これを公に討議に付したのは、バーゼルのヨハン・ベルヌーイ氏である。

1690年9月19日付。

初版バーゼル 1690年、再版ヴェネツィア 1721年、三度目はナポリ 1734年。

序文

ある種の気むずかしい人たちが、この“キャベツ”を二度どころか何度も煮直した料理として出されたのをひどく嫌って、顔をしかめて吐き出すのではないかと目に浮かぶようです。実を言えば、私自身の喉にさえ受けつけず、調理した本人の私まで吐き気をもよおすほどです。

なぜなら、限度なく求められたご馳走はしおれてしまうからだ。

しかし、どうすればよいのか？私は、最も粗末な料理であっても、新しい方法で調理・味付けすれば、普段は繊細な味覚の人でも食欲をそそられるものだを知っている。こうした望みに支えられて、私は他の題材に先んじてこの題材を選んだ。たとえそれがありふれていて新しさではあまり推奨されないものでも。これについて論じている書物も物理学者も化学者もあまりに多く、読者はどちらを選ぶべきか分からず、誰を優先して読むか迷い、ためらい、結局あちらこちらに長いあいだ揺れ動き、ついに全部読み終えたときには、骨折り損に終わったと後悔する、というのが現状だからである。ここでは、よく分からないような理由や論拠で自説を必死に守ろうとする人々、権威をふるって反対のことを説く人々、どちらの側にもつかず言葉巧みに自分の説を売り込もうとする人々が見られる。要するに、ほとんど皆が意見を異にしており、ただ一つ、彼らの（すべてと言わないまでも）大半の原理や仮説があまりにも曖昧で混乱していて把握しにくく、その上に築かれた推論がまるでキメラ（空想上の怪物）のように見える、という点でしか一致していない。だが、なぜ私はこんなにむきになっているのだ？なぜ他人を非難するのか？他人が何をしようと私には関係ないではないか。もう悪口を言う連中の声が聞こえてくる。「お前だけがあらゆる点で完璧だとでも？お前が我々に非のないものを差し出すつもりか？みんなをはるかに超える知恵を持ったというその人物は誰なんだ？」この世にはめったにいないような希有な人が確かにいることを私は認める。だがちょっと静かにしてくれ、騒ぎをやめてくれ、なぜそんなに私に向かって激しく噛みつくのか？私の思うところを言おう。確かに学識豊かで最高の名声を持つ人々がいて、私は決して彼らを先ほど言った連中の中に含めるつもりはなく、むしろ当然の敬意と尊敬をもって語るつもりだ。しかし、私が自分の力なりに解明しようと引き受けたこの題材については、彼らによってわれわれに不完全に伝えられ、原因も十分に調べられていないと私は思う。それは彼らの理解力を超えていたからではなく、彼らの才能が常により重大な仕事に引き裂かれ、より困難な課題に向けられていたからである。学者たちがその問題を不完全で断片的なまま私たちに残したうえに、擬似物理学者や擬似化学者たちの混乱した諸説をすべて正して検討しようとすることは、アウゲイアスの牛舎を掃除するよりも困難であろう。だからこそ、私にも自分の考えを世に出させてもらいたい。それが新しいものかどうかは知らないが、少なくともこれまでこの見解全体を取り入れている著者には出会ったことがない。もし、親愛なる読者よ、この「何度も出されたキャベツ」のための新しい調味料があなたの味覚に合えば幸いです。そうでなければ、せめて料理人の方だけでも好んでいただけますように。

発泡および発酵についての論文

§ I

「発泡・沸騰(Effervescentia,Ebullitio)」という言葉は、ギリシャ語の「煮える・沸騰する($\beta\rho\acute{\alpha}\sigma\mu\alpha$ 、 $\beta\rho\alpha\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ 、 $\beta\rho\acute{\alpha}\sigma\zeta\omega$)」に由来する言葉である。ところで「発酵(Fermentatio)」という言葉も、「沸き立つ(fervendo)」から来ていると思われる。ギリシア語では「沸騰($\zeta\epsilon\sigma\iota\zeta$)」である。だから、聖書の中で「パン種・発酵種(Fermentum)」は「パン種($\zeta\upsilon\mu\eta$)」あるいは($\zeta\upsilon\mu\omega\mu\alpha$)と呼ばれ、これは「沸く・熱する($\zeta\acute{\epsilon}\omega$)」から来ている、やはり「沸く(ferveo)」と同じ意味である。この理由で、大麦から作られた飲み物(ビール)は、ギリシア語では $\zeta\upsilon\theta\omicron\varsigma$ と呼ばれていた。それは発酵によって造られるからである。したがって、語源から議論すると、「発泡(Effervescentia)」と「発酵(Fermentatio)」は、多くの人の考えに反して、形式的には異なるものではない、ということが分かる。もっともしっかりした議論によって、この点は次に示すつもりである。

§ I I

名称の説明を終えたので、そのものの定義へ移らねばならない。ここでいう「Effervescentia」とは、俗に怒りや激昂と呼ばれる心の突然の激情のことではない。たしかに人は怒ると心が沸き立つかのように「熱する・沸き立つ」と言われ、ウェルギリウスもひどく怒った人を「熱情に狂う者」とか「怒りで燃える者」と呼んでいる。しかしおそらく怒った人が「沸き立つ」と言われるのは、血が全身を普段以上に速く巡って熱し、沸騰し、膨張して本当の意味での「沸き立つ状態」に陥るからであり、その結果顔は真っ赤になり、血管は膨れ、目は光り、顔つきは陰しくなり、歯ぎしりし、口から泡を吹き、地面を踏み鳴らす、などの状態になるのである。全身の沸き立ちから生じるこれらの動作は、まず心の激情に原因があると考えられている。したがって、原因を結果の代わりに取って比喩的に言えば、心は怒りによって「沸き立つ」とか「煮え立つ」と言われるのである。

§ I I I

この比喩的な「沸き立つ」の話はさておき、本来の目的に進もう。真の物理的な「発泡」と「発酵」とは、混合物の諸部分の、通常よりも強い不規則かつ内部的な運動であり、ときには熱感を伴い、ときには熱感なしに知覚されるもの、と定義することができる。もしその動きが、非常に激しい泡立ちや音を伴い、突然始まってすぐ終わるなら、それは「激しい発泡」と呼ぶ。これに対し、ゆっくり始まって徐々に進み、目立った沸騰はしないが小さな泡を出しつつ長く続く場合は、「発酵」と呼ぶ。定義において、「発泡」や「発酵」を起こす物体は、少なくとも二つ以上のものから成る混合物でなければならないと求められているのは、理由があつてのことです。ここでいう「単純な物体」とは、粒子がすべて同質という意味ではなく、外部から何も加わらなければ常に同じ状態にとどまる物体のことを指す。このような単純な物体は、決して泡立ちや発酵を起こさない。なぜなら、動くものはすべて他のものによって動かされるからである。したがって、もし単純な物体の粒子が普段より速く動くとするれば、それには新しい何か加わって、その運動を与えなければならない。そうなれば、その物体はもはや単純な物体ではなく、混合物と呼ぶべきである。したがって、「発泡」や「発酵」を起こそうとする場合は、必ず二つの物質を結びつける必要がある。それぞれの物質は単独であればそのままの状態にとどまり、このような異常な運動を自ら得る理由はどこにも見当たらないからである。ぶどう果汁が収穫後に何も加えずに発酵するように見える、まるで自ら運動を得たかのようなのだという事実については、ここでは立ち入らない。この点については後で十分に答えることにする。

§ I V

以上のことから私は、もし「発泡」と「発酵」のあいだに差異があると言うべきものがあるとするれば、それがどこにあるかがわかると思う。つまり、両者は程度の差、私たちがよく言う「より多い・より少ない」という違い以外には異なる。「発泡」とは強い（より激しい）発酵にほかならず、逆に弱く緩やかな発泡は「発酵」と呼ぶべきである。確かに、両者のあいだにもっと大きな違いを立てる人々もいる。しかしそれは何の妨げにもならない。彼らの仮説や原理は私のものとは異なっており、そのため意見も違ってくるのは避けられなかったからである。もっとも私は彼らを反駁しようとは思わないし、各人が自分なりの説を持つことを許そう、特に判断は読者に委ねられているのだから。とはいえ、私は「発泡」と「発酵」のあいだに、先に述べた以外の違いは認めない。乾いた火薬の急激な燃焼は、湿らせて塊にした同じ火薬の順次的な燃焼とは、別の根本原因から説明しなければならないのだろうか？ 私はそうは思わない。乾いた火薬も湿った火薬も、同じ原因によって発火するからである。ただ乾いたものはその乾燥のためにすぐに火災を発し、すぐに消えてしまうが、湿ったものは湿気のために全体が一度に燃えず、火がある時間持続するにすぎない。したがって、この二つの燃焼は程度だけが違うと言わねばならない。前者は突発的かつ激烈であり、後者は順次的かつ弱い。「発泡」と「発酵」の違いも、これと同じだと私は思う。これらを引き起こす二つの物体が、微細で混ざりやすい場合には、接触した途端に「発泡」を生じる。物体同士が簡単に混じるため、相互作用や反作用が妨げられず、その結果生じる運動がすぐに起こり、すぐに消えるからである。反対に、接触する物体が不純で粗く、簡単に浸透しにくい場合には「発酵」だけが生じる。そのような物体は最初の衝撃で一度に作用を及ぼすことができず、徐々にしか互いに混ざらないため、長く弱い運動が生じる。これが「発酵」という名で呼ぶものなのである。

§ V

以上のような事情で、「発泡」と「発酵」がほとんど、あるいは全く違うことが分かったので、親愛なる読者にあらかじめ注意しておきたい。今後、両者に共通することや一般的なことを、簡潔にするためにどちらか一方についてだけ述べる場合でも、それが同時にもう一方についても当てはまると理解してほしい。それゆえ、話を本筋に戻して、「発泡」がどのように起こり得るかを見ていこう。発泡は、二種の液体の混合、または液体と固体の混合、あるいは二種の固体の混合によって生じることがある。この三つのうち、最初の二つはよく知られていて、混ぜるだけで外部の作用なしに発泡が起こることもある。しかし、固体同士の場合はあまり知られておらず、むしろ不可能だと考える人が多い。なぜなら、固体には液体のような内的な運動がないため、単に混ぜるだけで発泡が起こるとは思えないからである。実際、固体では単なる混合から発泡は決して起こらず、それを促進するには外部からの力が必要であることが、後の議論でより詳しく明らかになるだろう。

§ V I

さて実際に、この三種類の発泡の原因を調べる前に、その全過程と現象をあらかじめ説明しておく必要がある。第1種の発泡（液体と液体）についてはこうである。発泡しやすい二つの液体が混ぜ合わされると、たちまち無数の小さな泡が生じて上昇し、激しい音を立てながら泡立つことがある。時にはそのとき熱も感じられ、蒸気や煙のようなものが立ち上る。しかし別のときには、ほとんど、あるいは全く熱くならないこともある。発泡が再び収まる（たいていすぐに収まる）と、底に土質の沈殿物が見える場合もあるが、全く何も見えず、混合後の液体が以前と同じように、いやむしろ全く泡立ちの痕跡もなく、純粋で澄んだ状態に戻っているように見えることもある。第二種の発泡とは、液体と固体が混合されるときに

起こる現象である。両者が接触した瞬間、泡立ちが始まり、泡・音・そして時には顕著な熱や立ち上る煙を伴う。固体がそれほど重くもなければ、すぐに溶け、その断片があちこちに散る。あるものは勢いよく上昇し、あるものは底に急降下し、互いに逆方向に動こうとする。それまで澄んでいた液体は淡い色を帯び、かき乱されて濁る。この楽しい光景は第一種の発泡よりやや長く続き、やがてすべてが静まる。そのとき初めて、粉末状に溶けて散った固体が底に見え、液体は元の透明さを取り戻す。ただし注意すべきは、固体がたとえば金属であるような場合、非常に微細に溶けて液体全体に混じり、目立った濁りがなくなることがある。そのため、泡立ちの最中に金属が空中に飛び去ったか、液体の性質に変わったかのように見えるかもしれないが、実際にはその金属はなお液体の中に存在しており、沈殿させれば確認できる。第3種の発泡について言えば、それはただ一つの実験によってしか目で確かめることができないので、その歴史は、その実験そのものの説明に到達するまで延期することにしよう。

§ V I I

以上のように整理したので、これからこの驚くべき発泡現象の原因を探求しよう。その探求をより確実に行うためには、まず何よりも、自然界に関する原理のうち十分理解しやすく、誰もが簡単に認めるであろうものを前置きする必要がある。そしてその原理から出発して、数学者の方法にならって正しく証明すべきことを証明し、この現象の全過程に現れる一つ一つの事象を力学の法則に引き戻して説明することにしよう。本来自然に起こっていることに、なぜ超自然的な性質を当てはめる必要があるのか。ちょうど、発泡現象をうまく説明しようとして、ある人々が正体不明の隠れた性質を設定し、それをもとにあらゆる物事の原因を区別なく導き出したように。それは確かに汎用的な原理であり、三年もかからずに習得できる簡便な哲学の方法ではあるが。また、自分たちは核心を突いたと思っている人々もいる。発泡しやすい物体のあいだには生まれつきの反感があり、それらが結びつくと、永続的な敵意のために互いに相手を抑え込もうとする。そのため、

「あの突発的に起こる激しい戦いのような運動が生じるのだ」と。

しかし、お願いだから教えてほしい。誰がその物体に戦う力を授けたのか？ 誰が戦いのラッパを吹いたのか？ 勝ちたいという欲望や戦いたいという熱望、消しがたい憎悪は、心の情念ではないか。では、無生物の物体がそんなものをどこから得るというのか？ 間違いなく、ひとつの物体の中にピグミーと呼ばれる小人たちが住んでいるのだ。プリニウスが昔インドの果てで探したあの小人たちが、今度はツルと戦い、この凶暴な戦いを引き起こしているのだ。ちょうど今日でも、ガリア人の軍勢がドイツ人の隊と出くわして、そこから血なまぐさい発泡が生じるのと同じように。だが、こんな話は滑稽な作り話にすぎず、哲学の場で取り沙汰するにはおばあさん向けのおとぎ話の方がふさわしい。

§ V I I I

さて、当面は古人たちのたわごとは脇に置いて、この件について後世の化学者たちがどう考えたかを見てみよう。その多くは、前書きで既に触れたように、事柄をあまりにも曖昧に説明したため、自分で何を言っているのかさえ分かっていなかったか疑わしいほどである。彼らの原理は、それから成る物質よりも理解しにくく、あまりにも混乱しているので、それは何かと問われても明確に定義することができないからだ。彼らが自分たちの原理について明確な概念を持っているどころか、推論を始めた最初から行き詰まり、同じものを同じもので説明する循環論法をむなしく試みている。たとえば、ある人に「発泡とは何か」と聞くと、「それはアルカリと酸の結合から生じる超自然的な運動だ」と答える。ではアルカリとは何か？ と聞けば、「酸と一緒にになると発泡するものだ」と答えるのだ。では酸とは何か？ 「アルカリと一緒にになると発泡するものだ」、なんてしっかりした定義だろう！ これを見れば、化学者たちの原理がいかに確

固たる基盤の上に立っているか、また他の事柄についてどう判断すべきかがわかるだろう。

塩分質・硫黄質・水銀質・硝石質の粒子、アルカリ性灰汁質・酸性硫黄質・空気中の硝石質などの混合物、その他無数のものについても同様である。それらが自然界に実在するとしても、彼らはそれを心の中で把握することも、他人にそれが何かを明らかにすることもできないのである。化学が最も優れた学問のひとつであるにもかかわらず、自然探求者たちがそれをもっとよい形にまとめ、さらに発展させてこなかったことは、まことに嘆かわしい。確かに、恐ろしげで怪物じみた専門用語だけで人々を尻込みさせ、この学問の入り口が困難だと、まるで“爪を見てライオンを知る”かのように信じさせてきたことは知っている。だからこそ、こうした野蛮な語は排除されるか、少なくともそれらで何を意味しているのが正しく定義されることが望ましい。そして万事が秩序立って行われ、新しい物理的原理も定められるようになれば、自然の尽きない神秘の泉から、はるかに驚くべきものを引き出せるに違いない。これを自分でよく考えながら、自分の力を試してみよう。この問題を力学の法則で説明できるかどうか。この基準に従えば、他の化学的作用の原因を探究するのも私には難しくないだろう。私はアルカリが何かも、酸が何かも、その他化学者の名付けたものも知らない。まずそうしたものは存在しないと仮定し、最後には、それらが存在するかどうか、また何であるかを、自然の原理、しかも常に簡単に認められる前提から導き出そうと試みるつもりだ。

§ I X

この目的のために、次のことを仮定しよう。これらはそれ自体十分知られていることでもあり、後に証明されるべきことでもある。

1. 空気は非常に流動的な物体であり、弾性力を備えている。
2. 圧縮された空気は、自由になると与えられた出口から噴き出し、より大きな空間に広がる。
3. どんな液体の下に閉じ込められた空気でも、他に障害がなければ、泡の形で上へ押し上げられ、その液体の表面まで昇る。
4. あらゆる物体の中に、またそのどの粒子の中にも、空気が、しかも圧縮された状態で含まれている。これが真実であることは後で示す。
5. 粒子の運動がより激しくなると熱を生じる。これら一般的な仮説のほかに、私は次のような特殊な仮定も置く。
6. 互いに混合されて発泡を起こすべき二つの物体は、形の異なる特定の粒子から成っている。
7. そのうち一方の物体の粒子は四つの正三角形からなる四面体である。この物体を私は「作用するもの」と呼ぶ（表 I, 図 1 参照）。
8. もう一方の物体の粒子は、底面を互いに向け合った四面体から成り立っている。この物体を私は「受けるもの」と呼ぶ（表 I, 図 2 参照）。

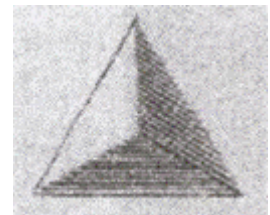


表 I, No. I, 図 1、
作用物の粒子

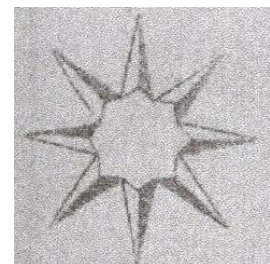


表 I, No. I, 図 2、
反応を受ける粒子

§ X

これらを前提にしておけば、発泡の真の原因、あるいは少なくとももっともらしい原因を探し出すことは難しくないだろう。もし、発泡するのに適した二つの物体（作用するもの・受けるもの）が互いに接触

し、その粒子が密接に混ざり合うならば、作用する粒子（仮説 7）が、受ける粒子（仮説 8）に衝突し、そのとき、作用する側の粒子の突き出た角が、受ける側の粒子の曲がった凹み部分に、まるでくさびのように勢いよく突き刺さり（表 I, 図 3 参照）、そのため、受ける側の粒子はその強い力に耐えられず、真ん中から裂けてしまう（表 I, 図 4 参照）。こうして（仮説 4）その中に含まれていた圧縮空気の出口ができ、その空気は監禁や束縛から解放されて、（仮説 2）大きな音を立てて噴き出し、より大きな空間を占めるようになる。そして

（仮説 3）無数の泡の形となって、まるで沸騰する水から噴き出すように液体の表面まで上昇する（その二つの物体のうちの一方、あるいは両方が液体である場合）。そこに石けん水を激しく振ったときに見

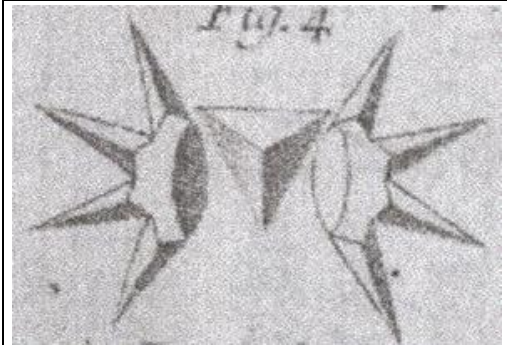


表 I, No. I, 図 4、作用を受ける粒子が、作用する粒子によって裂かれる

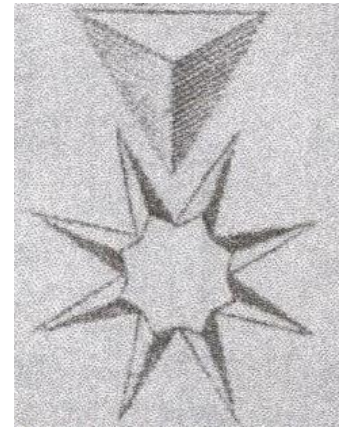


表 I, No. I, 図 3、作用する粒子が、作用を受ける粒子に差し込まれている

られるような泡をつくる。したがって、圧縮空気が突然膨張し、粒子の中から出てきてそれらを互いにぶつけ合わせるために、（仮説 5）ときどき強い熱が生じるのも不思議ではない。

§ X I

以上述べた一般的な現象は、ほとんどすべての発泡現象に共通しており、その原因を、これらの仮説によって簡潔に、そしてもし私の見解が誤っていなければ十分明瞭に説明できたと私は思っている。ここでついでに注意しておくべきは、化学者たちのいう「酸」とは、私が「作用する物体」と呼んでいるものに他ならず、彼らのいう「アルカリ」は、私の言う「受ける物体」に当たる、ということである。そして、なぜ発泡のあと、いま結びついている酸とアルカリを火や他の手段で再び分離すると、その酸はまだ発泡を経験していない別のアルカリとなら再び発泡できるのに、すでに一度発泡したアルカリはどんな別の酸と組み合わせても二度と発泡しないのか、という理由もここから分かる。なぜなら、私の仮説によれば、酸、つまり作用する物体の粒子は、発泡の過程で変化しないが、アルカリ、受ける物体の粒子は変化するからである。つまり、酸の粒子はアルカリの粒子を破壊したあとも無傷のまま残るので、その後も発泡を起こす能力がある。しかしアルカリの粒子は酸の粒子によって壊され、その中の空気も放出されるので、一度発泡した後はもはや発泡できなくなるのも不思議ではない。もっとも、まれではあるが、酸の側もアルカリと同様に一度の発泡でその能力を失うことがある。その原因は、アルカリの粒子があまりに硬すぎるか、逆に酸の粒子があまりに柔らかく弱すぎて、発泡の際に衝突して酸の角が摩耗したり鈍くなったりすることであり、その結果、酸自体の発泡する力も同時に鈍ってしまうのである。したがって、Cl. BONTEKOE 氏が自著「運動論」の中で、「酸だけでなくアルカリも一度発泡したあとで再び分離されれば、その発泡する力を保っている」と主張したのは誤りである。なぜなら、ここで示されたようにその性質が保たれるのは酸だけだからである。それゆえ、この尊敬すべき学者は、酸とアルカリが発泡後に分離されても再び発泡できるとするこの理由から、両者に大きな差があると論じたが、この論証は正しくない。なぜなら、発酵の場合には粒子がそういう状態にならないが、発泡の場合もアルカリは再発泡しないので、彼の言うような差は成立しないからである。もっとも、このような尊敬すべき人物のご意

見には敬意を払いつつも、すでに示したように、アルカリは最初の発泡のあとではもはや発泡しない（もっとも、第1回の発泡で酸の粒子によって壊されなかったアルカリの粒子がまだ残っていれば、それが2回目に壊されて再び発泡を起こすことはあるが、この第2の発泡は第1の発泡には含まれない。なぜなら第1回で発泡した粒子自体は2回目にはもう発泡しないからである）。さらにこうも付け加えられる。つまり、ある種の発酵のあとでは残っている粒子がもう発酵しなくなるのも、アルカリの粒子が発泡のあとで二度と発泡しないのと同じ理由による、ということだ。なぜなら、例えばぶどうの搾り汁（ワインのもと）、水に浸した大麦、その他同様のものなど、いわゆる「何も加えずに発酵しているように見える物質」は、実際にはアルカリ、私が上で「受ける物体」と呼んだ粒子だけを含んでいる。したがって発酵を起こすには、酸、「作用する物体」の粒子が外部からやってきて、それら（アルカリの粒子）を壊し、発酵を引き起こす必要がある。この酸の粒子は外気・周囲の空気から来るものと考えてよい。なぜなら、さまざまな実験によって空気の中には酸の粒子がたくさん含まれていることが確かめられているからである。だから、搾り汁や他の発酵しやすいものを空気にさらすと、その空気中の酸の粒子が徐々にその内部の孔にしみ込み、内部のアルカリ粒子と結びついて、上に述べたようなやり方でそれを引き裂き、中に閉じ込められていた空気に出口を与える。これが原因で、私たちは「搾り汁は単独で発酵している」と思い込むのである。そして同じ理由で、最初の発酵が終わったあとにそれ以上発酵しないのは、その物質の中に酸の粒子がもうなく、アルカリ粒子しか残っていないからである。すでに上で示したとおり、アルカリの粒子は一度発泡したあとはもはや発泡しないのだから、当然である。

§ X I I

発泡現象で観察されるこれらのこと、そして他の多くのことも、これらの仮説によって無理なく説明することができる。したがってあとは、それらの仮説が理性や真実にも適っているかどうか、またどのような論拠によってそれが証明できるかを見ていくことだけが残っている。さて、酸とアルカリの粒子に特定の形を与えた、最後の二つの特殊仮説について言えば、粒子があまりにも微小で、どんな目でも見えず顕微鏡の助けも及ばないため、その形を実験で証明することはできない、と認めなければならない。だから私としては、理性にも経験にも反しないかぎり、発泡の性質を最もうまく説明できるような形を粒子に仮定した、というだけで十分なのである。ちょうど天文学者が、天体现象や星の運動を最もうまく説明できる世界体系の仮説を、それを決定的に証明できなくても真実として受け入れ、より確からしく便利な仮説が現れるまでは保持するのと同じである。だからここでも、経験によって直接証明することはできなくても、それに反しないかぎりは、こうした仮説を置いてよいと考える。もっとも、その粒子がこのような形であり、他の形ではないと私が仮定したのは、それなりの理由がないわけではない。まず酸の粒子は角ばっていないなければならない。これは味覚から明らかである。もし粒子がなめらかで丸ければ、舌をこのようにくすぐったり、刺すような感覚を与えたりはしないからだ。次に、粒子はあらゆる方向から均等に角を持っていなければならない。もし一部が円錐のようになめらかだったなら、酸とアルカリが出会っても発泡が起こらないことがありうる。つまり、酸の粒子の角のない面がアルカリの粒子に当たると、それを壊せず、結果として発泡を生じない可能性がある。ではなぜ、立方体や正八面体やその他の正多面体ではなく、正四面体だと仮定したのか。それは、正四面体が正多面体の中で最も鋭い角をもち、したがって粒子を「引き裂く」作用に最も適しているからである。また、ピラミッドのような不規則な形の粒子も適さない。なぜなら、ピラミッドでは頂点の角が鋭いほど底面の角が鈍くなり、その鈍い角がアルカリの粒子に当たってしまい、発泡がまったく起こらないか、少なくとも起こりにくくなるからだ。したがって、酸、作用する物体の粒子は正四面体である、という仮定が最も適当である、という結

論になる。さて、アルカリの粒子について、先に仮説 3 で置いたような形をしていると仮定した理由も、ほぼ同じように説明できる。もっとも、アルカリの粒子が必ずしも「底面を互いに向け合った正四面体」だけで構成されている必要はなく、その代わりに任意の三角形底面の直角ピラミッドであってもよい。ただし、酸の粒子の突出した角をうまく受け止められるような、曲がりくねった角を形成していることが条件である酸の粒子が全方向に突出した角を持つ必要があるのと同様に、アルカリの粒子は周囲に曲がりくねった角を持っていないからである。そうすることで、酸の粒子がどの方向からアルカリの粒子に衝突しても、その凹みにちょうどはまり込み、そこからより簡単にアルカリの粒子を壊すことができるようになる。

§ X I I I

ここまで述べてきた前提は、事柄を完全に確実なものにしないまでも、少なくとももっともらしくする。なお、先に挙げた一般仮説について言えば、それらは疑いなく、長々とした証明を要しない。誰もが真実として受け入れているからである。ただし例外は第 4 の仮説で、これだけは疑念を抱かせるかもしれない。それは、物体やその粒子の中に空気が、しかも圧縮された状態で含まれている、という仮説である。しかしこの第 4 仮説も、注意深く考えれば、道理と経験の両方が支持している。

どんな物体にもその固有の孔があるのだから、その孔がすでに空気で満たされているか、まだ満たされていないかのどちらかである。前者なら私の言う通りであるし、後者でもいずれ空気がそこに入り込むだろう。なぜなら、空気は、他の空気から妨げられない場所には自らの弾力によって勢いよく流れ込み、空気のない空隙を完全に満たすからである。ちょうど、ボイルがと呼ぶ真空にした容器に、小さな穴をあけると、外部の空気が瞬時に押し入って、その受器の空間全体を自らの物質で占めるのを私たちが目にするのと同じである。確かにいくつかの物体には、空気の粒子すら通れないほど非常に細かい孔がある。たとえばガラス・石・宝石・金属・その他の硬い物質などがそうである。しかし、それらの内部にもすでに空気が存在している。どんな物体でも生成の最初から完成状態にあるものではなく、生成の初期段階ではきわめて柔らかく、ゆるく、粗であり、孔も広く開いているため、外部の空気を取り込みうる。そのため生成が進むにつれて外側の孔が狭まっても、内部の小部屋には空気が残り続ける。そして、生成の過程で内部の孔がさらに狭まると、すでに入り込んでいる空気は、外側の孔がきわめて細くなっているために外へ逃げられなくなる。したがって内部の空気はより狭い空間に押し込められ、外気よりも密な状態になる。ちょうど天然の空気が袋の中にあるとき、その袋を押し縮めると空気が密になり、より小さい体積にされるのと同じである。したがって、このことから、これらの物体は完成した状態にあって、たとえ非常に硬くても、なお圧縮された空気を内部に含んでいる、ということになる。

§ X I V

しかし、これらの論拠のほかにも、物体の内部に空気が存在することを証明できる実験がある。というのは、もし水または他の液体を火の上で煮ると、泡が立つのを見るからである。これは明らかに、その内部に潜んでいる空気が、熱の力によって膨張し、それまでそれを拘束していたあらゆる結び目を解かれ、軽さのゆえに表面へと運ばれて、その場所でそのような泡を形成するというしるしである。したがって、一度沸騰した水の中では魚は生きることができない。沸騰の際に水中の空気がすべて蒸散してしまうからである。そして空気を吸い込むことは、魚にとっても、他の動物にとっても同様に必要だからである。この目的のために魚にエラは備わっており、そのエラの働きによって、生命を維持するのに必要な空気を水から分離するのである。この点については Cl. MAJOWIUS が正しく考えていた。同様に、液体の中に空気が含まれていることは、ボイルの実験によっても確かめられる。もしある液体をボイルが“受容器”

と呼ぶ容器の中に閉じ込め、そののち空気ポンプの働きによってその中の空気を抜き取ると、私たちはすぐに（ちょうど水を沸かしたときのように）無数の空気の泡が液体の中から噴き出すのを目にする。つまり、外部の空気圧が取り去られると、液体のあちこちに分散していた空気の微粒子が、その弾性力によって膨張し、以前は目に見えなかったものが、今や目に見える泡へと膨らみ、先ほど述べた理由によって液面へと上昇するのである。このような実験は固体の中でも行うことができる。ある固体を取るのであるが、あまり硬くないもの（たとえば粘土・白亜・鉛白〔炭酸鉛〕など他の土質の物質）を選び、これを受容器に入れ、泡が出てくるのがよく見えるように水を注ぐ。

そののち、先ほどと同じやり方で、その受容器から空気を吸い出すと、注いだ水からだけでなく、その固体自身からも空気の泡が現れるのが観察される。このことから、固体の中にも多くの空気が含まれていることが明らかである。ここからまた、次のことの理由を求めることができる。石・ガラスなどのようなより硬い物体が、火の中に投げ入れられると、裂けたり砕けたりするのはなぜかという理由、真夏の暑さの盛りに、地面が所々でひびや割れ目を生じるかのように口を開くのはなぜかという理由である。

これらすべては、これらの物体の内部に潜んでいる空気によって起こるのである。この内部の空気が外からの熱によってかき立てられると、膨張し、広がる。そのとき空気は出口を求めて、孔の側壁を大きな力と圧力で引き裂き、激しく破壊するので、こういう仕方全体で物体が破裂する。あるいは、もし物体がそれほど硬くも緻密でもない場合は、せめてひびや割れ目を通して、内部の空気がこのように刺激されて自らの逃げ道を求める。

§ XV

これまで挙げてきた実験は、もし私が間違っていなければ、物体の中に空気が存在することを十分に示している。しかし、もうひとつ私たちが示さねばならないことがある。

その空気が自然状態の空気よりも密であるということである。このことは、次の実験によって証明される。ACDBのように、ある酸性の液体を半分ほど満たした小さな容器を取る（表 I, 図 5 参照）。そしてガラス管 EF を用意し、その一方の端 E は閉じ、もう一方の端 F は開いておき、同じ酸性の液体で満たす。次に、その F の口に、多くのアルカリ性粒子を含む粘土やチョークで作った小球 G を置く。そして直ちに、F の口の上に指を置いて管を逆さにし、F の口をその小容器内の液体に浸す。指を離すと、すぐに激しい泡立ちが起こるのが観察されるだろう。これは数時間続き、その間にアルカリ粒子の中に含まれていた空気が、締めつけていた結びつきがほどけて上方に上昇し、土質の物質は沈殿する。そしてようやく、この泡立ちが収まったあと、液面が下がって、上部の EH の広い空間をこの空気が占めているのが認められるだろう。さて、管の中

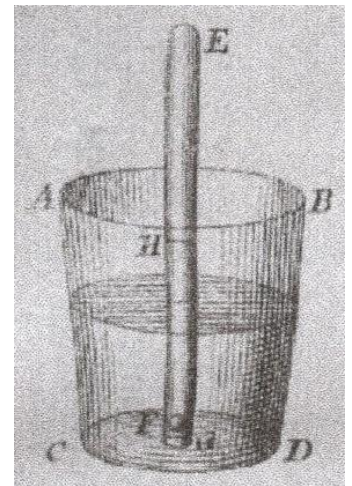


表 I, No. I, 図 5

の液面 H が容器の中の液面より高くなっているため、EH の空間に含まれる空気は外気よりもいくらか希薄である。それゆえ、この空気を外気と同じ密度にするには、管をもっと深く液に浸すか、またはさらに液を注ぎ足して、内側の液面が外側の液面と一致するようにする必要がある。そうすると、EH の空間は以前よりやや狭くなるが、その中の空気は自然な密度になる。それにもかかわらず空気の体積は、なおも球全体の体積より 2 倍、3 倍、4 倍と（球を作る土質の違いに応じて、アルカリ粒子を多く含むか少なく含むかにより）大きい。これは確かなしるしである。その空気は、まだ全部が球の中にあつたときには、外気よりはるかに密であつたということである。なぜなら、その球は一方は土質の物質からなり、もう一

方は、凝縮した空気が入っているすきまから成っている、と仮定できるからである。言い換えれば、土質の物質が占める空間と、孔に含まれている空気が満たしている空間が等しいと仮定すると、いま EH の空間が球全体の体積の 2 倍であるなら、球に含まれていた空気は外気の 4 倍の密度だったことになる。3 倍なら 6 倍、4 倍なら 8 倍…というように、この関係は体積の半分の逆比例で進む。もしまた、土質の物質が占める空間が孔の空間と等しくなく、もっと大きい小さい別の比にあると仮定するならば、その場合も同じように計算で球内の空気の密度を求めることができる。しかしそのことはここでは論じない。

§ X V I

これにあまり変わらない実験を、Cl. MAJOWIUS も行ったが、全く別の目的で、空気が新しく生成されるかどうかを試すために行った。さまざまな実験を行った後、彼はついに、この EH の空間を占めている空気は実際には空気そのものではなく、ただ球 G から熱によって立ちのぼった一種の「そよ風」や「蒸気」にすぎないと結論した。そして彼は、ちょうど水が熱によって蒸気になるように、この球の物質そのものがこの「そよ風」に変化したのだと考えた。ところで私たちは知っている。蒸気は、集めれば再び水に戻り、その性質を帯びる。しかしこのオーラはそのままオーラのままで、もはや球の物質には戻らない。では何と言うべきか？ それは他でもなく、球の孔の中にすでに存在していた空気であり、新しく生じたものではなく、凝縮された空気なのだ。これは自然の空気と同じ弾性力を備えているからである。このことはあの著名な彼自身も認めているだけでなく、ある実験で確かめてもいる。では、空気以外に、流体であって弾性力をもつ別の物質があるだろうか？ おそらくないだろう。彼は確かに、このオーラに空気の性質を認めなかった理由を挙げている。経験によってそのオーラが生命維持に適していないことを知ったからである。しかし、まるで生命を維持できないからといって、それが空気でないかのように考えるのはどうだろうか？ 私たちはまた、大気中の空気もペストの時期には生命維持に適さないばかりか、まったく有害であることを見ている。では、その時その空気が空気でなくなったと言うのだろうか？ そんなことを言うのは不合理であろう。EH の空間の中には、空気以外にも多くの粒子が入り込んでいることは否定できない。これらの粒子は、おそらく発泡の激しい動きによって、酸性液体や球そのものから引きはがされ、空気と一緒に上に運ばれたのである。したがって、こうした瘴気（しょうき）に満ちた空気を動物が吸っても生命を保てないのは不思議ではない。特に、あの著名な氏が使っていた硝酸や鉄の球が、多くの不純でほとんど毒のような粒子に満ちていることは明らかである。そうした粒子が呼吸で体内に取り込まれれば血液を汚し、死を引き起こしやすい。もし硝酸の代わりにより穏やかな酸性液（例えば硫酸）を使い、鉄の球の代わりに私たちの実験のように土質の球を用いていたなら、動物はその空気ですら死ななかつただろうし、少なくともより長く生き延びただろう。したがって、このことから推論できるのは、その空気が動物を直接殺したのではなく、ただ混ざり込んだ多くの生命維持に不適当な種々の粒子のために偶然そうなったにすぎない、ということである。

§ X V I I

しかし私たちの事柄についてより確かな知識を得るために、小球そのものの物質が熱によって空気に変化したのではなく、実はすでに小球の内部に空気が存在しており、新しく生成されたものではないことを確認するために、次の実験を行うことができる。土質の小球をよく乾燥させ、発泡前にその重量を精密に天秤で量る。次に、発泡が終わって小球の粒子がすべて底に沈んだら、液体中に溶けている小球の全質量を注意深く取り出し、先ほどと同じように乾燥させ、再びその重量を天秤で測定する。こうしてみると、小球の実体はほとんど重量を失っておらず、せいぜい百分の一程度しか減っていないことがわかる。おそらく発泡のあいだに空気とともに揮発したのだろう。しかし D. Majowius の仮説によれば、もっとず

っと多くの重量を失っているはずである。なぜなら、彼の説では、管の上部にある空気の全体積が小球の物質から生じたとされるので、その重量は著しく減っているはずだからである。しかしこれは実験結果に反している。ここでついでに、先に挙げた実験結果とはあまり一致しない、Cel. Alphonfi BORELLI の発泡に関する見解（「動物の運動について」第2部第29命題を参照）を検討しておこう。彼は、酸とアルカリが混じって発泡が起こるとき、酸やアルカリの粒子そのものが速く運動し、旋回しながら上昇して気泡を作ると考えた。最も運動性の高い粒子は球状に膨らんで小さな気泡を形作るが、それは密で充滿したものではなく、大きなすきまを含んだ疎なものなので、簡単に潰れて瞬時に元の狭い空間に戻る。このことから、Cel. BORELLI は発泡の原因をアルカリの粒子に凝縮した空気に求めたのではなく、酸やアルカリの微細な粒子自身が球状に拡張し旋回して広がることで、まるで空気が作ったかのような気泡が生じると考えた。したがって、その激しい運動が終わると、気泡は潰れ、それを作っていた粒子は再び酸やアルカリに戻るのだと、彼は推論していたのである。しかしこれは、先の実験からして真実とあまり一致しないことが明らかである。というのは、著者の仮説に従えば、発泡が終わり、運動や熱がすべて止んだあと、空間E H全体が液体で満たされるはずだと誰でも推測できるのに、実際には逆で、たとえ一年間そのままにしても空間E Hが液体で満たされることは決して観察されないからである。したがって必然的に、あの空間は自然の空気で満たされており、その空気は酸やアルカリの物質から生成されたのではなく、もともと小球の微細な穴に存在していたと結論しなければならない。このことは理論的にも実験的にも、もはや十分に示されたのである。

§ X V I I

この機会に、私たちの仮説に基づけば物体の弾性力がどれほどうまく説明できるかを指摘せずにはいられません。（先ほど示したように）あらゆる物体の微細な穴には空気が閉じ込められており、その空気が弾性の力を持っている、と仮定するならば、ということです。さて、すべての物体は、完全に弾性的なもの、衝突した速さと同じ速さで跳ね返るもの、まったく弾性がないもの、打撃後に全く跳ね返らないもの、あるいは不完全に弾性的なもの、衝突したあと確かに跳ね返るが、その速さは衝突時と同じではないもの、のいずれかに分類される。これを説明するために、空気でぎっしり満たされた多くの小胞が、穴のあいた共通の膜に包まれて一つの物体のように見えるものを考えてみよう。この小胞の塊を勢いよく地面や他の硬い物体に投げつけると、小胞の膜が衝撃に耐えられる限り、やって来たときと同じ力で跳ね返ることになる。しかしいくつかの小胞が壊れれば、全体は元の力では跳ね返らないし、全部壊れれば全く跳ね返らない。この跳ね返りの原因が、小胞に閉じ込められた空気の弾性にあることは明らかである。空気は圧縮された力と同じ力で元に戻ろうとするので、衝撃で小胞が押し縮められると空気はさらに圧縮され、各小胞が元に戻ろうとする力で塊全体が衝突したときと同じ速さで跳ね返る。しかし、いくつかの小胞が破れて空気が多孔質の膜を通して押し出されれば、その部分はもはや反発する力を持たず、残りの小胞の力だけでは全体を元の速さで押し返せない。もしすべての小胞が壊れれば、弾き返す力は全く残らず、塊は跳ね返らないだろう。この説明を現実の物体に当てはめると、どんな物体も空気入りの小胞の塊にたとえられる。物体も無数の孔を持ち、その孔には空気が詰まっているからだ。物体によっては孔の壁が柔軟でありながら同時に粘り強く、圧縮されても破れないため、勢いよく弾かれても孔の空気が元の力で広がって全体が跳ね返る。このようなものが完全弾性体で、火打石、ガラス、水晶、宝石などハンマーで叩いても柔らかくならない硬い物体がそれにあたる。一方、鉛やスズのようにまったく弾性のない物体では、孔がそういう配置をしていて、少しの圧縮でも孔の中の空気が壁を破って外に逃げ出すため、打撃後に跳ね返らず、元の形も戻らない。打撃の跡が残るのはそのためである。また鉄・銀・金

などほとんどの金属のように不完全弾性体もある。これらは確かに跳ね返るが速度が落ちる。これは打撃のあと、孔の一部が破れて空気が抜ける一方、残りの孔は無事に残るためである。したがって、先ほど小胞の塊について述べたことは、これらの物体にもそのままあてはまる。物体のその他の弾性、ねじり・曲げ・引っ張りなどによる弾性についても、すべて同じ原因に基づいている。これらの作用では物体の孔が狭まり、その中の空気が圧縮されることで元の状態に戻ろうとする力が生じるからである。こうしたことについて、ここではこれ以上詳しく述べるのは控えることにする。ここで反論が予想される。私は物体の弾性を説明しようとしながら、その根拠である空気の弾性の原因を既知のものとして置いてしまった、と言われるかもしれない。それは同じものを同じもので説明しているとか、問題になっていることをそのまま仮定している、と見なされるかもしれない。確かに、ここで述べたことから空気の弾性そのものの原因を知ることはできないし、それは自然の奥深いところに属する別の議論であるから、ここで詳しく導くつもりもない。ただ、私はこの楽しい思索にたまたま触れたので、すべての物体の弾性力が空気の弾性にのみ由来していることを示したかったのである。したがって、個々の弾性の種類ごとにいちいち新しい説明原理を考える必要はない。

§ X I X

もしこれらの説明が不十分だとか、自分の考えにぴったり合わないと思う人がいれば、その人自身が自分の見方に従って訂正・追加・削除して下さってかまわない。さて本題に戻ろう。これまで、二つの液体の混合による第一種の発泡、そして液体と固体の混合による第二種の発泡が、どのように、どんな原因で起こるかを見てきた。これからは、二つの固体の混合による第三種の発泡が、果たして起こるのか、起こるならどこから生じるのかを見ていくことにしよう。以上の議論から次のことが明らかである。第一に、発泡を起こす物質、酸とアルカリは、互いに深く混合されなければならない。第二に、酸とアルカリ、または少なくともそのどちらかが運動していなければならない。静止したままでは酸の粒子がアルカリの粒子をばらばらにすることはできない。したがって、二つの発泡性の液体、または液体と固体は、外からの作用なしに、ただ相互に結合するだけで自ら発泡する。液体は非常に細かい粒子に分かれているので、他の液体や固体の孔の中に入り込み、すべての部分にわたって混合でき、混合後は液体の粒子が絶えず運動しているため、他方の液体や固体の粒子を簡単に分断できるからである。ところが、こうした必要条件のどちらも二つの固体には当てはまらない。固体の粒子は互いに密着しているため、他の固体の粒子と混じり合うことができないからだ。したがって、それらを混ぜたい場合には、この密着を解く、つまり固体を極めて細かい粉末にする必要がある。そうすれば一方の固体の粒子が他方の固体の粒子に触れられるようになり、これこそが本当の混合である。一方の各粒子が他方の各粒子の隣に置かれる状態がそれである。したがって、二つの固体が発泡を起こさなければならない場合には、まずそれらをできるだけ細かい粉末に砕くことが必要である。そのうえで、最小の粒が最小の粒と結びつくように、十分に互いに混ぜ合わせなければならない。しかしこれだけではまだ不十分である。さらに、混ぜ合わせられたこれらの粒子にある種の運動を与えることが必要である。そうすることで酸、作用する物質の粒子が、アルカリ、作用を受ける物質の粒子に作用し、それを分解できるようになるからである。ところが、こうして混ぜられた固体の粒子は、液体の粒子のような内在的な自然な運動を持っていない（私は、極めて細かい粉末と液体との違いは、粉末の粒子が互いに隣り合って静止しているのに対し、液体の粒子は絶えず動いていることにある、と考える）。したがって、その運動は外部から与えてやらねばならない。つまり、粉末全体を揺り動かし、振動させ、圧縮するなど、どんな方法でもよいから運動を加える必要がある。その他の条件が正しく整っていれば、二つの固体の組み合わせによっても、二つの液体、あるいは液体と固体

の組み合わせと同じように発泡が起こることは疑いない、と私は考える。もっとも、次のことには注意しておくべきである。このような固体同士の発泡反応は、これまであまり行われてこなかった。おそらくその理由は、どのように操作すべきか、また発泡に適した固体をどのように調製すべきかが知られていなかったためである。あるいは、たとえそれが知られていたとしても、期待どおりにうまくいくことは稀だったであろう。なぜなら、多くの発泡性固体は粉末にするとその発泡力を失ってしまうからである。たとえば酸やアルカリの粒子をたくさん含んでいたとしても、固体を砕いたりすりつぶしたりする過程で、酸の粒子の角が削られてしまったり、アルカリの粒子が潰れてしまったりすることがあり、そのどちらの場合でも、発泡に適さなくなってしまうからである。したがって、もし二つの固体が発泡に適していて、その酸とアルカリの粒子が粉末に砕いても完全に無傷のまま保たれている、というようなことがあれば、それは非常にまれな出来事の一つである。このことから TH. Bartholinus は、自身の稀少な観察記録（医学記録、第2部、第70）の中に、アンチモン（精錬アンチモン）と昇汞（しょうこう、塩化第二水銀）をよく粉末にして混ぜると発泡する、という実験を挙げている。そしてその全工程を詳しく記していて、これは私の考えを見事に裏付けるものとなっている。実際、昇汞（塩化第二水銀）は、その腐食作用の強さからもわかるように、酸の粒子を多数含んでいる。そして、昇汞は軽くすり砕くだけで粉末にできるので、その酸の粒子は壊れずにそのまま保たれる。同じように、アンチモンに豊富に含まれているアルカリの粒子も、粉碎された後も（おそらくその硬さや強さのために）自分の形を変えずに保っていたであろう。したがって、これら二つの粉末は、たとえ十分に混ぜ合わせても、（著者の言葉を借りれば）まだまだ熱も感じられず、悪臭のする煙の痕跡も見られない。これはただ、内在的な運動が欠けているせいである。ではどうすべきか？ 疑いなく、外部から運動を与えてやる必要がある。そこで（これこそが私たちの仮説を最もよく説明するものなので）、著者の指示では、混ぜ合わせた粉末を口の狭いガラス容器に入れ、太い端の棒で絶えず強く押し固めて表面を全体的に圧縮する。最初の四半時（約15分）押し詰めても粉末は静かで冷たいままだが、さらにもう四半時押し続けると、これまで表面をかすめていた棒が急に深く沈み込み、底まで進むのが見える。この瞬間、濃い煙が立ちのぼり、ガラス容器は熱を帯び、中身が口からあふれ出し、泡立ち、激しく発泡して流れ出し、部屋全体が重い蒸気に包まれてしまう。以上のことから、単に圧力だけがこの現象を引き起こしたことがはっきりする。圧力によって酸の微粒子がアルカリ粒子にさらに深く押し込まれ、その角がアルカリ粒子のくぼみにより深く食い込み、最終的にアルカリ粒子を破碎して内部に閉じ込められた空気には出口を与え、これが先ほど述べたような諸効果を生じさせるのである。これで第3種発泡の全過程とその真の原因が説明できる。われわれには、著者のように第一元素の粒子が粉末中に散在している（むしろデカルトの考えた第一元素と言うべきものが）などと仮定する必要はなかった。

§ XX

ここで発泡や発酵の別の現象に移ろう。非常に寒い空気の中では、発酵が進まないことがある。理由は、寒さのために空気が通常より凝縮し、より大きな弾性力（反発力）をもつからである。この外気の弾性力が、アルカリ粒子の内部にある空気の弾性力より大きいのか、少なくとも同等になると、酸の粒子によってアルカリ粒子が砕かれても、内部の空気は周囲の空気の強い抵抗のために膨張できず、そのため発酵全体が妨げられる。このため、パン職人や家庭の主婦たちは、発酵させるパン生地を暖かい場所に置き、周囲の空気の弾性力を弱めて、生地内の空気がより簡単に膨張できるようにするのである。前に述べたことから、なぜ発酵したパン生地がオーブンの中で膨らむのか、逆に発酵していない生地がケーキのように平たいままなのかが分かる。発酵の助けによって、アルカリ性の粒子（生地内の粒子）が引き離

される。その結果、それらの粒子の中に閉じ込められていた圧縮空気が膨張して、生地全体を持ち上げる。この膨張した空気は生地が粘り気を持つために中にとどまらざるをえず、液体の発酵のように上方へ抜けて空中へ逃げてしまうことがない。したがって、その生地を温められたオーブンに入れると、この空気はさらに熱で膨張し、パンは大きくふくらまざるをえない。しかし、もし小麦粉の生地、粒子を分離できるような発酵物を全く加えなければ、パンがオーブンで膨らまないのは不思議ではない。その場合には膨張させる力が全くなく、空気は依然として自分の牢獄に閉じ込められ、束縛を解かれていないので、熱によっても、また自分自身の弾性力によっても膨らむことができないからである。正しく発酵したパンを切ると内部は多孔質で柔らかく、無数の気泡が見える。これは自由になった空気が膨張して作ったものだ。一方、発酵していないパンはチーズのように緻密で穴がなく、空気がまだ粒子の内部に閉じ込められ、束縛されているため膨張できなかったことの証拠である、という説明です。したがって、前述のことから明らかなように、発酵をきちんと行うためには、発酵させるべき物質を非常に寒い場所に置かないか、少なくともアルカリ粒子内に閉じ込められている空気よりも密度の高い空気の中に置かないようにしなければならない。さもなければ発酵は決して起こらない。

§ XX I

同様に、閉ざされた場所では何も発泡せず、何も発酵しないことが観察されるが、それは前に述べたのとほぼ同じ理由による。すでに示したように、粒子の分裂に加えて、そこから追い出された空気が自ら膨張できる空間も必要だからである。したがって、もし発泡し得る二つの液体をある容器の中で混ぜ合わせ、その容器をその状態でいっぱいにしてしっかり栓をしたなら、まったく発泡は起こらない。なぜなら酸の粒子がアルカリの粒子を引き裂いたとしても、その中に含まれている空気はすでに容器がいっぱいなので膨張できず、膨張には元より広い空間が必要だからである。このようにして空気は粒子から分離されず、したがって発泡もまったく生じないのである。したがって、ぶどうの搾り汁を長く甘いまま保存し、発酵を防ごうとする者が、普通その液体を入れた樽や容器を隙間なくしっかりと密封するのはなぜか、その理由が説明できる。この密封によって第一に外気との接触が完全に断たれ（外気が搾り汁の発酵の主因であることは先に述べた）、第二に、溶けた成分から噴き出そうとする空気が占めるべき空間も奪われるのである。こうして空気は自分の内部に押しとどめられる。発泡や発酵の本質は、含まれている空気が粒子から分離することであるから、この分離が樽の中で起こらなければ、ワインは清澄されず、現状のままでいなければならない。だが、もし樽に小さな裂け目や穴があれば、その空気は粒子の中に閉じ込められた圧力を逃れ、この出口を得て自らの弾性力で激しく噴き出す。場合によっては、樽が頑丈でなければ空気が出口を求めて側板を衝撃と轟音で破裂させ、持ち主はワインと労力の両方を失ってしまう。まさに空気の弾性力がこれほど強いのだ！ アルカリ粒子が溶けた後はまだ発酵は感じられないが、発酵しようとする最大の圧力がそこにあり、それを抑えるのは樽の側板だけである。だからこそ樽が破裂しないためには強度が非常に重要であり、このことは実験によってさらによく示すことができる。口の狭いガラス瓶に酸性の液体を入れ、先ほどと同じような小球を投入し、ただちに瓶口を気密に閉じる。液体の作用で小球の粒子から空気が分離されて自由になると、発泡しようとするその空気は弾性力で瓶の壁に大きな膨張力を加え、瓶がその力に耐えられなければ勢いよく破裂するのが観察される。もし瓶がこの膨張を抑え込むのに十分強ければ、閉じている間はまったく発泡は見られないが、口を開けるやいなや発泡がたちまち現れる。この理由は先に述べた通り明らかなので、ここでは繰り返さない。

§ XX I I

この機会に、私の仮説が自然界の別の謎を解くためにどれほど広く応用できるかを示してみせれば、読者にもきっと喜ばれるだろう。私の知る限り、火薬の点火とその爆発力を発泡の観点から説明した者はいない。しかし私の原理からすれば、それがどれほど巧みに発泡、しかも第2種の発泡に当てはめられるかを、ここで簡単に示してみよう。火（熱）は非常に流動的な物体で、その粒子は高速で動き、楔のように他の物体の粒子間に入り込んで分断する力を持っている。火が溶解・分裂させる力をもっているというこの作用に注目するならば、火は酸にたとえることができる。一方、火薬は大部分が硝石からできており、豊富なアルカリ性粒子を含む。したがって火薬の爆発力の本当の原因を説明するのは難しくない。§.XXXIで述べたように、発泡が妨げられた状態では閉じた容器に巨大な力がかかるが、それがここでも起きている。火薬に火をつけることは、酸とアルカリを混ぜる

のと同じであり、火の酸性粒子が瞬時にアルカリ粒子に突入してそれらを分断し、非常に強く圧縮されていた空気に出口を開ける。その結果、その空気は各粒子から一挙に集まり力を合わせて、自らの弾性力と火の運動によってさらにかき立てられ、ひと息にあらゆる障害を取り払い、最強の障壁すら突き破ってしまうのである。だが、これを誰が不思議に思うだろうか。私たちは毎日、空気の弾性力がどれほど強いかに目をしている。たとえばある修道士が最近の公開実験で示したように、二つの銅の半球（直径が足の四分の三ほどしかないもの）を合わせて中の空気を真空ポンプで抜いた後には、11ポンド以上の力でも引き離せないほど、空気の重さ、いやむしろ弾性力は強大である。これほどまでに自然の空気の弾性力は大きな力を発揮するのだ。ましてや、最近発明された空気銃のように、圧縮空気の力だけで弾丸が厚い板を貫通する装置については、ここでは言うまでもないだろう。自然な空気のわずか10倍の密度でさえあれほどの力を発揮するのだから、火薬のアルカリ粒子に閉じ込められた100倍を優に超える密度の空気がどれほどの作用を起こさないはずがあるだろうか。これほどの密度は、これまでどんな方法でも空気をそ

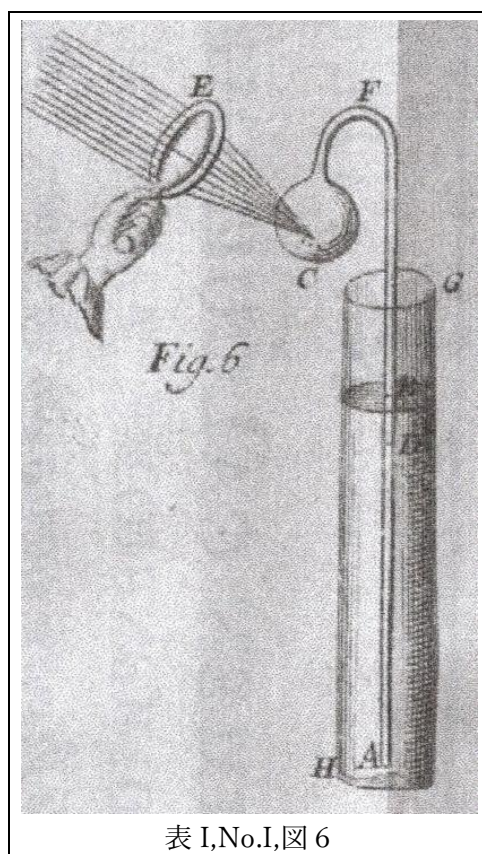


表 I, No. I, 図 6

こまで圧縮できなかったために信じがたいが、つい最近兄弟と一緒に成功させた実験によって、その真実が実証できるのである。われわれは曲がった管 ABC（表 I, 図 6 参照）を用いた。その一方の脚 AF は十分長く、直径は約半インチで、A の端は開いていた。もう一方の短い脚にはフラスコ C が付いていた。そこに、管を逆さにして A の口から火薬の粒を 4 粒入れた。続いて、脚 AF を B の位置まで水で満たし、それを同じく水の入った長方形の容器 HG に浸した。これを行った後、装置全体を半時間ほど温度が一定の場所に置いておいた。こうして、CFB の空間に閉じ込められた空気が、もし取り扱う際の手の熱で一時的に膨張していたとしても、その間に自然な状態に戻ったと確信できるようにするためであった。そこで私たちは、この点をより確かめるために、AFC の管を次のように調整した。管内に含まれる水面 B が外側にある周囲の水面と一致するようにしたのである。これは、CFB の空間に閉じ込められた空気が外気と全く同じ状態にあるというしるしになった。その後、このように準備した装置を一定温度の場所から取り出し、太陽光線にさらし、焦点を合わせる鏡の助けを借りて、アンフル C に入れておいた火薬（黒色火薬）を着火した。すると、その瞬間、管 BA 内の水が衝撃によって限界をはるかに超えて押し

下げられた（そのため、BA 管の部分が十分に長くなければ、口 A から水だけでなく空気までもが押し出されてしまうほどであった）。しかし、私たちの場合には、内部の水面 B は口までには達しなかった。こうして実験は望みどおりにうまくいった。そこで、加熱後の状態にあった装置を再び元の一定温度の場所へ移したところ、管内の水がゆっくりと再び上昇するのを観察した。これは二つの理由によるものである。(1) より温かい場所から冷たい場所へ移したこと、(2) 突如点火された火が再び消えたこと、である。この水の上昇は、装置全体が冷え切り、点火前と同じ状態に戻るまで続いた。そして、その後はそれ以上上昇せず、静止したままになり、私たちがその状態で放置した三、四時間のあいだずっと動かなかった。このようにして私たちは、水面が以前の基準点 B まで上らず、B よりかなり下の位置、つまり新たな基準 D にとどまっていることに気付いた。そこで、あらかじめ基準として記録しておいた水面 B の位置をもとに、管を少し持ち上げて、管内の水面 D が外側の水面と一致するまで調整した。こうして、CFD の空間に含まれる空気が再び自然な状態に戻ったことになる。そして、CFB の空間にあった空気の体積が BD の体積だけ増えていることから、私たちは次のように結論した。その体積 BD に相当する空気は、他から来るはずがないので、先に装填した 4 粒の火薬の中に元から含まれていたに違いない、と。しかし、私たちの判断によれば、火薬 200 粒でようやく BD の空間が満たされる程度にすぎない。したがって、1 粒の火薬は、(1) 固形成分と、そこに圧縮空気を含むもの、そして (2) その圧縮空気そのものの、とから成り立っている（ただし私は、この圧縮空気の量よりも固形成分の方がずっと多いと考えるが）。すると、BD の空間を満たしていた空気は、まだ火薬の粒に閉じ込められていた時には、自然の空気より 100 倍以上も濃縮・圧縮されていたことになる。この実験が私の仮説をいかに見事に裏づけるかは、誰の目にも明らかである。そして同時に、火薬の大きな威力は、ただ単に火薬が急に燃え上がって周囲の空気が激しくかき乱され、より大きな空間に広がろうとするために生じるのだと考える人々の説を、一撃で打ち破るものでもある。彼らはその結果、あらゆる障害物を大きな力で破壊し、みずから脱出口を作ろうとするのだと主張しているしかし、このことだけでは十分な原因にならないことは、私たちの実験が十分に証明している。もし彼らの説が正しければ、突発的な火災によって生じた内部の動きが終わり、装置全体が冷却した後には、水は元の高さ B まで上昇しているはずだからである。なぜなら、いま管の中に以前より多くの空気がある理由は全く見当たらないからだ。さらに、もうひとつ彼らの説では説明できないことがある。なぜ火薬を粉末状に細かく挽くと、その威力が大きく減じるのか、という点である。本来、こうして細かくすることによって、火薬が火をつけにくくなるどころか、むしろ点火しやすくなるはずだ。なぜなら、細かい粉末の方が、粒の大きい火薬よりも、火がよりよく、より速く内部に浸透できるからである。したがって、砕くことは火薬の力を減らすどころか、かえって増すはずだ、という推論になるが、これは実際の経験と反する。ところが私たちの仮説によれば、この現象は明快かつ簡潔に説明できる。つまり、火薬を粉碎すると、その過程で多くの粒子が壊れ、粒子内に含まれていた圧縮空気が外に逃げてしまいます。したがって、砕いた火薬が同じような威力を示さないのは当然であり、私たちが前に示したとおり、その暴発的な力の主因である圧縮空気が、点火前に粉碎によって失われてしまうので、その作用が無効になってしまうのです。

§ X X I I I

私の原理では説明できないことが何も残っていないようにするために、化学者が「沈殿」と呼ぶ運動について、ここで少し述べておこう。ただし沈殿についての全ての理論をここに持ち込むつもりはない。この場にふさわしくないし、長くなりすぎるからである。沈殿は必ずしも発泡を先に伴うとは限らないが、ここでは先ほど述べた理由によりそのような場合は扱わず、発泡の後にたいいてい続いて起

こる沈殿だけを取り上げることにする。私は“たいてい”と言うのは、発泡が起こるすべての場合にではなく、少なくとも多くの場合には、化学者の言う土質物質のようなものが底に沈殿するからです。では、その沈殿物が何でありどこから来るのか（非常に澄んだ液体でもそれが起こるのを観察しますが）、またなぜいくつかの発泡では全く沈殿が生じないのか、これらの点は、私の仮説から、簡潔に、そして恐らく十分明瞭に示せるでしょう。これらをより分かりやすくするために、まず一つの実験を先に述べ、その比較によってこの問題を説明していきます。

まずほとんど水で満たされた容器 AB を用意する（表 I, 図 7 参照）。そして、最初は空気だけが入っているガラス瓶 C の口を栓で閉じ、そのまま容器の水に沈める。もしそのガラス瓶が水より軽くて浮き上がろうとする場合は、口を開けて外の水と同じ重さになるまで水を内部に入れる。その後、再び瓶の栓を閉じ、たとえば図の D の深さまで容器の水に沈める。こうしてガラス瓶は、空気と水で満たされた自重が同じ体積の水の重さと等しいため、どこに置いても平衡を保ち、上にも下にも動かず、その深さにとどまります。ところがもし外からの力でガラス瓶が壊れると、もはや静止は続かず、中にあった空気は水より軽いため気泡となって上に上がり、ガラス瓶の破片 E・F は水より重いので底に沈むのです。これらのことを注意深く考

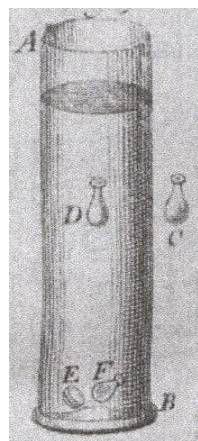


表 I, No. I, 図 7

えれば、発泡後に生じる沈殿の説明にどう役立つかがすぐにわかる。発泡後に底に見える土質物質とは、砕けたアルカリ粒子にほかならない。発泡前には、それらの粒子はまだ空気で満たされていて液体中を散らばって浮遊し、液体と比重が等しいため、上にも下にも行かないのだ。この液体に酸の粒子を多く含んだ別の液体を注ぐと、その酸がアルカリ粒子を壊し、ちょうどガラス瓶の例で起こったのと同じことが起こる。つまり、アルカリ粒子に含まれていた空気は軽さのために上昇し、アルカリ粒子の破片は重さのために底に沈む。これが化学者たちのいう「沈殿」である。発泡しても何の沈殿物も残さない場合も確かにあるが、それは発泡する液体が極めて純粋で、粒子が非常に微細なときにしか起こらない。そうした場合に沈殿が全く生じない理由はこうである。非常に小さいアルカリ粒子が酸によって壊されると内部の空気は膨張して上に上がるが、その破片は液体より比重が重くても、あまりに微細なので底に沈むことができないのである。このように粒子が極端に小さいと、各破片が持つ比重の超過の力が、摩擦や粒子同士の細かい突起による絡みつきの抵抗を打ち破るには小さすぎてしまう。同じ理由で、鉛の粒をキビの山にばらまいても、鉛の比重がキビよりはるかに大きいのに沈んでいかないのと同じである。粒子同士の接触面に働く付着力は、比重の超過による重力を打ち破るにはあまりにも大きい。だから極めて微細な空気の粒子は、水の中に単に接しているだけで留め置かれてしまうし、逆に非常に小さな水滴は空気中に散っていても落ちずに漂うことがある。これが、私たちが「空気が湿っている」と言う理由である。例えば水銀や他の金属は、腐食性の液体によって非常に微細に溶かされるため、液体よりずっと重くても完全に混ざり合い、金属の痕跡さえ見えなくなる。同様に、比重が完全に同じでなくても、二種類の液体が互いに混じり合うことがある。これらすべての原因は、先に私が述べた理由と同じであり、だからこそ、ある種の発泡のあとには底に何の沈殿物も沈まない。

§ XXIV

このように、私は自分の仮説に基づいて、発泡に続いて起こる沈殿の性質が何であり、何に基づくかを十分に説明できたと信じる。そしてもし他人の領域に口を出すことが許されるなら、ここでほとんど手間なく、発泡なしに二つの液体を混ぜるだけで起こるあの沈殿の原因も導き出せるだろう。なぜなら先ほどの実験を見ればすぐにわかるように、容器 AB の水の中に中性浮力で沈んでいるガラス瓶 D に、比

重がより軽い別の液体を注いで水と混ぜると、ガラス瓶 D は底の方へ運ばれていくが壊れはしないからである。その理由は、新しい液体を注ぐことで水の比重が軽くなるため、以前は水と同じ重さだったガラス瓶 D が、いまではその水より重くなってしまう。したがって水静力学の原理からも明らかなように、ガラス瓶は必然的に底へ沈むのである。同じように、比重の異なる二つの液体（その中から何かが沈殿するはずのもの）を混ぜ合わせると、もともと比重の大きい液体の中で、浮力で浮かんでいたやや大きめの小塊が、今や比重のバランスが崩れて底に沈むようになり、その結果、発泡が先に起こらなくても沈殿が生じるのである。

§ XXV

ここまで述べてきたのは、発泡や発酵に関して観察される主要な事柄である。その他のことは私の原理から自然に導かれるか、少なくとも長い議論を要しない。たとえば発泡や発酵の後によく起こる色の変化も難しい問題ではない。色の違いは主として粒子の配置や形の違いにあることがわかっているからだ。だから発泡を経た物体がしばしば別の色を帯びるのは不思議ではない。実際、発泡によって粒子の配置も形も変わることは上で述べたとおり明らかである。したがってこれ以上この件に長く立ち入ることはしない。確かに、この発泡やあの発酵に特有に起こる事柄など、まだ説明すべきことはいくらか残っている。しかしそれらは実際には一般的現象と本質的に異なるのではなく、むしろ他の条件に依存している。したがってそうした特殊な場合は、私の仮説に簡単に当てはまることは疑わないが、時間のある他の人に任せて、私はここでは触れずにおく。すべての特殊事例をここに盛り込もうとすれば、この論文の数ページどころか巨大な書物が必要になるからである。私としては、どんな特別な事例も私の一般原理を逃れるものではなく、少なくともその原理でそれなりに説明できるというところまで話をまとめられたことで十分である。だからここで筆を置く。全能の神が、これらのことがただただ御名の栄光に帰するようにしてくださいように。

付録

この論文をまだ締めくくりきらないうちに、末尾の数ページで簡単に述べた粒子の沈殿と分離の性質を熱心に眺めていたところ、偶然にも、ある種の液体の絶え間ない流れを用いて、昔からあらゆる時代の人々が渴望してきた「純粹に人工的な永久機関」を構築する方法が私にひらめいた。そこで本稿の結びとして、題材に関連があるので、その方法をここに学識ある諸氏の検討に供したい。誰もが知っていることだが、この永久機関は長いあいだ、著名な人々ですら熱心に追い求め、切望してきた。彼らが考え出さなかったものがあるのか、どれだけの費用を投じなかったことがあるのか、どれほど多くの装置を築かなかったことがあるのか？しかし、結局はすべてむなしく終わった。

すべては笑い、すべては塵、すべては結局無である。

この「永久運動」に対する盲目的な欲望は、今なお多くの人々を悩ませ、絶えず心をかき乱している。そしてそれが彼らの才覚をこれほどまでに駆り立てるために、学者たちの耳目にさえ、この問題について荒唐無稽な話が持ち出されるのを私たちは目にする。しかし今日では、ほとんどの学者がこうした話を退け、「永久運動なるものは存在せず、見いだすこともできない」と口をそろえて断言している。この見解は彼らの間であまりに強く行き渡ったため、ついには「そんなものを発見したと称する者はそもそも聞くに値しない」とまで軽々しく言うようになった。しかし、そうした人々の論拠は、私を納得させるには十分ではないのである。私はむしろ、永久運動は単に発明可能だけでなく、すでに完全に発明されている、と主張することを恥じはしない。これらの短い文を読めば、誰しもそれを認めるだろう。多くを語る必要があるだろうか？自然そのもの（常に力学法則に従って作用するとされる自然）が、永久運動が可能であることを示しているのではないか。例として一つだけ挙げるなら、川や水の絶え間ない流れは永久運動以外の何であろうか。あらゆることは機械的に行われているのではないか。ゆえに、力学の法則の限界を超えないものは不可能ではない、とあなたも認めるはずだ。では、なぜ私たちは、この件で自然が先に行っていることを、たとえ完全には無理としても、模倣できないはずがあるのでしょうか。さて話を締めくくるにあたり、人工的な永久運動が可能であることを成り立たせる方法を、私はあなたに示す。ただし、それを軽率に否定的に判断したり、無謀な巨大プロジェクトだと決めつけたりせず、まずは慎重に考察していただきたい。そしてもし望むなら、その真実をあなた自身で実験して確かめてください、と願う。

何よりもまず、以下のことが先に掲げられるべきである。

1. 比重の異なる二つの液体があり、その比重が $G:L$ の比であるとする、同じ底面積で同じ重量をもつ円柱形容器に入れた場合、それぞれの液柱の高さは逆比 $L:G$ になる。
2. 容器 AD の中に入っている液体の高さ AC が、両端の開いた管の中にある別の液体の高さ EF に対して、 $L:G$ になっているならば、そのように置かれた二つの液体は静止状態にある（表 I, 図 8 参照）。
3. もし $AC:EF$ が $L:G$ よりも大きい場合には、管の中の液体は上昇し、もし管が十分に長くなければ、液体は口 E からあふれ出てしまう。

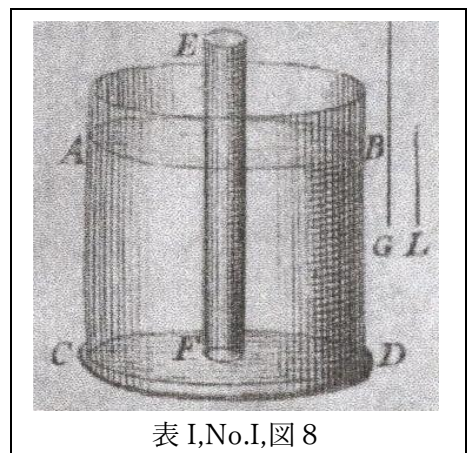


表 I, No. I, 図 8

（これは静水学によって証明される）

4. 比重の異なる二つの液体を用意することができ、それらは互いに混合し合う。

5. フィルター・濾過器・その他の分離装置を用意することもでき、これを使えば、重い液体に混じった軽い液体を再び分離することができる。

構成

これまで述べた前提に基づいて、私は次のように永久運動装置を構築する。まず、仮説 4 によって得られる、互いに混じり合う比重の異なる二種の液体を、任意の量取る。その比重の比（重い液体：軽い液体＝ $G:L$ ）をあらかじめ調べ、その後、それらを混合して容器 AD を A まで満たす。この操作が済んだら、まず両端が開いている管 EF を取り、その長さは AC に等しく、かつ $EF > 2L:(G+L)$ となるようにする。この管の下端 F の口は、軽い液体を重い液体から分けることのできるフィルター（または別の分離性のある物質、仮説 5 で想定したものが使える）で閉じ、もしくは覆っておく。こうして準備した管を、容器 CD の底まで液体の中に浸す。すると、軽い液体が管の下口 F から自然に上昇し、上口 E から下の液体中に流れ落ちるだろう。

証明

管の下口 F は（構成によって）軽い液体を重い液体から分離するフィルターで覆われているので、管を容器の底まで沈めると、重い液体に混じっている軽い液体だけがフィルターを通して管内に上昇しなければならない。しかも（仮説 2 によって）その上昇は、周囲の液体の表面よりもさらに高く、 $AC:EF = 2L:(G+L)$ となる高さにまで達するはずである。ところが（構成によって）実際には $AC:EF > 2L:(G+L)$ なので、（仮説 3 により）軽い液体は管の上口 E から外に排出され、下の容器に流れ込み、そこで再び重い液体と合わさり（仮説 4 により）再混合する。この混合液がふたたびフィルターを通して管内に上昇し、また上口から吐き出される……という循環が起こる。かくして、この流れは永久に続くことになる。

証明終わり。

系

このことから、海の深みから山の頂上にまで水が絶えず上り、そこから湧き出して川となって流れ、最終的には再び海に戻る、という自然の循環が、あたかも永続的に動く装置（自然の永久機関）のように見える理由が、うまく説明できる、と述べています。ところが、しばしば人々は「水が海から大地の孔を通じて高い所へ運ばれるのは、ちょうど細い管の中で液体が周囲の液面よりも高く上がる毛細管現象と同じ理屈である」と説明するのですが、この説では、なぜ高いところまで上がった水が地中から外にあふれ出るのかを説明できません。実際、細い管では、周囲の液体面より少し高くせり上がることはあっても、その管の口から外へ流れ落ちて下の液体に戻る、ということは起こりません。したがって、毛細管現象だけでは山の湧水や河川の発生を説明できない、という趣旨です。このように説明すると、よりわかりやすい。塩がたくさん溶けている水は、同じ条件の真水より重いことはよく知られている。海水は味からも明らかに、塩の粒子を多く含んでいるので、泉水や川の水よりも重い。したがって、地面は一種のフィルターの役割を果たしており、その微細な穴を通して塩分を残した真水だけが浸透できる、と考えられる。塩分は水の比重を増すからである。その結果、巨大な海の水圧のために、真水ははるかに高くまで地中を上昇し、山の最も高い頂上にまで押し上げられる。そしてそれ以上上がれなくなると、小川のように湧き出してくる。

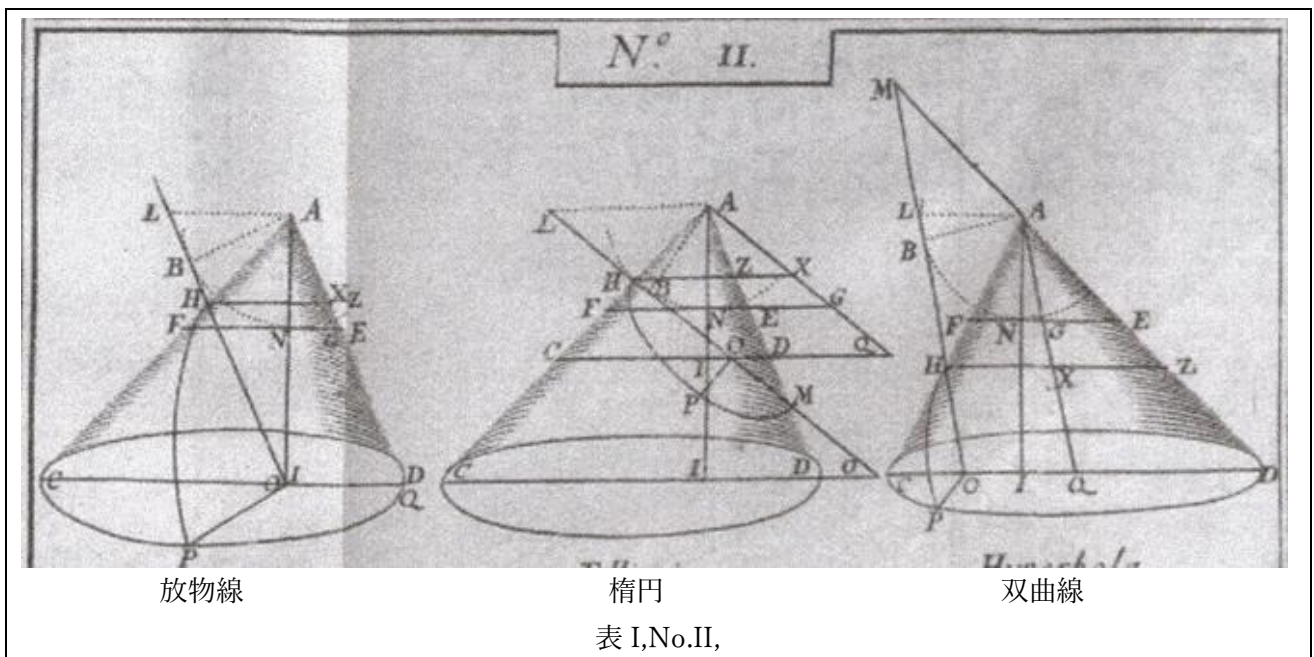
終わり

No. II

ヤコブ・ベルヌーイ氏（著者の兄弟）による、 円錐曲線の理論に関する新しい定理

古今の人々によってこれほどまでに扱い尽くされてきた題材にもかかわらず、なお彼らの努力を免れて残っているものがあるとは驚くべきことである。特に、これから述べるような、かくも一般的な性質がそうであるとはなおさらである。（学者たちの報告 1689 年 11 月号 P.586）

円錐の軸 ACD による断面三角形において、頂点 A から底辺に垂線 AI を下ろし、その AI から、同じ頂点 A から円錐断面の直径 HO に下ろした垂線 AB に等しい長さ AN を取る。点 N を通って底辺に平行な直線 FE を引き、これが軸断面三角形の両側を F および E で切るようにすると、FE はその円錐断面の準線となる。



私がこのことを兄弟に打ち明けたところ、彼はすぐさま自分の証明でそれを裏付けてくれた。その証明は私には十分見事に思われたので、ここに付け加えることにする。新しい定理については、このくらいのことは許していただけるだろう。

準線を R とし、AQ を直径 HQ に平行に引いて、それが FE を G で切るようにする。さらに AL と HZ を底辺 CD に平行に引く。AL は直径を延長したところで L に当たり、HZ は AD を Z で、AQ を X で切る。すると、次の三角形は相似になる： $\triangle AHX$ と $\triangle AFG$ 、 $\triangle AHZ$ と $\triangle AFE$ 、 $\triangle MHZ$ と $\triangle AGE$ 。さらに $HX = AG$ となる。なぜなら、 $HX = AL$ なのは四辺形 HXAL が平行四辺形だからであり、 $AL = AG$ なのは $\triangle ABL$ と $\triangle ANG$ が等しく相似だからである。（実際、 $\angle LAN$ は直角で $\angle BAG$ も直角だから、共通の $\angle BAN$ を除けば $\angle LAB = \angle NAG$ となり、さらに $\triangle ABL$ と $\triangle ANG$ の角はいずれも直角で、辺 $AB = AN$ なので相似が成り立つ。）したがって $HX = AG$ 導かれる。

1. 放物線の場合には、 $FG : HX = AG(HX) : AX$ である。したがって $HX^2 = FG \times AX$ となる。ところで

(a) $HA : R = HA \times AX$ 、 $HX^2(FG \times AX) = HA : FG$ となる。よって FG （または FE ） $= R$ である。

（証明終わり）

別法：

$AH : FG = AH : HX + HX : FG = AF : FG + HX(AG) : FG = AF \times AG : FG^2 = AH : R(a)$ 。したがって、 $FG = R$ 。

(証明終わり)

2. 双曲線・楕円の場合には、 $MH : FE = MH : HZ + HZ : FE = AG : GE + AX : AG(HX) = AG : GE + AG : GF = AG^2 : GE \times GF = MH : R(b)$ 。したがって、 $FE = R$ 。

(証明終わり)

(a) アポロニウスの円錐曲線論、第I巻、第XI節

(b) アポロニウスの円錐曲線論、第I巻、第XII節、第XIII節

No. III

ヤコブ・ベルヌーイ氏による螺旋放物線の寸法における微分計算の一試み、曲線の屈曲、展開線その他について

普通の放物線の軸が円BDMの周縁に沿って曲げられるとき、中心Aに収束するように、接弦CF, DGの端点を通して引かれる曲線BFGNAは、私たちの呼び方では螺旋放物線と呼ばれる。ここで、 $AB = r \cdots$ (円弧)、 $BC = x$ 、 $CF = y \cdots$ とし、CDは無限に小さい円周の微小部分とする。このときこれに相似かつ同心の小弧をGEとする。この曲線の性質は $lx = yy$ である。したがって

学術誌 Acta Eruditorum の
1691年1月号のP.13、表
II、第3図

$ldx = 2ydy$ となる。……………

私が弟にこれを話したところ、この分野に通じていた彼はすぐに、ほとんどあらゆる螺旋に対して、代数的方程式で表せる別の幾何学的曲線を、その面積が等しくなるように割り当てられることに気付いた。点Aを中心にAFとAGの距離で弧 $F\rho$ 、 $G\pi$ を描き、横座標方向に引く弦(縦線)の差が弧EGに等しいような曲線 $M\Psi$ を考える。 $\nu\kappa = \pi\rho = EF$ 、 $\nu\Psi = EG$ 、角 $\Psi\nu\kappa$ と FEG はいずれも直角であるため、 $\Psi\kappa = FG$ となり、曲線 $M\Psi$ の部分全体(面積)が、螺旋BGの対応部分全体に等しくなる。曲線 $M\Psi$ の性質を求めるための式を変形する。 $rdx - ydx : r$ (これは常に $EG = \nu\Psi$ を表す)に、われわれの曲線における dx の値($= 2ydy : l$)を代入する。すると $2ydy : l - 2yydy : rl$ となり、その積分は

$yy : l - \frac{2}{3}y^3 : rl$ となる。これが縦線 $\pi\Psi$ (ここで z とおく)の長さを表す。よって z と $yy : l - \frac{2}{3}y^3 : rl$ の

あいだに $3rlz + 2y^3 - 3yy = 0$ という関係式が得られる。これが座標(横軸に $M\pi$ の y 、縦軸に $\pi\Psi$ の z)における方程式である。一般的に螺旋的放物線では、その各段階は、この方法によって1段階高い放物面に変換できる。さらに私たちは次のことも観察した。曲線ANIGBがアルキメデス螺旋であり、頂点Aを中心に軸AKに沿って、円BDMの円周・直径・半径に対する第4比例項をパラメータとする普通の放物線 $A\mu$ を描くと、両曲線とそれらに囲まれる面積が等しくなる。直線AM上の任意の点 λ を取り、そこから放物線 $A\mu$ を μ で切る直線 $\lambda\mu$ を引き、さらに円BMの同心円弧 μN を引いて螺旋ANをNで切ると、常に螺旋ANのAからNまでの部分は放物線 $A\mu$ のAから μ までの部分に等しく、直線ANと螺旋ANによって囲まれる面積ANは放物線 $A\lambda\mu A$ の面積に等しい。放物線と螺旋のあいだにあるこの不思議な一致については、私たちは後にウォリスの著作で見いだした。ウォリスは、この発見をめ

ぐってホッブズとロベルヴァルが互いに論争したと伝えているが、あたかも、時や場所が違って、複数の人がそれぞれの才知で同じ発明に到達することがあり得ないかのようである。

No. IV

張力・曲線に関する問題の解法

バーゼル大学医学部学生ヨハン・ベルヌーイ氏

約一年ほど前、著名な兄と雑談しているとき、偶然、二つの固定点の間に自由に吊り下げられた縄（または鎖）が形作る曲線の性質について話題にのぼった。私たちは、人々の目や手に日々さらされている現象なの

学術誌 *Acta Eruditorum* の
1691 年 6 月号の P.274

に、これまで誰も注意を向けてこなかったことに驚いた。この問題はたいへん優れ、かつ有益なもののように見えた。しかしその難しさが予想されたので、その時は取り組もうとはしなかった。そこで、この問題を公に学者たちに提示して、誰かがその深みに挑む勇気を持つかどうか見てみることにした。そのときは、すでにガリレオの時代以来、この問題が幾何学者の間で論じられてきたことを知らなかったからである。（学術誌 *Acta Eruditorum* 1690 年 5 月号 P.219。二つの固定点の間に自由に吊り下げられた縄がどんな曲線を形づくるかを求めよ。ただし、その縄はどの部分でも自由に曲がる完全に柔軟な線であるものとする。）その間に、偉大な幾何学者ライプニッツ氏がこの難題に自ら挑む価値があると考え、まもなく自分の方法によって問題の入り口を開いたと知らせてきた（学術誌 *Acta Eruditorum* 1690 年 7 月号 P.360）。ただし、他の人にも期限を与え、その間に誰も解かなければ自分の解法を公表する、としていた。この知らせが私に勇気を与え、私は再び問題に取り組んだが、幸運にも短期間で、しかもライプニッツ氏が定めた期限の前に、望むことすらできなかった完全な解法を発見した。私は、この曲線が幾何学的な曲線ではなく、いわゆる機械的曲線に属することを発見した。その性質は代数方程式で決定づけることはできず、曲線と直線、あるいは曲線面積と直線面積の比といった関係によってしか表せないからである。したがって、この曲線を描くためには、他の曲線の長さ（＝長さの求積）や曲線面積の求積を仮定する必要があることが、以下の作図から分かる。

構成 I（表 II, No. IV, 図 1 参照）

CB, DE という二本の垂線を引き、A で交わらせる。CB 上の任意の点 C を中心にし、A を頂点として、等軸（等傾）双曲線 AH を描く。次に曲線 LKF を作るが、これは CA が BH と BK の幾何平均（中項比例）になるように定められたものである。さらに、長方形 CG を作り、その面積が領域 EABKF に等しくなるようにする。すると、IG と HB を延長したとき、その交点 M は、索線曲線 MAN 上にあることになる。

構成 II（表 II, No. IV, 図 2 参照）

軸 BA に沿って等辺双曲線 BG を描き、同じ軸に、双曲線の準線長（または横径）の 4 倍の準線長をもつ放物線 BH を描く。H から軸に下ろした垂線 HA を E まで延ばし、直線 GE が放物線の線分 BH に等しくなるようにする。そのように定まった点 E は、懸垂線 EBF の上にある。

これまで述べたことから、この曲線 EBF は、放物線の弧長を正確に求められないかぎり、代数的・幾何学的な方程式では表せないことがわかる。だが、この作図法と前の作図法の証明については、最初に発

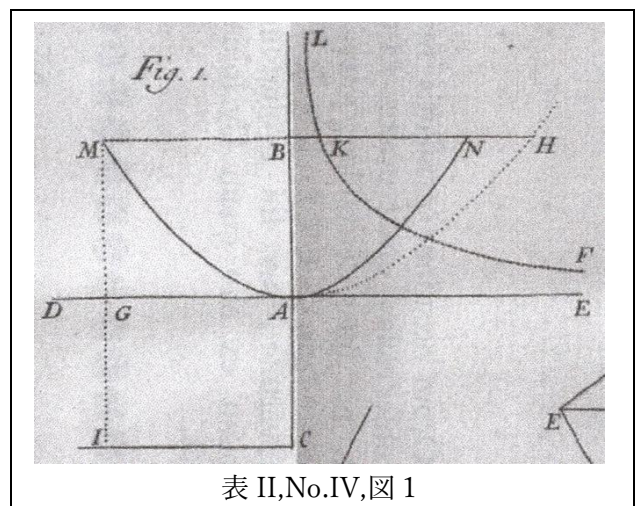


表 II, No. IV, 図 1

見した著名な人物の功績を奪ったり、その人に自分の成果を発表しない口実を与えたりしないために、ここではあえて省略する。ここではこの曲線のより顕著な性質だけを挙げることにとどめる。

1. 曲線に接線 FD を引くと、 $AF \times AD = BC : BF$ とい
2. 線分 AE または AF は、放物線 BH の弧長から直線 AG を差し引いたものに等しい。
3. 曲線 BE または BF は、直線 AG に等しい。懸垂曲線の各部分を軸に射影したものは等辺双曲線を作る。これはこの曲線の顕著な性質である。
4. 懸垂曲線の部分 BAE または BAF で囲まれた面積は、 $BA \times AF$ の長方形から $CB \times FG$ の長方形を引いたものに等しい。
5. 曲線 BE を作る曲線 MNO は、CB と AG に対する第 3 比例にある。
6. ところで、展開する直線 EO は、CB と CA に対して第 3 比例 ($EO^2 = CB \times CA$) である。
7. 曲線 MNO の始点まで取った直線 BM は、CB に等しい。
8. MP は BA の 2 倍である。
9. CB と PO で作る矩形は、双曲線領域 ABG の面積の 2 倍である。
10. 直線 CP は、点 A で二等分されている。
11. 曲線 EB と曲線 MNO との関係は、直線 CB と直線 AG との関係に等しい。($EB : MNO = CB : AG$)

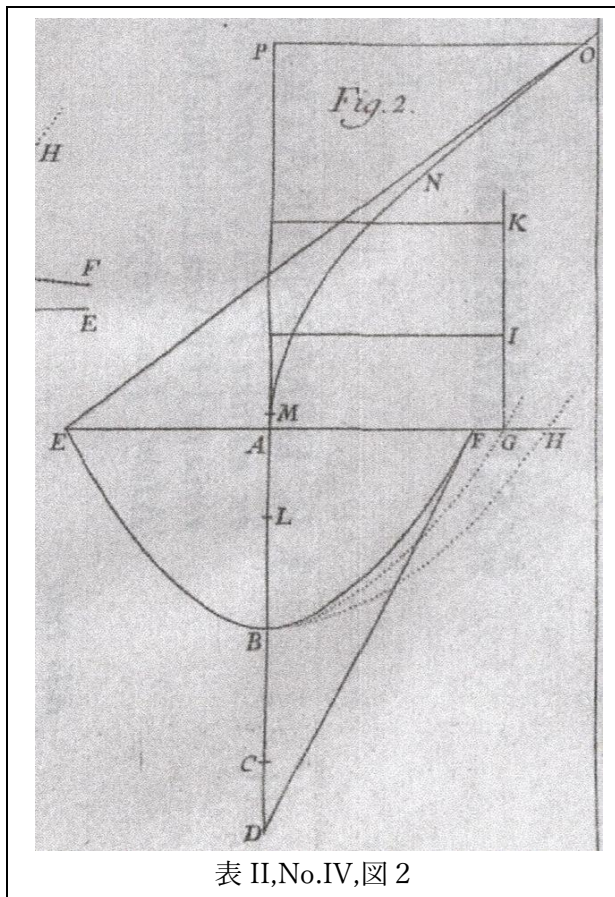


表 II, No. IV, 図 2

- 1 2. AG に沿って二つの矩形 AI と AK を取る。矩形 AI は、横半径 CB と直線 FG で決まる矩形に対応し、矩形 AK は双曲線領域 BGA に等しい。これら二つの矩形の幅の差 KI を、頂点 B からの軸上に BL と等しく取れば、点 L が懸垂線 EBF の重心となる。
- 1 3. EF 上に懸垂線 EBF と同じ形の曲線が無限に描かれ、それらが直線に延長され、それぞれの延長された点に EF 線からの距離に等しい直線を立てると、こうして出来るすべての面積の中で、懸垂線によって生成される面積が最大になる。

尊敬すべき兄は、この考察を太さが均一でないロープにも拡張しはじめた。その太さが長さに対して代数式で表せるような関係をもつ場合である。そして彼は、問題が単純な機械曲線で解ける一つの特別なケースを指摘している。(表 II, No. IV, 図 3 参照)、曲線図形 ABDEG において、その縦線 GE が横座標 AG の平方根に逆比例し、そのすべての縦線に沿って柔軟であると仮定する。言い換えれば、ロープ AG が、各点において縦線 GE、あるいはパラボラ AHI の縦線の差分、またはサイクロイド AHI の小片に相当する重みで荷重されていると考える。そしてそれが吊り下げられ、点 A が全体の最も低い点になるようにする (これは、A の側に同じ長さで同じ荷重分布の別のロープをつなげた場合に実現する)。次に (表 II, No. IV, 図 4 参照)、軸 AG に頂点 A をもつ等辺双曲線 ABC を作図し、縦線 BD を E まで延ばして、双曲線の半直軸または半横軸と線分 DE で作る長方形が領域 ADB に等しくなるようにせよ。すると、点 E

が、所求の曲線 AEF（例の荷重分布のロープが形づくるもの）の上にあることが示される。さらにこの曲線 AE は、双曲線の直軸（または横軸）とその縦線 DB に対する第 3 比例項になっている。

また、接線 EH は、半直軸・横座標 AD・縦線 DB に対して第 4 比例項 IH をとることで求められる。そして私は（注目すべきことに）、この曲線 AEF が、一定の太さのロープが作る別の曲線 BE を展開して得られる曲線そのものであることを見いだした。したがって AEF は、以前の曲線（表 II, No. IV, 図 2 参照）MNO と同じである。覚えておくべきことは、これらを実験で確かめようとするなら、ロープよりもむしろ鎖を選ぶべき点である。ロープは、軽すぎる 것과剛すぎる 것のために、この目的には不適當であることがわかった。さらに、このテーマをもっと完成・拡張したい人は、地球の中心から有限の距離にあるという仮定の下で、鎖がどんな曲線をとるか、あるいは自重によって伸びるとか他の仕方で荷重される場合にどんな曲線をとるかを調べることができるだろう。また逆に、鎖が放物線・双曲線・円弧その他どんな与えられた曲線にもなるように、どのように荷重を与えるべきかを研究することもできる。こうしたことはすべて工夫次第だからである。

詳しい解析的証明は第 3 巻および第 VII 節を参照

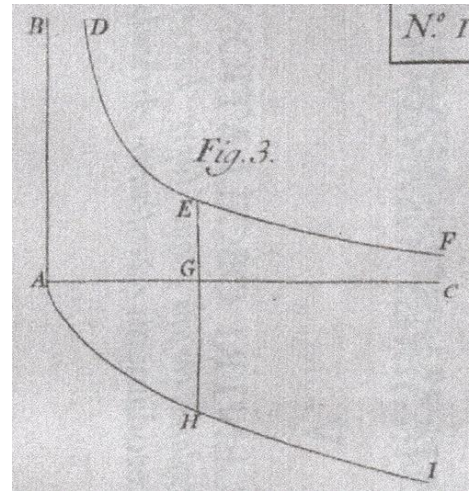


表 II, No. IV, 図 3

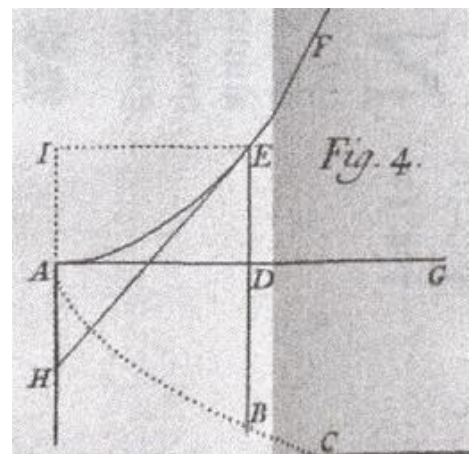


表 II, No. IV, 図 4

Eruditorum の 1690 年 2 月号の P.71 で率直に認めている。「円に関して言えば」と彼は述べている、近

ごろベルヌーイ氏（この方面の研究に卓越し、優れた業績で知られる人物）が、この反射光線によって形成される曲線が六次方程式の曲線に属することを観察した。だが私は、かつて計算によって、それが4次の曲線に過ぎないと結論していた。そこで、以前は必要な簡便法を身につけておらず、計算もずいぶん長々としていたが、今回あらためて計算し直したところ、そこに紛れ込んでいた誤りをすぐに発見した。

以上を前提として、この曲線の生成を次のように考える。表 III, No. VI, 図 2 で、前述の方法で反射した3本の光線 $AF \cdot BE \cdot CD$ があり、これらは点 $G \cdot H \cdot I$ で互いに交わっている。仮定によれば、それぞれの光線は求める曲線に接しているので、光線 BE の接点は HB 上にはありえない。なぜなら AF が曲線を横切ってしまうからである。また GE 上にもありえない。なぜなら DC が曲線を横切ってしまうからである。これらはいずれも仮定に反するので、接点は GH 上にあることになる。さて、点 A と C が点 B に近づくと仮定すると、それに応じて点 H と G も互いにより近づくことになり、その結果、接触点がより精密に限定される。したがって、もし A と C が B に一致するならば、 G と H も同じく一致し、こうして接触点は完全に決定される。 G と H の一致のところが交点である。この交点を「接点」と呼ぶことにしよう。なぜなら、この特定の例では、その交点を通してただ一本の線 EB を引くことができ、しかもその線が隣接する KB と等しくなるからである。これに対し、接点の手前または向こう側の他の任意の点 G や H を通しては、つねに二本の線 EB と DC 、あるいは EB と AF を引くことができ、その結果、 $KC=CD$ かつ $KB=BE$ 、あるいは $KA=AF$ かつ $KB=BE$ という関係が成り立つようになる。これまで反射線 EB における交点について述べたことは、同じく他のすべての反射線 FA 、 DC 等についても理解されるべきである。したがって、与えられた問題は次のことに帰着する。反射線の交点を作り出す曲線の性質を求めよ、ということである。

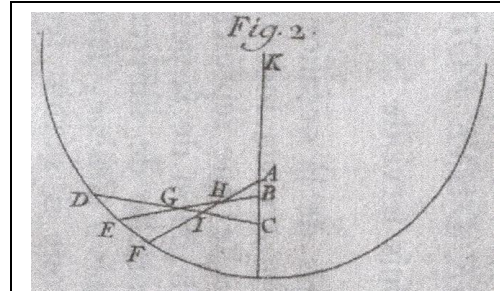


表 III, No. VI, 図 2

このこと交点の曲線を調べるために、デカルト流（座標法）のやり方で（表 III, No. VI, 図 3）、 $AB = x$ を BC に垂直に下ろし、 $BC = y$ 、 $AK = a$ と置く。したがって、 CD を求めなければならない。これを E まで延長すると $DE = AE$ となるものとする。そして結果として得られる方程式は、 C が交点であり、そこを通してただ一本の線 DE が引かれると仮定しているため、二重根をもつことになる。そこで $CD = z$ 、 $AE (=ED) = m$ と置くと、

$$CE = m - z, BE = \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)}, \text{ また}$$

$$AE = AB - BE = x - \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)} = m$$

となる。この式を整理すると

$$m = (xx - zz - yy) : (2x - 2z)$$

が得られる。さらに $\sqrt{(aa - xx)} = GB$ であるから

$$GC \times GH = DC \times CF = aa - xx - yy, \text{ したがって}$$

$$CF = (aa - xx - yy) : z : z, DF = (aa - xx - yy + zz) : z, EF = (aa - xx - yy + zz) : z - m \text{ となる。}$$

$$\text{よって } DE \times EF = KE \times EI = aa - mm = (aa - xx - yy + zz) : z - mm。$$

したがって $m = aaz : (aa - xx - yy + zz) = (xx - zz + yy) : 2x - 2z$ となり、これを整理すると

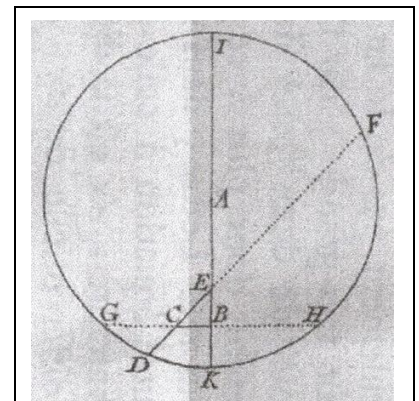


表 III, No. VI, 図 3

$$z^4 - 2xxzz - 2yyzz - aazz + 2aaxz + x^4 + 2xxyy + y^4 - aaxx - aayy = 0$$

という式が得られる。

このようにして得られた方程式は、二重根をもつので、二つの算術級数で因数分解することができる。

$$\begin{array}{rcl}
 -0, -1, -2, -3, -4, & & +4, +3, +2, +1, +0 \\
 z^4 - 2xxzz + 2aaxz + x^4 = 0 & & z^4 - 2xxzz + 2aaxz + x^4 \\
 -2yyzz & & +2xxyy \\
 -aazz & & +y^4 \\
 & & -aaxx \\
 & & -aayy
 \end{array}$$

その結果、二つの方程式(A)と(B)が得られる。

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(A)} \quad 4xxzz - 6aaxz - 4x^4 = 0 & & \text{(B)} \quad 4z^4 - 4xxzz + 2aaxz = 0 \\
 +4yyzz & & -8xxyy \\
 +2aazz & & -4y^4 \\
 & & -2aazz \\
 & & +4aaxx \\
 & & +4aayy
 \end{array}$$

(A)に z 、(B)に $\left(xx + yy + \frac{1}{2}aa\right) : z$ を掛ける。

$$\begin{array}{rcl}
 4xxz^3 - 6aaxzz - 4x^4z = 0 & \& & 4xxz^3 - 4x^4z + 2aax^3 = 0 \\
 +4yyz^3 & & -8xxyyz & +4yyz^3 & -8xxyyz + 2aaxy \\
 +2aaz^3 & & -4y^4z & +2aaz^3 & -4aaxxz + 4y^4x \\
 & & +4aaxxz & & -4y^4z \\
 & & +4aayyz & & -4aaxxz \\
 & & & & -4a^4z
 \end{array}$$

一方から他方を引き、残りを aa で割ったものが (C) になる

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(C)} \quad 6xzz - 8xxz + 2x^3 = 0 \\
 -8yyz + 2xyy \\
 -aaz + aax
 \end{array}$$

(A) に $3x$ 、(C) に $2xx + 2yy + aa$ を掛ける。

$$\begin{array}{rcl}
 12x^3zz - 18aaxxz - 12x^5 = 0 & \& & 12x^3zz - 16x^4z + 4x^5 = 0 \\
 +12xxyzz & & -24x^3yy & +12xxyzz & -32xxyyz + 8x^3yy \\
 +6aaxzz & & -12xy^4 & +6aaxzz & -16y^4z + 4aax^3 \\
 & & +12aax^3 & & -10aaxxz + 4y^4 \\
 & & +12aaxy & & -10aayyz + 4aaxy \\
 & & & & -a^4z & +a^4x
 \end{array}$$

差をとると、(D) になる。

$$(D) \quad 16x^4z - 16x^5 = 0$$

$$+32xxyyz - 32x^3yy$$

$$+16y^4z - 16xy^4$$

$$-8aaxxz + 8aax^3$$

$$+10aayyz + 8aaxy$$

$$+a^4z - a^4x$$

(C) に z を、(B) に $\frac{3}{2}x$ を掛ける。

$$6xz^3 - 8xxzz + 2x^3z = 0 \quad \& \quad 6xz^4 - 6x^3zz + 2aaxx = 0$$

$$-8yyzz + 2xyyz$$

$$-6xyyz$$

$$-aazz + aaxz$$

$$-2aaxz$$

差をとると、

$$8xxzz - 8x^3z + 3aaxx = 0$$

$$+8yyzz - 8xyyz$$

$$+aazz - 4aaxz$$

(A) の2倍からこれを引くと、

$$8xxzz - 12aaxz - 8x^4 = 0$$

$$8xxzz - 8x^3z + 3aaxx = 0$$

$$+8yyzz - 16xxyy$$

$$+8yyzz - 8xyyz$$

$$+4aazz - 8y^4$$

$$+aazz - 4aaxz$$

$$+8aaxx$$

$$+8aayy$$

残りは、

$$3aazz - 8aaxz - 8x^4 = 0$$

$$+8x^3z - 16xxyy$$

$$+8xyyz - 8y^4$$

$$+5aaxx$$

$$+8aayy$$

これに $2x$ を掛けて、(C) に aa を掛けて引くと、

$$6aaxzz - 16aaxxz - 16x^5 = 0$$

$$\& \quad 6aaxzz - 8aaxxz + 2aax^3 = 0$$

$$+8x^4z - 32x^3yy$$

$$-8aayyz + 2aaxy$$

$$+16xxyyz - 16xy^4$$

$$-a^4z + a^4x$$

$$+10aax^3$$

$$+16aaxy$$

残りは、

$$(E) \quad 8aaxxz + 16x^5 = 0$$

$$-16x^4z + 32x^3yy$$

$$-16xxyyz + 16xy^4$$

$$-8aayyz - 8aax^3$$

$$-a^4z - 14aaxy$$

$$+a^4x$$

(E) と (D) を加えて、 $2yy$ で割ると、

$$8xxz + 8yyz + aaz - 3aax = 0、したがって$$

$$z = 3aax : (8xx + 8yy + aa)$$

そして式 (E) により

$$z = \frac{16x^5 + 32x^3yy + 16xy^4 - 8aax^3 - 14aaxy + a^4x}{8aaxx - 16x^4 - 16xxyy - 8aayy - a^4}$$

比例式を交差法で掛け算し、式をゼロに整理すると次の式になる。

$$64x^6 - 48aax^4 + 12a^4xx - a^6 = 0$$

$$+192yyx^4 - 96aayyxx - 15a^4yy$$

$$+192y^4xx - 48aay^4$$

$$+64y^6$$

この式こそが、その曲線の性質を決定する正しい方程式であり、より低い次数に簡約することはできない。なぜなら、 $y = \frac{1}{2}a$ と置いたときに生じる式 $256x^6 - 27a^6 = 0$ が既約だからである。したがってこの曲線は、半円の弦の中点を通る既知の曲線とは異なる。曲線は 4 次方程式

$$16x^4 - 8aaxx + a^4$$

$$-8ayxx - 2a^3y = 0$$

$$+16yyxx + aayy$$

で表される。

同じような方法で、(表 III, No. VI, 図 4) の曲線 ABC の性質が求められる。この曲線は、曲線上の任意の点 B から引いた接線を両側に延ばすと、その接線が直角の二辺 FA と FC により切り取られる線分 ED が、あらかじめ与えられた一定値に等しくなるという性質をもつ。FG = x、GB = y、ED = a とおくと、この曲線の性質を表す方程式

$$x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6$$

$$+3yyx^4 + 21aayyx^2 + 3a^4yy$$

$$+3y^4x^2 - 3aay^4 = 0$$

$$+64y^6$$

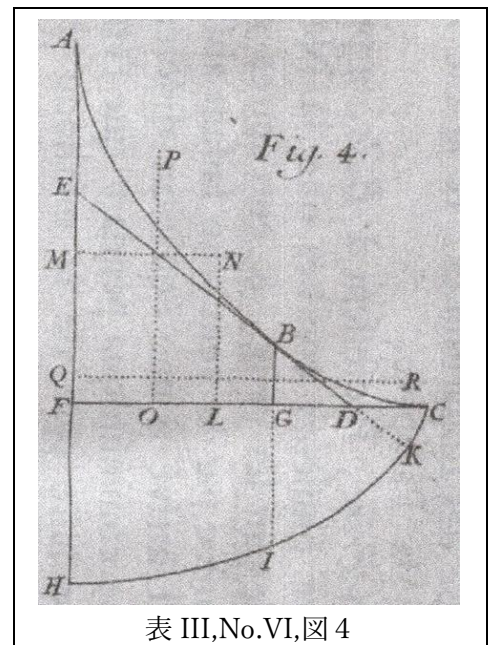


表 III, No. VI, 図 4

が得られる。さらに、曲線の部分 BC は $\frac{3}{2}$ BD に等しく、したがって曲線全体 ABC の長さは $\frac{3}{2}$ AF、 $\frac{3}{2}$ ED に等しい。

さらに、曲線 ABC を展開すると、曲線 CKIH が描かれるが、 $FG = x$ 、 $GI = z$ とおけば、その性質は次の式で表される。

$$\begin{aligned} 4x^6 - 12aax^4 + 12a^4xx - 4a^6 \\ + 12zzx^4 - 24aazzx^2 + 12a^4zz = 0 \\ + 12z^4xx - 15aaz^4 \\ + 4z^6 \end{aligned}$$

これらの曲線は特別な性質をもつ。曲線部分 BDC の曲線面積は、曲線部分 DKC の曲線面積に対して、常に 4 対 5 の比になる

$FL = FM = \frac{2}{5} AF$ ($= FC$) と取り、 FC および AF に平行な直線 MN 、 LN を引けば、その交点 N は曲線 ABC の重心となる。また $FO = \frac{2}{5} FG$ と取れば、曲線部分 AB の重心は OP に平行な直線上にある。
 $FQ = \frac{2}{5} GB$ と取れば、曲線部分 BC の重心は QR に平行な直線上にある。

なお、高名なる兄は、この方法が一般化でき、すべての展開曲線や焦線曲線、垂線や反射光線の交点によって形成される曲線の性質を決定するのに用いることができることに気付いた。実際、(表 III, No. VI, 図 5) のようにもし二本の直線 BD, CD が曲線 $A'CB$ に対する垂線、または入射線 LB, LC の反射線であり、共通の点 D で交わると仮定すれば、逆に与えられた点 D からそのような二本の線を引きことができ、それらは曲線 AB に垂直な線、または点 L に向かう放射線の反射線である。そこで、直線 AE と ED が未知であっても、しばらく既知・定まったもの、点 D が与えられたものと仮定し、そのうえで $DB \cdot BL \cdot BG \cdot AG$ などのうち扱いやすいものを z とおいてその長さを求めると、その z を表す方程式は、点 B と C が一致し、点 D が求める曲線上にある場合に、二つの等しい根をもつことになる。したがって、その方程式を既知の方法で処理し z を消去すれば、未知量 x と y 、 AE と ED の関係式が得られ、それが求める曲線の性質を示す。このことから、普通の幾何学も、うまく用いれば、かつては微分・不可分法のような深遠な幾何学を用いなければ解けないと信じられていた問題にまで適用できると結論している。ただし全般的には、そのような高度な幾何学には到底及ばない、とも述べている彼は特に次のことを注記しているパラボラの展開曲線は、最近自分が無限小法によって見いだしたものよりも、次のようにもっと簡単な計算で求められる。

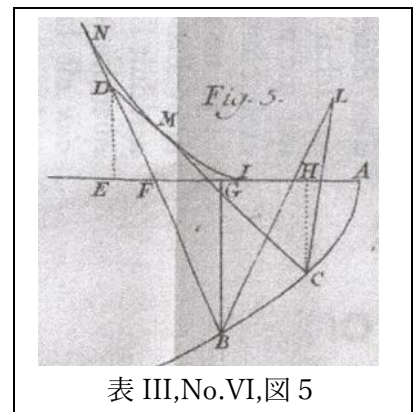


表 III, No. VI, 図 5

パラボラの 基準線長 = a $AI = \frac{1}{2}a$ $IE = x$ $ED = y$ $BG = z$	$AG = \frac{zz}{a}$ $GF = \frac{1}{2}a$ $EF = \frac{ay}{zz}$ となる。	$AI + IE = AG + GF + FE$ $\frac{1}{2}a + x = \frac{zz}{a} + \frac{1}{2}a + \frac{ay}{zz}$ $x = \frac{zz}{a} + \frac{ay}{zz}$

$$2z^3 - 2axz + aay = 0 \quad 2z^3 - 2axz + aay = 0$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$-4axz + 3aay = 0 \quad 6z^3 - 2axz = 0$$

$$z = 3ay : 4x \quad 3zz - ax = 0$$

$$zz = 9aayy : 16xx \quad zz = ax : 3$$

したがって、 $9aayy : 16xx = ax : 3$ 、 $27aayy = 16x^3$

№. VII

風によって膨らんだ帆が示す曲がり（曲率）の問題の解法 バーゼルの教授のベルヌーイ兄弟による

（学士院誌 Journal des Savants 1692 年 4 月 28 日号第 16 号）

（パリ版では P.189、アムステルダム版では P.280）

昨年ライプツィヒ版学術誌 Acta に載った「ぶら下がった鎖が形づくる曲線の性質」という問題の三つの解法を注意深く読んだ人は、この問題がこの世紀に解かれたものの中でもっとも興味深く、かつ有益なものの一つであることを簡単に認めるだろう。また、その難しさについても疑いようがない。なぜなら多くの幾何学者が長年この問題に取り組んできたにもかかわらず、これまで正当な解答を与えることができなかったからである。そこには非常に異なる作図法が見られるが、それらはいずれも同じ曲線を決定している。ユイゲンス（Huygens）は $\sin$ の計算法を使い、ライプニッツ（Leibniz）は対数曲線を使った。私はパラボラの弧の長さを利用した。

バーゼルの教授である私の兄は、そこから機会を得て、自然が私たちの目の前に日々示しているいくつかの曲線、とりわけ重さを無視して風でふくらんだ帆が描く曲線を研究した。そして彼は二階微分方程式に到達し、私がジュネーヴにいたときにその方程式を私に伝えてくれたが、彼がその際用いた方法については教えてくれなかった。同時に、彼は私に、その曲線の性質を表す式導き出し、少なくとも何らかの作図によってその曲線上の点を決定するようにと促した。しかし私は、それを満たそうとはしなかった。彼が私に示した方程式は、二種類の微分と積分が混ざり合った形で、とても難しいものに思われたからである。

そこで私はもうその問題のことは考えていなかったのだが、そのとき新たに一通の手紙を受け取った。その中で彼は、先の方程式を次の形にまで簡約したと書いてきた。 $adsddx = dy^3$ （ここで a は定数、 dx は横座標 x の微分、 ddx は dx の微分、 dy は縦座標 y の微分、 ds は彼が常に等しいものと仮定している曲線の微分）そして彼は、彼自身がこの式まで導いたその解法を、私が最後まで仕上げるよう

にと、再び促してきた。おそらく彼自身は、それ以上は絶望的だと思っていたのだろう。

そこで実際に試みてみたところ、彼がこの方程式に至った方法を見出したばかりでなく、さらに私はこの問題を完全に解決することができた。なぜなら、驚くべきことに、帆の曲線が鎖の曲線と同じものであることを発見したからである。

もしライプツィヒの学術誌 Acta Eruditorum 第 IV 章において、私がこの曲線に与えた作図を参照すれば、この方程式 $adsddx = dy^3$ がそれに適合することが簡単にわかるだろう。私は、この曲線を知るに至った解析的方法を示すつもりである。

その主要な性質はライプツィヒの学術誌 Acta Eruditorum に記載されているが、そこにさらに次の性質を付け加えることができる。これは力学において有用であり、私がかかなり後になって発見したものである。

てこ AE が C の方向に無限に延びているとし、点 A に重さ P を取り付ける。CB=CA とし、頂点を B、軸を BE、中心を C とする鎖の曲線 BFG を描く。このとき、てこ BE 上の任意の点 D から、重さ Q を吊り下げる。ただし Q は P と等しく、その方向は、鎖の曲線 BFG において F 点で接する平面 RS に沿うようにする。ここで F は垂線 DF が落ちる位置である。(この操作は、糸 DHQ を、F の真上の H に取り付けた滑車を通して簡単に行える。) 私はこう主張する。この配置では、重さ Q は重さ P と釣り合う。もし重さ Q が鎖の曲線 BFG 上を動くならば、その運動は曲線の各点の地平線に対する傾きが異なるために絶えず変化するが、その運動を軸上の対応点に適用すれば、常に重さ P と平衡を保つであろう。

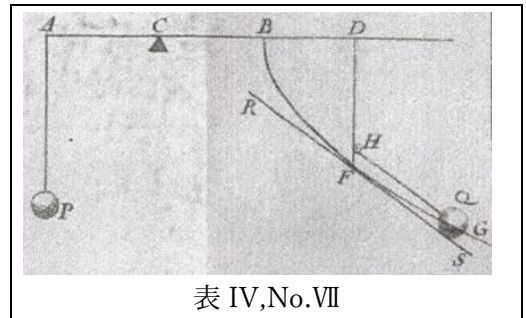


表 IV, No. VII

№. V I I I

ヨハン・ベルヌーイ氏、サイクロイド線に関する論文への補遺

これは、5月号の本誌 (Acta Eruditorum) P. 207 に掲載されたものに対する追加である

私はサイクロイドやその他の曲線についての最近の考察を Acta Eruditorum 編集部へ提出したばかりであったが、その翌日、兄からパリで手紙を受け取った。その中で彼は、この問題に関していくつ

学術誌 Acta Eruditorum の
1692 年 6 月号の P. 291

かのすぐれた発見を伝えてきた。ツィルンハウス (Tschirnhausianam) の焦線曲線とは別に、もう一つサイクロイドとなる曲線を発見したこと、また、通常のカイロイダス (Hugenianam) のサイクロイドが、その包絡線として焦線曲線を成すことを見出したこと、さらに、その性質が対数螺旋にも共通していることを観察したことなどである。これらを私は驚きをもって読まざるをえなかった。なぜなら、我々は互いに相手の研究を知らずに、それぞれ独立にこれらの曲線を考察していたからである。

No. IX 問題と解答

ド・ボーンがかつてデカルトに提起した問題の解法であり、その問題はデカルトの書簡集第3巻第79通に見られるものである。G***（ロピタルの匿名）による。

問題

ある任意の直線 N が与えられている。そして、角 CAI が 45° になるように、二本の無限に延びる直線 AC と AI を引く。求めるのは、曲線 ABB をどのように描けばよいかである。その曲線は次の性質を持つ：曲線上の任意の点 B から垂線 BC を下ろし、また接線 BT を引いたとき、 BC と CT の比が常に与えられた直線 N と BI の比に等しいような曲線である。

学術誌 Journal des Savans の 1692 年第 34 号 9 月 1 日付。パリ版では P.401、アムステルダム版では P.598

解答

正方形 AG を作る。その一辺 AH は、与えられた線分 N に等しい。点 A を通り、漸近線 $GD \cdot GH$ の間に、双曲線 ALL を描く。線分 DA を延長して AE をとる。 AE は AH に等しいようにする。長方形 EC を作り、その面積が「双曲線によって囲まれた領域 AKL 」に等しくなるようにする。直線 LK と FC を延長して交わる点を M とする。 IB を、 CM に等しくとる。その点 B が、求めるべき曲線上の点となる。

この曲線 ABB の性質が双曲線の求積に依存していることは明らかである。したがって、この曲線はデカルト博士の意味で機械的曲線である。ここに、いくつかその性質を述べよう。

1. この曲線の漸近線は、 AI に平行な DO 直線である。
2. AC を x 、 BE を y と名づけるなら、直線 AC , CB と曲線の部分 AB によって囲まれる領域 ABC の面積

$$= xy - \frac{1}{2}yy + nx.$$

3. 領域 ABC の重心から直線 AC までの距離 $= n + (3xyy - 2y^3) : (6xy - 3yy + 6nx)$ 、また AK までの距離 $= \frac{1}{2}n + (3xyy - 2y^3) : (6xy - 3yy + 6nx)$ 。したがって、この領域を、 AC や AK 、または BC の周りで回転させれば、回転体・半回転体などの体積を求めることができる。

4. これらの半回転体の重心を求めるのは簡単である。しかし、この曲線の弧の長さを求めるには、双曲線の求積を前提とした特別な工夫が必要である。そこで私はこの問題を幾何学者たちに提示し、これは確かに研究する価値のある課題であることを保証する。

ここでは証明を記さない。この種の問題を理解している人なら簡単に見つけられるだろうし、他の人に理解させるにはあまりにも長い説明が必要になるからである。

【注意】

この研究は、ロピタル侯爵とベルヌーイ氏の共同によって作られた。そのため、両者とも自分に帰する権利があると考えた。一方は、1693 年 2 月号の Histoire des Ouvrages des Savans（第 XI 記

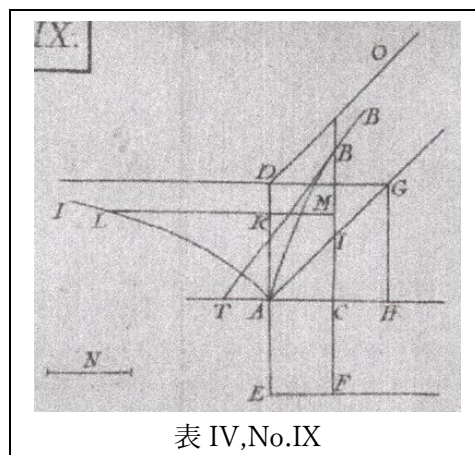


表 IV, No. IX

事,P.256) にヒュイゲンス宛の書簡の中で言及されている、もう一方は、後に続く No.XI の論文の中で言及されている。

No. X
ベルヌーイ医師の手紙からの抜粋

私は、最小の薄明の日を幾何学的に求めるという問題を解決した。これは、バーゼルの数学教授である私の兄と私とを、5年以上も悩ませてきて、それを成し遂げられなかった。この問題はいつそう興味深い。私の極大・極小法（もっとも簡便な方法の一つではあるが）を使っても、冗長で複雑な計算にとどまってしまうからである。ただ最後には小さな二次方程式に還元でき、それを私は次の単純な幾何学的比に変形した。（通常 18 度とされる）薄明

角の半分の弧に対する接線と半径との比が、極の高度の正弦と、求められる太陽の南中時の赤緯の正弦との比に等しい、というのである。太陽の赤緯が分かれば、それに対応する黄道上の位置も分かり、したがって一年のうちで最も短い薄明が起こる日も分かる。薄明を 18 度と仮定し、また観測地の緯度をパリの 48 度 51 分とすると、私が与えた規則によれば、太陽が南に 6 度 50 分の赤緯にあるとき、最短の薄明が生じる。さらにそのときの黄道上の位置を求めると、太陽は春分点または秋分点から 17 度 25 分離れた位置にあり、従ってパリでは、春分の 18 日前と秋分の 18 日後に最も短い薄明が起こることになる。

学術誌 Journal des Savans の 1693 年第 3 号、1 月 19 日付、パリ版 P.25、オランダ版 P.39

No. XI

デカルトにより提起され、ド・ボーンが与えた問題の解法
バーゼルのヨハン・ベルヌーイ氏によって示されたもの

デカルトの第 79 書簡第 3 巻を参照

この問題に対する私の最初の解法は、前年のフランスの学術誌
Journal des Sçavans 第 34 号に匿名で掲載されたものであるが（前掲の
第 9 番参照）、それもまた兄の解法（当時パリに滞在していた私に送っ

学術誌 Acta Eruditorum の
1693 年 5 月号 P.234

てきたもの）と同じく、双曲線の面積の求積を前提としていた。そのため、実際の作図は不可能になってしまう。しかしその後、私は現在の新しい解法を発見した。それは普通に対数を用いばごく簡単に遂行でき、より自然な方法として、従来の解法に比べてはるかに優れている。問題は次の通りである。曲線 AI を求めよ。その曲線において、縦座標 KI が、その接線の下接線 KM に対して、一定比を持つように与えられた直線 N が、縦座標の一部 IL に対するようにする。ただしこの部分 IL とは、曲線 AI と直線 AL の間に切り取られる部分である。ここで AL は、基軸 AK と直角（直角の半分 $= 90^\circ$ の角）をなす直線である。

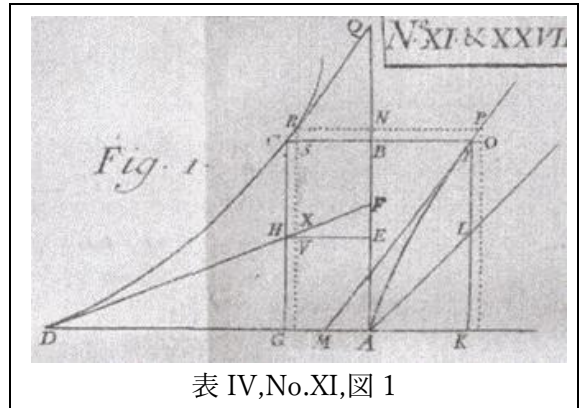


表 IV, No. XI, 図 1

解法は次の通りである。基軸 AK に垂直な漸近線 AB を基準とし、そこに普通に対数曲線 DC を描く。このとき、その下接線 AF を与えられた直線 N に等しくとる。次に、対数曲線上の任意の点 C から、基軸 AK に平行な線 CI と、基軸に垂直な線 CG を引く。この CG は対数曲線の接線 DF と交わり、その交点を H とする。そして CH と等しい長さの BI をとると、点 I は求めるべき曲線 AI の上にある。点 F を通り、直線 AL に平行に引かれた線は、曲線 AI の漸近線である。曲線 AIB によって囲まれる曲線部分の面積は、縦座標 KI の半平方 $\left(\frac{KI^2}{2}\right)$ から、与えられた線 N と横座標 AK で構成される

長方形の面積を引いたものに等しい。この曲線 AI は、その弧の長さを解析的に求めることはできないが、曲線自身の幾何的構成によって、その長さを実際に作図・決定することができる種類の曲線に属する。このような作図を高名なるホイヘンス (Huygens) が彼の新しい対数曲線において実現し、私自身も、以前に普通に対数曲線で同様のことを行なったのである。ところで、私は次のことを見出した。これまで述べた三つの曲線だけでなく、同じ性質をもつ無限に多くの他の曲線も存在し得る。それらの曲線の長さや曲線下の面積は、通常の方法では求めることができないが、それぞれの曲線自身の性質によって、直線や矩形の形に幾何的に構成し、決定することができるのである。

学者たちへの問題

曲線 ABC がどのようなものであるかを求めよ。その曲線は次の性質をもつ。任意の点においてその点での接線 BD を引き、これが軸 AE によって区切られるとき、その軸上の切片 AD と接線 BD の長さが、常に一定の比 M:N にある。

この問題は、解くに値する課題であり、数学者たちの関心を引くに十分なものである。どのような比 $M:N$ であっても、曲線 ABC は常に同じ簡単さで、ある連続的運動によって描くことができるからである。ただし、比 $M:N$ に応じて曲線の形はより複雑にも単純にもなる。特に M と N が等しい場合 ($M=N$) には、すぐに曲線 ABC が円であることがわかる。それ以外の比で、もし $M:N$ が有理比であれば、その曲線は幾何学的曲線である。しかし、もし $M:N$ が無理比であれば、その曲線は超越曲線となる。したがって求むべきは、この曲線上の任意の点の一般的な決定式である。

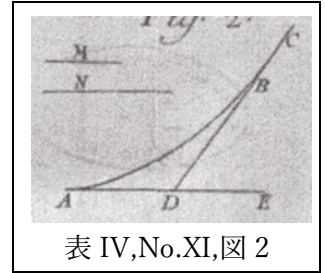


表 IV, No. XI, 図 2

No. X I I 幾何学者の皆様へ告ぐ

パリのシャトレの公証人ル・ノルマン氏のもとに、60ピストル金貨の賞金が預けられている。この賞金は、次に示す問題を最初に解く人に与えられるものである。

学術誌 Journal des Savans の 1693
年第 28 号 7 月 20 日付、パリ版
P.336、オランダ版 P.498

幾何学的曲線の、望むだけ小さな一部分が与えられているとき、その部分と、できるかぎり単純な位置をもつもう一つの曲線とを用いて、与えられた等式を解く方法を求めよ。

この賞題の解法は、翌年 1 月 1 日までに公表されなければならない、しかもロール特有の規則を用いてはならない。

デカルトはこの問題を三つの円錐曲線のうち一つについて提起したが、方程式の解法に関して、これほど見事な問題はかつてなかった。しかもこの解法は、数学全体を完成させるために不可欠である。したがって、ロール氏がすでに公表したものと異なる方法が存在するかどうかを確かめることが重要である。

No. X I I I 学者誌 Journal des Savans の 1693 年第 28 号に掲載された問題の 解答 医師ベルヌーイ氏によるもの

問題

(学者誌 Journal des Savans の 1693 年第 34 号 8 月 31 日発行、パリ版 P.405、オランダ版 P.630)

ある幾何学的曲線の、いくらでも小さい部分が与えられているとき、その曲線に関する与えられた等式を、できるかぎり単純な性質をもつ別の曲線を用いて解く方法を求めよ。

解答

ここで私が「相似な方程式」と呼ぶのは、同じ次数をもち、同じ数の項が同じ順序で並び、同じ符号が付いている方程式であり、さらに、既知の量（定数）が同じ順序に配列され、互いに同じ比を保って

いるものである。たとえば、次の二つの方程式

$$x^4 + aaxx - abbx - c^4 = 0$$

$$x^4 + ddzz - dffz - g^4 = 0$$

が相似な方程式と呼ばれる。なぜなら、後者は前者と同じ数の項を、同じ順序・同じ符号で持っており、また既知の量 d, f, g が、 a, b, c と同じ比 $a:b = d:f$ & $b:c = f:g$ などの関係にあるからである。

相似な方程式の解は、(証明は簡単だが) それぞれの方程式の既知の係数が並ぶ順序と同じ比を保っていると仮定する。たとえば $x:z = a:d = b:f = c:g$ などの関係が成り立つということである。

さらに、どんな方程式でも、それと相似な形をした別の方程式に変換でき、その新しい方程式の根は、もとの方程式の根と一定の比例関係をもつ、と仮定する。

さて、次の3次方程式 $x^3 + aax - b^3 = 0$ の根 x を求めたい。このとき、頂点を A、パラメータを線分 AD とし、縦座標を BE, CG とする放物線の与えられた部分 CB を用いて、根を幾何的に求めることとする。Schooten (スコーテン) の規則に従って、根が含まれる範囲を求めると、この例では、 $x > b^3 : (aa + bb)$, $x < b$ となる。この条件を前提として、考えるいくつかの異なる場合を、以下でそれぞれ説明する。

第1の場合、それは、根の限界値(上限と下限)が等しいか、あるいは与えられた縦線 BE, CG のあいだにある場合である。デカルトの方法にならって、次のように置く：

$$DA = l, AH = p, HI = q, IL = r, LF = x$$

すると一つの方程式が得られる。これを与えられた方程式と比較すると、既知の量 p, q, r の値が求まる。その値によって、中心 I、半径 IL の円を描けば、その円は放物線と一点 L で交わり、その点 L は、放物線の与えられた部分 (B と C のあいだ) に位置する。これは明らかである。なぜなら、この場合、根 LF が BE より大きく、CG より小さいと仮定しているからである。

第2の場合、根の限界(上限・下限)が、与えられた縦線 BE, CG の間に含まれないときは、与えられた方程式 $x^3 + aax - b^3 = 0$ を、次のような相似な方程式に変換する。 $z^3 + ccz - f^3 = 0$ 。ここで、その新しい方程式の下限(根の下の境界値)が $f^3 : (cc + ff)$ となり、それがちょうど BE に等しくなるようにする。このことは、次の比例関係を用いれば実現できる：

$$\frac{b^3}{aa + bb} : BE = a : c = b : f。$$

もし、変換した方程式の上限値 f が、放物線の縦線 CG に等しいか、あるいはそれ以下であれば、その方程式の根 LF は、第1の場合の方法で求めることができる。そして、比例式 $c : a = LF$ (または z) : x を作れば、その第4比例項 x^3 が、もとの方程式の根となる。

第3、かつ最後の場合、変換された方程式の上限 f が、放物線の縦線 CG よりも大きいとする。幾何級数 g, h, i, k などを作る。そのうち、最初の2項 g, h 他の項を求めるために用いる二つの初項に、それぞれ BE, CG に取る。そしてその級数の最後の項 f を、等しいか、またはそれより大きくなるように設定する。すると明らかなことに、方程式の根 z は、そのうちのいずれかの隣接する2項の間、 h と i の

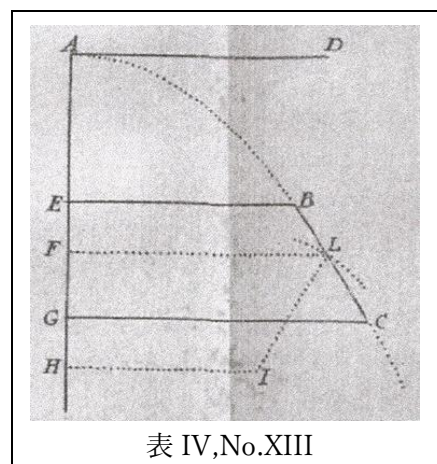


表 IV, No. XIII

間、または i と k の間などに挟まれていることになる。さて、その根を見つけるために、すでに変換された方程式 $z^3 * + \dots = 0$ をさらに別の同様な形に変換する。同型の次のような二つの方程式に変換する：
 $s^3 * + mms - n^3 = 0$ と $y^3 * + eey - d^3 = 0$ これらの間に、次のような比の関係が成り立つようにする：
 $b : g = c : m = f : n$ および $i : g = d : e = f : d$ 。したがって次が帰結する：第2の変換方程式
 $s^3 * + \dots = 0$ の根 s は、第1の方程式の根 z が h と i の間にあるとき、 g と h の間にある。また第3の方程式 $y^3 * + \dots = 0$ の根 y は、第1の方程式の根 z が i と k の間にあるとき、 g と h の間にある。したがって、もしそれぞれの方程式の根を個別に求めようとするならば、そのうちの少なくとも一つは必ず BE と CG の間に入ることになる。たとえば、それが第2の方程式 $s^3 * + \dots = 0$ の根 s 、LF であるとしよう。すると、比例式 $m : a = s : x$ を作ることによって、求めている根 x をすぐに見つけることができる。これが求めるところであった。

この方法は、あらゆる種類の方程式に対して一般的に適用できる。たとえば、もし十二次方程式の根を、与えられた3次元曲線の一部によって求めようとするならば、4次元の曲線を用いなければならない。そして、与えられた方程式の根の限界（根の存在範囲）を見つけた後に、同様の方程式を作り、先ほど円（または円周の場合）について行ったのと同じ方法で、その4次元曲線の位置と種類を求めることになる。

とはいえ、もしこの中に多少の困難や不明な点があったとしても、それを解明し、公正な判断を下す人々を十分に納得させる用意がある。

No. XIV

医師ベルヌーイ氏に宛てた返答。

先の 8 月 3 日号の学術誌に、同氏の名で発表されたある方法に関するもの。

本年（1693 年）7 月 20 日号の学術誌 Journal des Savans に出された問題は、ロール（M. Rolle）の方法を用いれば簡単に解けるものであった。しかし、幾人かの人々の希望に応じて、この著者（ロール）の著作を使わずにこの問題を解くことができる者には、60 ピストル（賞金）を与えることが約束された。医師ベルヌーイ氏（Johann Bernoulli）

学術誌 Journal des Savans
の 1693 年第 36 号（9 月 14
日号）、パリ版 P.425、オラ
ンダ版 P.660。

は、その解答を 8 月 31 日号に発表し、それが一般的方法であると述べたうえで、そこに見出されうるあらゆる疑問を明らかにし、公正な審査員たちを十分に納得させる用意があると表明した。ベルヌーイ氏の試みが成功していたならば、実に望ましいことであっただろう。そうであれば、われわれは非常に重要な数学上の発見を、きわめてわずかな賞金で手に入れることができたはずだ。しかし彼の解法にはいくつかの難点が見受けられ、それらは彼自身がそれらを明確にしてくれさえすれば、その誤りを見抜く上で大いに役立つであろう。

成功するためには、ベルヌーイ氏には、あらゆる次数の方程式を幾何学的に解くことができる十分な方法が必要であった。ところが、彼が引用している方法は、3 次方程式にしか適用できず、そのために作られたものである。それにもかかわらず、彼はこの特定の方法を一般的方法であるかのように結論づけている。彼は言う、「円の場合に行ったのと同じやり方で、求める曲線の位置と種類を見つけられればよい」と。だが実際には、このやり方がすべての次数の場合にも同じでなければ、提示された問題を解くことはできないだろう。しかし、ベルヌーイ氏によれば、この 3 次方程式の規則はデカルトのものであるという。その場合、この偉大な発明者デカルトの見解は、この問題において非常に重みをもつものであろう。さて、彼自身がこのことをどう考えていたかは、彼の書簡集第 3 巻の 449 ページに明らかに記されている。彼は自らの六次方程式の規則について次のように述べている「私はあえて言おう。それ（六次方程式の規則）は、幾何学でこれまでに発明されたものの中で、最も美しく、比類なく最も困難なものである。そしておそらく今後数世紀にわたっても、私自身がさらに他の方法を探そうとしないかぎり、それに並ぶものは現れないであろう。」

このことはいっそう重要である。なぜなら、デカルトがここで自分の見解を書いたのは、同じ主題に取り組んでいた彼の数学上のライバルたちにそれを伝えるためにほかならなかったからである。そして、彼が言う困難とは、曲線の位置と種類を決定する方法にあると述べているにすぎない。したがって、彼が自らの 3 次方程式の規則があらゆる次数に通用するとは、まったく考えていなかったことが明らかである。さらに、ベルヌーイ氏の見解は、彼がその規則を借用したデカルトによって批判されるばかりでなく、経験的事実にも、もっとも優れた幾何学者たちの見解にも反している。したがって、彼がこの難点を明らかにしてくれることが望まれる。そのための手がかりとして、彼はデカルト書簡集の第 3 巻 P.116 を参照することもできよう。そうすれば、おそらく彼は気づくであろう、ロールが導入した補助方程式が、曲線の位置と種類を決定するために不可欠であることに。彼は、別の種類の補助量の使い方をも見ることができるだろう。（学術誌 Journal des Savans の 1693 年第 27 号 7 月 13 日版、パリ版では P.321、オランダ版では P.476、その接線を用いて幾何学的曲線を作る方法、レミ・ロッヘル

（Rémi Lochell）の書簡から抜粋されたもの）同じ巻の 412 ページを、逆接線に関する論文と比較すれ

ばわかる。その方法では、未定の次数がこれらの補助量の未知数となり、したがって根のあらゆる変化に対応できるようになるのである。しかし、主題から外れずに確固たる説明を与えるためには、彼は自らの方法の第2の例として取り上げた12次方程式の等式に対応する曲線の種類と位置を見つけるだけで十分である。そして、彼がその詳細を明らかにすれば、たとえ彼が、3次方程式の規則の代わりに補助量を用い、後でそれらから一種の一般規則を導いたうえでそれらを削除したとしても、どのように理解すべきかが明らかになるであろう。彼が、これまでに提示された難点について必要な説明を与え終えたなら、その解法に関して、さらに別の問題を提起することを彼は許すだろう。それらの問題もまた、少なからず重要であり、かつ簡単に明らかにできるものではない。しかし、ここで一つ指摘しておくことが有益と思われた。もしロールの方法を用いることが許されていたなら、提起された問題を解くには次のような途が十分であったであろう。未知数を z とし、 c および $c+d$ をその仮定とし、 a および $a+b$ を与えられた曲線の二つの縦座標とする。すると次の関係式が得られる。 $bz = dx + cb - da$ 。そして、この準備をしておけば、ロールの方法によって一般的にこの問題を解くことができる。与えられた曲線を分割し、それぞれの部分ごとに方法を適用することもできる。それによって何らかの利点を得たり、ある不都合を避けたりする場合にはそうしてよい。しかし、さらに別の方法も提示されるだろう。その方法では、曲線を分割する必要は一切なく、求めたい根を一つずつ個別にでも、複数まとめてでも求めることができ、しかも既約式の選び方について煩わされることもない。

№. XV

ベルヌーイ氏（医師）の回答

学術誌 Journal des Savans の前月8月号に掲載された彼の方法に対して、
9月14日号に掲載された反論に答えるもの。

この問題を解く方法を思いついたのは、7月20日号の学術誌にこの問題が掲載されてからのことではありません。それよりずっと以前に、ヨーロッパでも一流の数学者たちに劣らぬ高名な人物から、ほとんど同じ言葉でこの問題を出題され、その際にここで退けられている解法をたいへん高く評価していただいたのです。実際、この解法はあまりにも明

学術誌 Journal des Savans
の1694年第4号、1月18
日発行、パリ版P.32、オラ
ンダ版P.45

らかに正しいので、それに少しでも難点を見いだそうとする者は、すでに反対陣営であり、いかなることがあっても降参するまいと心に決めているに違いありません。いずれにせよ、私にはあらかじめわかっています。私の論敵は、この問題をできるだけ長引かせようとしているのです。彼らは、最初の疑問に答えたらさらに新しい難題を出すつもりだ、と言っているからです。しかし、なぜ彼らは異論や難点を一度にすべて挙げなかったのか？おそらく、自分の逃げ道を残しておくためだったのだろう。そうした予備の難癖を蓄えておくのは、彼にとってたやすいことだった。なぜなら、この種の問題はあまりにも一般的で、どんなに優れた解法であっても、あらゆる言いがかりを完全に防げるほど厳密に提示することは不可能だからである。したがって、私は本来なら、この反論に答えずに済ませてもよいのです。そんなことはまったく無益なことだからです。しかし、もし私の方法を十分に検討していない人々が、相手の異議に何かもっともらしい根拠があると信じてしまうとイケないので、念のため、ここでその反論に答えることにします。しかし私は、これをもって最後の発言といたします。この問題の判断は、知性があり利害にとらわれない方々にお任せし、とりわけパリ王立科学アカデミーの諸先生方のご判断に

委ねたいと思います。

私に対して向けられる主な異議はこうです。私の方法が成功するためには、あらゆる次数の方程式を幾何学的に解くのに十分な一般的な方法が必要である、しかし私が引用した方法は、3次の場合のみに適用されるものであり、それ以上の次数には不十分だ、というのです。私はそれを認めます。確かにそのような一般的な方法を必要としていますし、私が引用したものが3次の場合に対して作られたものであることも承知しています。しかし、それが他のすべての場合に適用できないという結論になるのでしょうか？たしかに、3次を超える等式においては、応用が非常に面倒になるのは事実です。しかし、困難であるということは、不可能を意味するわけではありません。

デカルトの権威は、私に対して何の反証にもなりません。なぜなら、彼が引用箇所で述べていることは、六次方程式に対する彼自身の規則が実際には非常に扱いにくい、という意味にすぎず、そのうえ、それ以外の方法を見つけられるのは自分だけだと言っているだけだからです。そのうえ、デカルトは過ちを犯す人ではありません。もし彼が今も生きていたなら、自らがかつて主張した多くの点を撤回したであろうことを、私は少しも疑いません。そもそも、スリューズの根を構成する方法は、デカルトのものよりもはるかに簡単で、自然ではありませんか？それに、デカルト自身も、曲線の接線を求める彼の方法をどれほど高く評価したことでしょう！そして、その方法を一般的な形で理解したいというどれほど強い願望を示していたことでしょう！彼が自著『幾何学』の48ページでどのように語っているかをご覧下さい。「私はあえて言う。この問題は、幾何学において最も有用で最も一般的な問題であり、私がこれまで知っている中で、あるいはこれまで知りたいと願った中でも、最も重要なものである。」

しかし、彼の方法は幾何学的曲線にしか適用できず、しかも非常に煩雑です。ところが今日では、新しい計算法が発見されたおかげで、接線を求めることなど子供の遊びのように簡単になりました。しかもそれは、幾何学的曲線ばかりでなく、彼が機械的曲線と呼んだものにも同様に適用できるのです。さらにいえば、最大値や最小値を求めることなど、ほんのわずかな計算でできてしまいます。それこそが、彼と彼の同時代の人とのあいだで最も大きな話題を呼んだ問題だったというのに、です。

私の見解が経験や幾何学者たちの見解に反しているなどということはまったくない。むしろ、経験と幾何学者たちの意見の双方によって、私の見解は支持されているのである。そのことは、1688年6月号のライプツィヒ学報 (Acta Eruditorum) を見ればわかるだろう。そこでは、私の兄が、二つの曲線を用いることで、9次方程式を何の困難もなく解いているのである。

念のため、見落としがないようにするために、デカルト書簡集の第3巻 P.116 と P.412 を読んでみた。しかしそこには、ロールのいう補助的等式が何であるのかも、それがどのようにして曲線の位置や種類を求めるのに役立つのかも、まったく見当たらない。私がロールの著作として見たものといえば、ラーニーに反論した小論文だけであり、その中にもこの件に関係しそうなものは何もなかった。

しかし、主題からの逸脱せずに確かな説明を与えるためには、私はただ12次の等式に対して、それに対応する曲線の種類と位置を見つけられればよい。よろしい、そうしよう。だが、そのかわり、そこで話を打ち切り、この問題に関する議論をそれで終わりにすることを約束してほしい。では、一般的な12次の方程式 $y^{12} - lly^{10} - m^3y^9 - n^4y^8 + etc. = 0$ を考えよう。この方程式を二つの曲線を用いて解こうとするならば、その曲線の種類と位置を見つけなければならない。そこで私は、スリュース流のやり方に従って、 $aax = y^3$ と仮定する。そして、与えられた方程式中の d^3y^3 の代わりに、その値 aax を代入する。すると次のような方程式が得られる。 $a^8x^4 - a^6llyx^3 - a^6m^3x^3 - a^4n^4yycc + etc. = 0$ 。この方程式

は、二つの未知数 x と y を含むものとして考えることができる。したがって、これは一つの曲線の性質を定める等式として見ることができる。これで、求めている二つの曲線の種類はすでに明らかである。その一つ $aax = y^3$ は第一種の3次放物線であり、もう一つは4次曲線である。それらの位置関係については、特に考慮を要しない。両曲線の頂点と軸を共通にして配置すればよいだけである。このとき、両曲線の交点を通る縦座標が、与えられた等式の根を与えることになる。

No. XVI

幾何学上のある問題に関して、学術誌 Journal des Sçavans の 1694 年第 3 号に、ベルヌーイ氏の名で掲載された返答についての注釈

ベルヌーイ氏がその返答の中で私に求めている沈黙に応じなくてよい立場であればどんなに良いかと思う。しかし彼の返答はすでに公に発表されており、またその主張があまりに強いものであるため、私は誤りを容認していると疑われないように、自分の見解を述べざるを得ない。

彼は、7月20日号の Journal に賞金 60 ピストル付きで出題された問題を、8月31日号の Journal の中で解決したと主張している。しかし私はこう主張する。彼が示した解法と、真にその問題を解くために示すべきであった解法との間には、3次方程式と無限次方程式ほどの隔たりがある、と。

学術誌 Journal des Savans の 1694 年第 7 号、2 月 15 日発行、パリ版 P.77、オランダ版 P.172。

しかしベルヌーイ氏は、自分の返答のあちこちで、自らの解法について、あたかもそれに異議を唱えることが大きな誤りであるかのように語り、そして、その解法はあまりにも明らかに正しいので、わずかでも難点を見つけようとする者は、最初から意地になって決して屈しないつもりでいなければならない、と言っている。ところが彼自身、すべての次数の等式を幾何学的に解くのに十分な方法を持つ必要があると認めており、しかも彼が引用した方法は3次の場合にしか通用しないことも認めている。さらに、確かにこの3次の方法を3次を超える等式に適用するのは非常に骨が折れると述べているが、それでも困難であることが不可能であることを意味するわけではない、とも言っている。

しかし、ベルヌーイ氏の解法が、彼自身の言うように正しくかつ一般的なものであると認められるためには、それが出題された問題の条件を完全に満たしていなければならない。そのためには、彼が引用した方法を単に適用できるというだけでは不十分であり、その適用を統制するための別の方法、あるいはその二つに匹敵する別の方法を新たに与えなければならない。どのような形であれ、その方法はすべての次数の方程式を包含し、しかも同じ主題についてすでにロールが提示した方法とは異なるものでなければならない。

これはまた、その問題に含まれる条件の一つである。幾何学的に任意の等式を解くために用いられる二つの曲線のうち、一方は与えられたものでなければならず、もう一方は可能なかぎり単純な次数の曲線でなければならない。したがって、ベルヌーイ氏が自分の解法をしっかりと説明しようとしてスリューズの方法に頼ったのは無駄な骨折りであった。その方法は、曲線を自由に選び、都合のよい位置に置くことが許される場合にしか成り立たないからである。さらに、彼がその方法によって自分の示した曲線の位置を明確にしようとしたどころか、むしろそれらの位置を全面的に変更せざるを得なかったこともわかる。

彼の返答の他の部分を少し注意深く読めば、それらが私に不利なことは何も示しておらず、むしろ彼自身の主張と矛盾していることがすぐに分かる。したがって、私がそれらの箇所について行った指摘は、ここではあえて述べないことにする。それによって、この点では彼の意向に従うことにする。

しかし、彼は自らの解法の中で重要な困難に触れてはいるものの、それについては返答の中で何も述べていない。この点を指摘しておくのは良いことである。なぜなら、その困難を整理して取り除かねば、この問題は真に解決できないからである。その困難とは、すべての方程式の根の限界を求めるための方法を与えること、しかもそれがロールがこの件について示した方法と同じくらい一般的でありながら、彼のものとは異なるような方法を与えることである。ところがベルヌーイ氏がこの目的のために引用した方法は、きわめて欠陥がある。このことは、数学に通じた者たちと少し議論すれば、非常に簡単かつ迅速に確認できることである。

したがって、ベルヌーイ氏はこの問題の根本的な困難点をまったく解決していないことが分かるだろう。それどころか、彼がこの件のために引用した諸方法を用いたとしても、その困難を解決するには到底及ばないということになるだろう。

この問題はまた、与えられた方程式をあらかじめ整えることをも前提としている。そしてその準備は、私がこの件について前の9月14日号のJournalで示した規則によって、きわめて簡単に行うことができる。(第14号No. XIVの71ページを見よ) ベルヌーイの規則によって同じことを行おうとすれば、少なくとも問題となっているものと同じくらい複雑な一連の等式を次々に変形し、解かなければならない。しかも、どの変形が正しく成功しているかを判断するための解析的な判定基準を彼は示していない。したがって、この理由から、また彼自身が言及していない他の理由からも、彼の規則は実際の使用には役に立たないことになるだろう。とはいえ、最後に付け加えておくならば、彼の考え方には一つの巧妙な工夫が見られる。それは、彼に精神的な鋭さと代数的才覚が備わっていることを示している。

私は、彼が王立科学アカデミーの諸氏を、我々の論争の裁定者として選ぶことを認める。もっとも、私はその中の何人かを不適当とする十分な理由を持つてはいるが。私にとって重要なのはただ一つ、彼らがその判断に署名し、そしてその判断が私にも正式に通知されることである。

複数の方程式に共通して現れる未知数を消去するために、私が約束していた方法は次のようなものである。まず、その未知数にそれぞれ完全に任意の量を掛ける。ただし、その任意量の起源は、消去したい未知数そのものに由来するものとする。つぎに、それらの掛け算の結果を互いに比較し、それぞれの項を対応する項同士で比較する。すると、そこから新たに補助的な方程式が得られる。これらの方程式の未知数は、先に導入した任意の量であり、それらを解くことによって、求めていた結果を得ることができる。一般的に言って、代数を代数それ自体に応用するために、また、それを幾何学的曲線や、それに還元される問題に応用するためには、それをうまく成功させるための最もよい手段の一つは、完全に任意な方程式を仮定し、そこから補助的な方程式を導き出すことである。この点については、のちの節で説明することにしよう。

No. XVII

神の御加護あれ

命題に関する論理学

これに若干の雑多な命題を添え、試問標本として 1693 年 11 月 27 日に公開討論に付した。
医学科学生ヨハン・ペルヌーイ氏により、初めてバーゼルにおいて 1693 年に刊行された。

命題についての論理的命題集

§ I

もし私たちが観念を比較して、一つが他と一致するか、または一致しないことを見いだすならば、その心の働きは「判断」と呼ばれる。

§ I I

さて、私たちが観念を結びつけたり、または互いに分離したりするとき、それは明示的または暗黙的な結合詞の助けによってなされる。このとき、われわれは「命題」を形成する。それは、観念を結びつけるなら肯定命題、分離するなら否定命題である。

§ I I I

ある事柄について何かが肯定または否定される場合、その何かを述べられる側の観念を「主語」と呼び、述べる側の観念を「述語」と呼ぶ。

§ I V

主語がその意味範囲全体を指すとき、命題は「普遍命題」と呼ばれる。ただし、主語が単一の個体である場合は例外であり、そのときは命題を「単称命題」という。

§ V

しかし、主語の意味範囲が不特定の一部だけに限定されるとき、その命題は「特称命題」と呼ばれる。

§ V I

もしある観念が別の観念の下位に含まれているなら、その上位の観念は常に下位の観念について普遍的に肯定できる。たとえば、「図形」に含まれるすべての性質は「三角形」にも含まれているから、「すべての三角形は図形である」という普遍命題を立てることができる。このような普遍性は、偶然的なものとは異なり、「本質的普遍性」と呼ばれる。

§ V I I

「偶然的普遍命題」とは、述語の観念が主語の観念に本質的に含まれていない命題である。たとえば「すべての人間は必ず死ぬ」という命題は、その典型である。なぜなら、「死ぬ」という性質は「人間」という概念のうちに含まれていないからである。

§ V I I I

したがって、属や種の差、またはその両方が、種に対して普遍的に述べられるとき、そのような命題は「本質的に普遍的命題」と呼ばれる。けれども、その種の命題は厳密には真の命題とはいえず、むしろ「言葉の上だけの命題」と呼ぶのが正しい。なぜなら、そのような場合、私がしているのは、異なる観念を結びつけて新しい判断をしているのではなく、同じ観念を、ただ別の名前で言い換えているだけだからである。

§ I X

同一の命題であっても、ある観点から見れば「本質的普遍命題」であり、別の観点から見れば「偶然的普遍命題」である。たとえば次のような命題を考えてみよう。すべての放物線は、横座標とその点における縦座標の平方とのあいだに比例関係をもつ。もし、放物線とは横座標と縦座標の平方とが比例する曲線である、という比例関係そのものを、放物線の本質的区別として採るならば、この命題は「本質的普遍命題」となる。しかし、もしその比例関係を放物線の固有の性質、結果として成り立つ特徴にすぎないと見なすならば、「偶然的普遍命題」となる。

§ X

同じひとつの観念が、互いにきわめて異なる多くのものに共通して当てはまることがある。したがって、たとえ命題の述語が「普遍的概念」であっても、それはその全範囲にわたって適用されるのではなく、主語と一致する部分においてのみ適用されるのである。

§ X I

したがって、普遍的な肯定命題は、単純には逆にすることができない。

§ X I I

もし、ある概念が他の概念に当てはまらないならば、その概念のどの部分においても当てはまらないことは明らかである。したがって、否定命題では、たとえ命題が部分的・特称であっても、その述語は常に普遍的な意味で取られる。

§ X I I I

したがって、否定の特称命題は単純には転換できない。

§ X I V

反対と矛盾の二つの対立の種類に、第3のものを加えることができる。それは両者を合わせた形のものであり、単称命題に見られる。たとえば「ウィルヘルムは王である」と「ウィルヘルムは王でない」という二つの命題である。これらの命題は、肯定と否定という性質だけが異なり、どちらも単称で全称命題に等しいという点で、反対命題と見なすことができる。しかし同時に、一方が真であれば他方は必ず偽であるという点で、矛盾命題でもある。この性質は矛盾命題にのみ当てはまるものである。

§ X V

もし二つの反対命題がどちらも偽であるなら、それに対応する二つの下反対命題は必然的にどちらも真である。そして逆もまた同様である。ただし、命題の主語と述語は同じものでなければならない。

§ X V I

しかし、反対命題のうちどちらか一方が真であるならば、必然的に、下反対命題の一方は真であり、もう一方は偽である。

§ X V I I

肯定命題は、意味を保ったまま否定命題に変えることができ、逆に否定命題も肯定命題に変えることができる。ただし、変換後の命題では述語に「非～」が付け加えられ、学派論理でいう「無限述語」をもつ形になる。たとえば、肯定命題「すべての人は罪人である」は、意味の等しい否定命題「どの人も非罪人ではない」に変換できる。そして否定命題「どの物質も思考しない」は、肯定命題「すべての物質は非思考的である」に変換できる。

§ X V I I I

したがって、第一図式に属する四つの三段論法の型が、どのような理由で二つに還元できるかが分かる。Celarent と Ferio の推論は、それぞれ Barbara と Dari に変換されるのである。同様に、第3図式の六つの推論形式も三つにまとめることができる。Felapton, Bocardo, Ferison は、それぞれ Darapti, Disamis, Datisi に変換される。

§ X I X

ここで注意すべきは、この理屈によって、第一図式および第3図式のすべての否定結論をもつ三段論法は、肯定結論をもつ別の三段論法に変換できるということである。

§ X X

第二図式の三段論法は、確かに二つの型にまとめることができる。Cesare を Camestres に、また Festino を Baroco に、あるいはその逆に変換すればよい。しかし、これらはいずれも常に否定的結論を導くものである。

§ X X I

その理由は次の通りである。第一図式および第3図式では、大前提と結論をそれぞれ否定形に変換し、小前提はそのままだしておけばよい。しかし第二図式では、結論をそのままにしておき、大前提と小前提の両方を否定形に変換する必要がある。

§ X X I I

命題には、単純・複合・複成の三種類があるが、これに第四の種類、曖昧な命題を加えることができる。この第四種の命題では、主語がはっきり定まっていない。代表例が疑問文と命令文であり、これらでは主語を任意に補って理解することができる。たとえば「止まれ、旅人よ」という命令文では、主語が明示されていない。もしこれを「私の意志はあなたが止まることである」と書き換えれば、主語は「私の意志」になる。逆に「あなた、旅人よ、止まるように求められている」と言い換えれば、主語は「あなた、旅人」となる。

§ X X I I I

同様に、「ここでなぜなのかを言え」という表現も曖昧な命題に属する。なぜなら、そこでは主語が定まっておらず、誰に言っているのかが文から明らかでないためである。しかし、厳密な意味で言えば、このような表現は本当の意味での命題ではない。命題とは「何かを肯定または否定する表現」だからである。ところが命令文や疑問文は、話者が肯定も否定もしていないため、それ自体としては「真」でも「偽」でもない。つまり命題の条件を満たさないのである。

§ X X I V

したがって、これらの表現が、それを聞く相手の心に引き起こす精神の作用は、単純な把握と判断との中間のようなものである。なぜなら、それらは単なる把握以上のものを喚起するからである。心は単なる観念の静かな観照にとどまらず、さらに応答すること、あるいは命じられたことを行うことへと決定されるからである。しかしまた、それらは判断ほどのものを喚起するわけでもない。というのは、心はそこに観念の一致や不一致、肯定や否定を形成しないからである。

§ X X V

ある種の命題では、主語と述語の部分が相互に入れ替え可能である。このような命題を「中立的命

題」と呼ぶことができる。たとえば、「誰もがコリントスへ行けるわけではない」という命題を考えると、「ある人」を主語と見るとき、この人について「コリントスに行けない」と述べている。しかし逆に、「コリントスへ行くこと」を主語と見るなら、それについて「それは誰にも生じることではない」と述べている。つまりこの文では、「人が行く」という関係を、人を中心にも行為を中心にも、どちらでも表せる。

§ XXXVI

同様に、この命題「ただ神にのみ栄光を」においても、主語は、「神」でも「栄光」でもどちらでもよい。前者は、神について「ただ神にのみ栄光が属すべきである」と述べられているから主語となる。後者は、栄光について「それはただ神にのみ属すべきである」と述べられているから主語となる。したがって、どちらを主語として取っても、他方は述語の一部となる。

§ XXXVII

「開始的命題」と「終止的命題」の他に「展開命題」に分類される。展開命題に、第3種類として「継続的命題」を加えることができるなら、同じ理屈で、第四種類として「中断的命題」も入れてよい。この中断的命題とは、事物がまだ現実には存在していないが、将来ある状態において存在することが予定されている場合の命題である。たとえば次のように言うときである。「フランス人とドイツ人のあいだの戦争は、まだ終わっていない。」

§ XXXVIII

「継続的命題」と「未達成的命題」どちらも事物が一定の状態に留まっていると述べるため、同じもののように見える。それでも、我々はそれらのあいだに、「開始的命題」と「終止的命題」とのあいだにあるのと同じ区別を設ける。なぜなら、これらもまた、事物が以前の状態をもはや持たなくなること述べているからである。

§ XXXIX

このほかにも、次のような種類の「展開命題」を加えることができる。

到来的命題：「まもなく冬至になるだろう。」

過去の命題：「かつては知恵が黄金よりも尊ばれた。」

現在の命題：「だが今では、何も持たぬことが野蛮とみなされている。」

§ XXXX

これらすべての命題は、表現としては単文でも、意味内容としては複合命題である。なぜなら、たとえば一つの事柄を肯定または否定するとき、同時に、もう一つの事柄を暗に肯定または否定しているからである。

§ XXXXI

このように考えるなら、多くの命題が単純命題として扱われていたものであっても、実は展開命題に分類できることになる。

付随する雑録

§ I

あらゆる全称命題は、単なる多くの事例を含む命題であるだけでなく、実際には多くの個別命題を結合した「構成的命題」として扱うことができる。

§ I I

種に対して種差が述語とされるような全称肯定命題は、単純には転換することができない。これは「思考術」著者の見解に反する。

§ I I I

同一の著者による三段論法の十種の型の数に関する証明は不十分である。彼は「十より多くの型は存在しえない」ことだけを示したが、「十より少ない型も存在しえない」ことまでは証明していない。

§ I V

三段論法、「すべての正直な人は嘘を言うことができる。しかるに、正直な人は誰一人として悪徳ではない。ゆえに、悪徳でないある人が嘘を言うことができる」。この結論はきわめて適切に成り立っている。もっとも、形式的には最後の一般法則および第3図式の第一法則に反しているように見えるが。

§ V

真実を語るときにも、私たちはときに嘘をつく。そして逆に、嘘を語るときでも、必ずしも嘘をついているとは限らない。

§ V I

最も悪徳な人でも、時にはりっぱな徳の行いをすることができる。

§ V I I

ヒレボルド体系で述べられている比例の法則、「二つのもののうち一方が、ある第3の個別的で他に共有されないものに当てはまり、もう一方が当てはまらないならば、両者もまた互いに当てはまらない」、は誤っている。また、そこに付されている例も、本質的ではなく偶然的にしか真ではない。アルストテレスが哲学者であったがアテナイ人ではなかったという事実から、「アテナイ人は哲学者ではなかった」と結論するのは不当である。実際、すべてのアテナイ人が哲学者であることも可能だからだ。そして、この推論のばかばかしさをさらに明らかにするために、哲学者の代わりに人間という語を入れてみれば、「アルストテレスは人間であったがアテナイ人ではなかった、したがってあるアテナイ人は人間ではなかった」という結論になる。これは明らかに不自然である。

§ V I I I

「自然界には飛躍はない」という原理は、きわめて豊かな原理であり、その一撃によってデカルトの三つの要素が打ち倒される。

§ I X

真空の存在を仮定すれば、運動の本性はきわめて適切に説明される。もしこの真空が存在しなければ、宇宙全体の質量は、密に詰まった非常に硬く不動のものとなってしまったであろう。

§ X

したがって、物体の本性がまだ完全には理解されていないことを認める方が、真空は存在しない、などと勝手な仮定を置いて、結果として多くの矛盾に陥るくらいなら、まだよくわかっていないと率直に認める方がましだ。

§ X I

光の反射や屈折の原理を、自然は最も短い道を通るという公理で説明しようとするのは、わからないことを別のわからないことで説明するようなものである。さらに言えば、反射の場合、この原理が当て

はまるのは、凸面・平面・ある種の凹面に限られる。なぜなら、他の多くの場合には、自然はむしろ最も長い道を通るからである。

§ X I I

バロメーターの水銀柱が支えられているのを、空気の重さによると説明する人は、空気の本性をまだ十分に理解していない。

§ X I I I

存在しないものの観念だけでなく、まったく不可能なものの観念すらも、持つことができる。

§ X I V

部分が互いに接していないような連続体も存在する。

§ X V

静止にも程度というものがある。つまり、ある静止状態は他のものより完全であり、ある物体は他の物体よりもいっそう静止していると言える。

§ X V I

もしネズミが海に小便をすれば、すべての海がかき乱される。

§ X V I I

重い物体を構成する要素、空隙をもたないか、または二つの近接した孔のあいだにある物質の微粒子は、その衝撃によって物体の重力を生じさせるとされるエーテル物質の最大の粒子よりも、無限に、いや無限倍に大きい。

§ X V I I I

どんなに小さな打撃の力でも、どんなに大きな重さの力よりも強い。

§ X I X

視線・光線は、直線ではなく、曲線を描いて進む。

§ X X

月は、土星や木星の衛星と同様に惑星ではない。

§ X X I

春分・秋分のころ、太陽の出前や没後に黄道の平面上に見られる光、それから、数年前にパリ王立天文学者カッシーニ氏によって発見されたこの光は、太陽・地球およびその他の惑星が渦を巻いて回転しているという説を、見事に裏づけるものである。

§ X X I I

すべての素数は、6の倍数から1の差をもって異なる。ただし、2と3を除く。

§ X X I I I

したがって、素数の数列には確かな法則が与えられている。その法則は、私の知る限りでは、これまで誰によっても注意されてこなかったものである。その法則は次のようなものである。6の倍数に基づいて二つの数列を作る。一方の列は6の倍数から1を引いた数、もう一方の列は6の倍数に1を加えた数。この二つの数列の中から、前に出た数を自乗したり、または前の二つのどれかの数を掛け合わせてできる数（前項たちの積で作られる合成数）」を消去すると、これら二つの数列に含まれるすべての合成数は、前に現れた二つの数の積から生じるか、または前項の平方として現れることを示すことができ

る。すると残る数は、自然数列 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の中で現れるすべての可能な素数であり、ただし 2 と 3 を除く。

§ X X I V

与えられた曲線の一部を用いて方程式の根を構成する問題に関する、私の解法は正当なものである。それはつい最近パリの学術誌（前の号第 13 号を参照、また第 12・16 号も参照）に掲載された問題であるが、問題の提出者がこれに反して提起した反論は、何の価値もない。いやむしろ、私は完全に確信している。もしこの件が、公正で、かつ数学に精通した審査者の判断に委ねられるなら、最初の解答者に約束された賞は、私に授与されるであろう、と。

§ X X V

Papini 氏の私の永久機関に対する反論（ライプツィヒ版学術誌 Acta Eruditorum の 1691 年 5 月号参照）は、私の主張と同じ歩調で進んでいる。（第 1 号の付録の P.41）実際、それらは私の装置の可能性を破壊するのではなく、むしろ裏づけているのである。

§ X X V I

ただこの一点、螺旋曲線は幾何学的曲線でありえない。それは直線によって無限の点で切られるためであるという事実からしても、正当に次のことが結論される。円、その他の閉じた図形や曲線の求積および長さの作図は不可能である。

§ X X V I I

最後に、尊敬すべき諸競争者に次の問題を提示する。各自の方法（総合的・解析的いずれでも）によって解を試みられたい。ある場所において、太陽が高度 45° をなすとき、水平面上に垂直に立てられた棒の影の先端が、その日に双曲線を描いた。その双曲線の横軸は棒の長さに等しい。問う：この観測は地球上のどの場所で、またどの日に行われたのか？（解答）我々の解法は、論争の場で、求める者に明らかにしよう。

図を見れば明らかである。

図中で AB は地軸、HO は地平線、ho は水平面、Z は天頂、N は天底、Cs は垂直棒（その先端は C）、AEQ は赤道、PN はその日に太陽が描く平行圏である。PCN は光の円錐、ZCP は影の円錐であり、その円錐が水平面によって切られた断面 lkm は双曲線をなす。その横軸 ls は棒 Cs の長さに等しい。明らかなように、角 SCI, lCO, HCP および弧 HP はいずれも 45° 、また $HN=90^\circ$ 。したがって角 $NHP=135^\circ$ 、その半分は $PA=67^\circ 30'$ である。このうち $PH=45^\circ$ を引くと、残りの HA （または BO ）が極の高度、観測地の緯度であり、 $22^\circ 30'$ となる。これによって地球上の地点が決まる。さらに $AE=90^\circ$ から $PA=67^\circ 30'$ を引くと、残り $AP=22^\circ 30'$ が太陽の赤緯である。この赤緯値から、その年の日付（季節）が求められる。

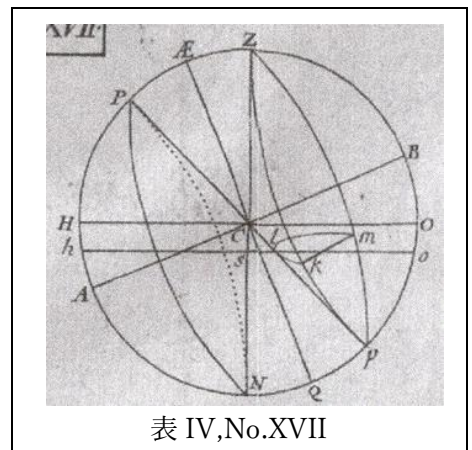


表 IV, No. XVII

No. XVI II

筋肉の運動についての物理学的・解剖学的学位論文

この論文は、医学博士の最高称号およびその特権を正式に得るための公的審査に付すものとして、1694年3月16日、バーゼル出身のヨハン・ベルヌーイ氏によって提出された。

最初はバーゼルで1694年に刊行され、再びヴェネツィアで1721年に、三度目はナポリで1734年に刊行された。

しかしこの論文の数学的部分は、ライプツィヒの学術誌 *Acta Eruditorum* の1694年5月号のP. 200に掲載された。

筋肉の運動についての論文

出版準備中

長いあいだ自分の内で考え続けていた。人体のどの部分を取り上げるのがよいだろうか、その機能を力学の法則によって最もよく説明できる部分はどこであろうかと。そしてついに、解剖学者たちが筋肉と呼ぶ部分こそ最もふさわしい対象であると判断した。第一にこの部分自体の高貴さ、第二に、数学的な証明の明晰さある。その証明は幾何学の奥義に由来し、それによって筋肉に関するすべての学説を支えることができるからである。もっとも、ここで私は筋肉の特別な記述や解剖学的説明を与えるつもりはない。それはすでに、この時代において最も優れた解剖学者たちによって十分かつ余すところなく行われており、たとえ私が望んだとしても、本論文の狭い範囲では到底それを扱う余裕がないからである。我々の目的は、筋肉の構造についての一般的な概念を概略的に描くことである。ただしそれは、筋肉の作動の仕方およびそれに続く動物的运动を正しく説明するために必要とされる範囲において、という意味である。この点において、われわれは比類なき人物ヨハン・アルフォンソ・ボレリの足跡に従い、彼の仮説を採用する。しかし同時に、彼が筋繊維の小器械または小胞を菱形と見なしたのは誤りであることを示す。彼がそのように仮定したのは、計算を簡単にするためでもあり、液体の圧力の法則から本来導かれるべき円形の形状を、当時まだ発展していなかった積分法の助けなしには導けなかったためである。積分法の最初の萌芽は、偉大な数学者ライプニッツ氏に負うものである。さらに私は、特別な曲線を示すつもりである。その縦の座標は、極小変化にしたがって増加する抵抗を示し、横の座標は、筋肉の働きによって費やされ、あるいは失われた動物神経液の量を表す。このような解析をボレリはまったく触れていない。この考えはまた、筋肉に生じる力と疲労の度合いを定量的に求める手がかりとなるだろう。親愛なる読者よ、この拙く急ぎ足で描かれた私の試みを寛大に受け取ってほしい。もし好意的に見ていただけるなら、いずれ暇のあるときに、現在は多忙ゆえ省略した点を、倍の熱意でもって補うつもりである。

§ I

筋肉の運動について論じる前に、多くの近代の解剖学者たちがおおむね一致している筋肉の構造について、諸現象をやや正確に説明するのに役立つ範囲で、簡潔に述べようと思う。筋肉とは有機的な部分であり、膜・筋肉質・動脈・静脈・神経・そして腱から構成されている。膜が皮膚のようにして筋肉全体を包み、その膜の下には、無数の繊維がやや濃い血色を帯びて見える。この繊維の集まりを一般に「肉」と呼ぶが、これは次第にやや白みを帯び、神経のような硬さをもつ物質へと移行する。この物質を「腱」と呼ぶのが解剖学者たちの慣例である。この腱は、通常、筋肉の始まり頭部と、終わり尾部の部分に見られる。筋肉の中間部分は「腹」と呼ばれる。無数の動脈・毛細静脈・神経が、筋肉全体の組

織を縦横に走っている。動脈と静脈は、筋肉の栄養および運動に必要な血液を運び入れ、また運び去るためにあり、神経は、血液と混じり合って瞬間的な興奮を引き起こす神経液に富んだ液を供給する。この液については後に詳しく述べるが、それは外的感覚の伝達の媒体であり、魂の忠実なしもべとして、身体の内外で起こるあらゆる変化を魂に報告する役割を果たすのである。さらに注意すべきは、筋肉がいくつもの束に分かれ、それぞれが小さな膜に包まれ、三角柱・四角柱・五角柱など、さまざまな形の小柱体をなしていることである。これらの束は多数の腱性繊維から成り、ステノンが（特殊筋肉学の要素第1定義）運動繊維と呼んだものである。これらの繊維が腱質であることは、血液の流入で生じる赤みが水で洗えばすぐ落ち、繊維が完全に白色に戻ることからもわかる。したがって、それらは色においても、硬さにおいても腱に匹敵する。実際、腱の繊維は筋繊維の単なる延長にすぎず、ただ腱のほうが筋よりも密に並んでいるため、栄養に必要なわずかな血液を除いて、その間隙には血を通さない。それゆえ、筋肉が運動する際にも腱は膨らんだり短くなったりせず、単に受動的なものとして働くのである。

§ I I

ボレッリ（Borellus）（動物の運動について、第1部第L命題）は、筋肉の繊維が煮沸したのち膨張し、顕微鏡で観察すると樹木の小枝に似た小柱のように見え、スポンジ状の物質で満たされていると記している。この観察から彼は、すべての筋繊維は多孔質であり、内部が空洞であると推測した。さらに、筋束を構成するこれらの繊維は、他の横走する並行な小繊維によってまとめられ、まるで帯で巻かれているように見える。これらの横繊維が縦の繊維と組み合わせさせて、網状構造を形づくっているように見える。そしてこの構造は、筋肉を長時間煮ると、興味深く観察できる。しかし、クラリッシムス・ジョン・メイオー（Cl. Jo. MAJOW）（筋肉の物質についての論考、第2章より）は、収縮を起こすのはこれらの横走する小繊維であり、筋繊維そのものではないと主張した。だがこれはあまり整合的ではなく、すべての健全な解剖学者たちの見解に反していると批判されている。私は、これら横走する小繊維に他の目的を認めない。それはただ、筋線維が膨張・収縮するときに、過度に広がってしまったり、整然とした位置から乱れたりするのを防ぐためである。このような横の結合によって、各筋線維は等間隔に区切られ、その結果として多数の小胞が形成される。これらの小胞は、筋肉が休んでいるときにはしばしば側面同士が接しているが、働くときには膨らんで楕円形となり、ちょうど鎖の輪のように見える。ボレッリはこれを「菱形の小装置」と呼んでいるが、それは誤りであり、この点については後で論じよう。なおついでに指摘しておくべきこととして、これらの横の結びつき（横方向の連結）はゆるやかであり、それによってすべての小胞の間に連絡が保たれ、運動力、膨張する物質が、あらゆる方向に均等に拡がることができるようになっている。

§ I I I

これまで述べたことは、単純な筋肉の構造について観察される主要な点である。しかし、筋肉を実際に動かしているものが何であるかについては、人々の見解がさまざまである。それらすべての説を詳しく論ずるのは、ここでの目的ではない。古代の人々が唱えた「非物質的な自然の力」によって筋肉が直接動かされるという説は脇に置いて、では、ある者または別の者がこの問題についてどのように判断しているかを見てみよう。実験家ステノ（STENO）は、自身の「筋学的標本」の中で、筋肉は新たな物質を取り入れることなく収縮すると考えた。単なる形状の変化によって、斜角の平行四辺形から、より直角的なものへと移行することで収縮が起こるとした。しかしこの見解はまったく馬鹿げており、著者の純粋な才気の戯れとみなすべきものである。この方法では直角の筋肉の収縮を説明することができな

い。そうするには物体同士の形状変化を認めねばならないからである。さらに、筋肉がいかにして動かされるのか、あるいはその第一要因がどのようなものであるのか、また、物理学の基礎「動くものはすべて他によって動かされる」をいかにして守れるかがまったく理解できない。実際のところ、私は、魂の意志だけによって身体の機械が左右に動かされるとはほとんど思えない。もしそうであるならば、神経が切断されても、または締めつけられても、筋肉が動くのを妨げるものは何もないはずである。そうでなければ、あるいはあなたが主張したいように、魂が脳の中心部から外部の四肢へといつも通っている道が、そのような切断や圧迫によって閉ざされるのだと言うのかもしれない。だがそうだとすれば、それは魂をあまりにも物質的なものとして考えることになるだろう。さらに多数の他の論拠によっても、ステノ派の体系は打ち碎かれる。この点については、ボレリ (Borellus) (動物の運動について、第1部第5命題) とマイヨ (Majow) (筋肉の運動について、第1章) の著作を参照するとよい。そして、私の考えでは、筋肉の収縮の真の原因に近づいたのは、それをある種の膨張から説明した人々である。その中でも特に顕著なのは、ウィリス (Willisius) (筋肉の運動に関する論考) と、先ほど名を挙げた二人の学者である。これらすべての人々は共通して、筋肉の内部に一種の「沸騰」が生じ、その結果、筋線維を膨張させると考えた。この膨張によって、筋肉は横方向に膨らむ代わりに、縦方向に短くなるのである。

§ I V

それゆえ、我々はこれらの見解におおむね同意し、ボレリ (Borellus) に従って次のように定める。神経とは、ある種の実質的な物質に満たされた管の集合体であり、その物質は常にふくれあがっており、脳から供給されるきわめて揮発性の液体によって充満している。しかもこの液体は、もし血液と混合されれば、瞬間的な泡立ちを生じる性質のものである。この流体こそ、一般に「動物神経液」と呼ばれているものである。もし魂が命令をしたり、意志の作用を行使するとすれば、それは、全能の神が魂と身体とのあいだに定めた神秘的な結合の必然によって起こるのであり、この結合は、これまで、そしてこれからも、われわれには理解できない。それにもかかわらず、必ず脳の中で「動物神経液」の局所的な動揺が生じ、その神経液が、ある神経の根元を刺激することによって、その神経内に含まれた神経液全体がその全長にわたって震動する。これはまさしく、棒の一端をわずかに動かすと、連続性のために、もう一方の端も同様に動くのと同じである。したがって、神経の根元が刺激されると、神経の先端にあって神経に属する液体の小滴が、反対側の開口部から軽い振動によって押し出される。そしてこのようにして、筋肉中に散在する多数の神経小枝のそれぞれの開口部からも、意志の命令に応じて同時に、同数の液滴が吐き出されるのである。しかし、スポンジが液体で満たされていても、その液が自然に流れ落ちないのと同様に、たとえ神経の端の開口部が常に開いていたとしても、この液体の小滴は、いま述べたような仕方で、自発的に、実際の衝撃なしには外へ落ちることはない。なぜなら、神経の実質が、それらの小滴に対して、ちょうど弁のような役割を果たしているからである。

§ V

意志の命令によって、あるいは自然の習慣によって、先に述べた方法で、無数の小滴が筋肉全体の塊の中を同時に放出されるとき、その筋肉は常に血液によって湿らされたスポンジのようなものであるが、それらの非常に微細な粒子は、きわめて細い棘のような突端によって、血液のより繊細な粒子に衝突し、それを分裂させ、内部に含まれていた圧縮された空気を放出させる。そしてその空気が膨張することによって、私が「沸騰と発酵についての論文」で論じたように、沸騰と、それに続く筋肉の膨張とを生じるのである。さて、ここで私の説に対してどのような反論がありうるかは、すでに見えている。

筋肉がいったん発泡して膨張した後、なぜまたすぐに弛緩し、元の状態に戻るのか、という問題である。私が提唱した発泡による説明に従えば、筋肉は一度膨張したのち、永久に膨張したままでないかならないように思われるからだ。まさに、黒色火薬の実験で見られるように（発泡と発酵についての論考、§ XXII 以降）、火薬に点火すると、管の中の空気が膨張して広がった空間がそのまま保たれ、再び縮まないのと同様である。ボレリ（動物の運動について、第 II 部第 XXIX 命題）は、筋肉内部の微粒子が発泡しながら猛烈に回転して大きな空隙を作り、それが発泡終了後に潰れて元の体積に戻ると考えた。だが私は、すでに「発泡と発酵に関する論考、§ XVII」において、そのような説は発泡の真の原因ではないことを十分に証明しておいた。

§ V I

したがって、先に述べた難点に別の形で応じ、私の理論の原理を保つためには、我々が呼吸によって吸い込む粗い空気とは別に、さらに微妙で精妙なもう一種の空気が存在すると仮定しなければならない。この空気は確かに弾性を備えているが、感覚によってはまったく捉えられない。それはあらゆる物体の微細な穴を自由に貫通するからである。この仮定がそれほど不合理なものではないことは次のことから明らかである。我々が呼吸する粗い空気と、それよりもはるかに微細な物質との間には、その中間に位置する種々の段階の物質が当然存在しなければならない。なぜなら、自然の中に飛躍があってはならないからである。この中間物質は、当然弾性を備えているはずである。それは、我々の身の回りの空気が弾性をもつと同じ理由による。絶えず運動している微細な物質が、より粗くより鈍い粒子を障害物のように押し分け、互いに引き離し、自らの通行を自由にするよう努めているためである。したがって、私たちが呼吸する粗い空気とは別に、より精妙で、しかもある程度凝縮された微細な空気が存在し、それは物体の大きな孔や小胞を満たす粗い空気とは異なり、最も微細な隙間の中にも宿っている。私が「発泡と発酵についての論考」で示した論拠をよく考察する人なら、このことを疑う理由はまったくないだろう。この前提に基づくなら、次のように説明できる。

神経に属する極微の流体の粒子はきわめて微細で繊細であり、その針状の突起は、ほんのわずかな接触によってすぐ鈍ってしまうほどである。したがって、それらは血液粒子の中にある最も微小な孔しか開くことができない。ところが、そこからさらに微細で凝縮された弾性空気が噴き出し、自由の身となるとすぐに膨張し、その初めの勢いによって筋肉全体の塊を一瞬にして膨らませる。しかし、その粒子があまりにも小さいために、空気はすぐに筋肉の孔を通して外に逃げ出し、外気中へ飛び去ってしまう。そのため、発泡が終わると、筋肉は瞬時に再び萎む。ただし、もし神経から新しい流体の滴が絶え間なく注がれ、新たな発泡を次々に引き起こすなら、そのときだけ筋肉は連続的に膨張・収縮状態を保つことができるのである。

§ V I I

神経の流体の粒子がこれほど多数ある中には、必ずより強靱な小突起を備えたものがあり、それらは血液粒子のやや大きな通路までも突き破ることができる。その結果、筋肉の発砲の際に、やや粗い空気がそこから噴き出すが、この空気は筋肉や皮膚の開いた微細な穴を通り抜けることができないため、あちこちに小さい袋を形成してそこに溜まる。こうして、空気で満たされた小さな泡状の袋が生じるのであり、それらは時としてエンドウ豆ほどの大きさに達し、皮下や筋肉束の間の隙間に散在して観察される。これに基づいて、いわゆる乾性水腫または鼓腸の主な原因がここにあるのではないかと私は推測する。神経流体が過度に刺激的になりすぎたとき、それによって血液粒子の大きめの孔が多く開かれ、その内部に含まれていたやや粗い空気が放出される。この粗い空気は大量に流入して膨張するが、皮膚の

細い管孔を通して外に逃げることができず、体内で見つけた主な空洞、特に下腹部の腔をその体積で満たしてしまう。そのため、そこに痛みを伴う張りが生じるのである。

§ V I I I

動物神経液の刺激性が増し、筋肉の中で適度を超えた激しい膨張を引き起こすとき、れによって鼓腸が生じうることを、われわれはすでに述べた。おそらくこの点を指摘したのはわれわれが初めてであろう。そしてこれとは逆に、動物神経液の微細な突起があまりに柔弱である場合には、それにより筋肉内の興奮が弱まるか、あるいはまったく消失し、その結果、麻痺が起こるのである。これまで医師たちの間では、麻痺はただ一つ、動物神経液の流入が妨げられることによってのみ生じる、と信じられてきた。しかし、これは必ずしも真実ではない。麻痺の患者では多くの場合、感覚が失われていないからである。もし本当に麻痺が神経液の流入遮断だけに依存しているのであれば、感覚も必ず減弱するはずだ。もし神経が閉塞を起こしているのなら、それは外から入る神経液を妨げるだけでなく、逆に脳へ戻る神経液、感覚を生じさせる流れまでも遮断してしまう。したがって、感覚は完全には失われなくても、大部分が弱まるはずなのである。したがって、麻痺の真正の原因は、筋肉内における発泡が弱まるか、またはまったく消失することにある場合がある。これは次のようなときに起こる。神経流体が、どれほど豊富に筋肉へ流れ込んでいても、その刺激的な力を失ってしまう場合、あるいは血液粒子が過度に硬化し、その結果、神経流体の微細な突端によって突き破られることができなくなる場合である。

§ I X

この仮説によれば、他の筋肉運動に関する諸症状、たとえば、けいれん性の運動、四肢のこわばりや震え、あくびや伸びなども簡単に説明することができるだろう。しかし、そうした問題は本論の目的の範囲外である。われわれの主要な目的は、まず何よりも、動物運動における自然現象をより精密に探究することにあるからである。話をもとに戻すと、われわれは筋肉の運動筋肉線維が他の横走する小筋肉線維によって横方向にまとめられていることを指摘した。したがって、各筋肉線維は、もしこれらの横筋肉線維が存在しなければ中空の小柱をなすところを、それによっていくつもの小区画に分けられている。しかし、これらの区画の内部空間は、横筋肉線維の結合がゆるやかであるため、筋肉線維の全長にわたって互いに交通している。各小区画、節の長さは、Borelli の計算（動物の運動について、第 1 部第 105 命題）によれば一指幅の二十分の一に相当する。筋肉が膨張するときには、これらの各小区画は横方向に拡がり、先に第 V 節で述べたあの弾性の空気によって満たされる。ここで明らかに分かることは、これらの区画が Borelli の言うように菱形の形を取ることは不可能だということである。もしそうであるならば、単に一つの粒子だけが楔のように一つの区画の側壁の間に入り込み、それらの側面を押し広げることで小さな菱形を作るだけで足りることになる。しかし、このようなしかたでは膨張が生じない。Borelli 自身によれば、筋肉運動を引き起こす粒子の運動は楔の作用が要求するような直線的運動ではなく、円運動であるからである。さらに、長さが一指の二十分の一ほどもある一つの区画は、それだけで十分に知覚できる大きさであるのに対し、弾性空気の一粒子はそれに比べてほとんど無限に小さく、しかもわれわれが前に述べたように、単に感知不能なほど微細で、普通の空気よりもはるかに繊細であり、身体之最も細微な孔をも通り抜ける。したがって、いかなる一つの区画も一つの粒子によってのみ拡張されるのではなく、無数の弾性粒子によって同時に、しかもそれらがすべて等しい力で区画の壁面に作用することによって拡張されるのだと結論される。ゆえに、それらに与えられる形は、Borelli の想定したような菱形ではなく、何らかの曲線的な形状である。この形状こそ、われわれがこれから探求しようとしているものである。

§ X

純粹に理屈や物理的推測だけに満足し、流体の圧力の性質を少しでも理解している者であれば、計算を用いなくても、この形状が円形以外ではありえないことが分かるだろう。なぜなら、流体の本性は、接触している表面に対して垂直な方向に圧力を及ぼすことであり、また、弾性空気の圧力はあらゆる方向に等しい。したがって、完全に柔軟であると仮定された筋線維は、いたるところで等しい力によって外方へ押し広げられることになる。ゆえに、筋線維の曲率はどこでも同じであり、その結果、その形は円形でなければならない。なぜなら、どの一点も中心から他の点よりも遠くまたは近くあるべき理由がないからである。しかし、もしこのような物理的推論に満足しない人がいるなら、われわれの幾何学的計算を検討してみるがよい。その計算によっても、われわれは同じ曲線に到達したのである。この計算は、われわれが物理的推論によって予見した曲線の形状を、驚くほど見事に裏づけてくれるだろう。ゆえに、次にその計算を掲げることしよう。

ABC を一本の線維、あるいは完全に柔軟な糸としよう。その両端 A および C は固定されているとする。この糸のあらゆる点 B において、それ自身の曲率に垂直な方向に、等しい強さで、しかも無限に小さい力が作用しているとする。この力を、線分 BH とする。求めるのは、このときの曲線の形である。次のように定める。横座標を



$AF = x$ 、その微分を $Ff = dx$ 。縦座標を $FB = y$ 、その微分を $GB = dy$ 。曲線の長さ $AB = s$ 、その微分を $Bb = ds$ 。BH は、線素 Bb を押す力であり、その大きさは nds

($Bb = nds$)である。各点での押す力BHは、二つの成分、水平成分BEと垂直成分BDに分けることができる。これらは矩形DEを形づくり、その対角線がBHそのものである。

三角形 BGb と BDH が相似だから、 $BE = ndy, BD = ndx$

の関係が得られる。ところで、点 A における支えの力は、糸が C を除いてどこに固定されようともつねに同一で一定に保たれるので、それを a とおこう。さて力学から次のことが知られている。曲線の糸 AB の代わりに、点 A と B においてその曲線に接する二本の直線の糸を置き、その二本が交わる点 I において、水平の力 L と垂直の力 K で引っ張られるものとすれば、その L は水平成分の力 BE をすべて合わせたものに、また K は垂直成分の力 BD をすべて合わせたものに、それぞれ等価である。さて実際、すべての BE の和は $\int ndy$ に等しく、これは ny であり、またすべての BD の和は $\int ndx$ に等しく、これは nx である。ゆえに、力 $L = ny$ 、力 $K = nx$ 。それゆえ、点 A において力 L だけを支えるのに必要な部分的支えの力を求めるには、著名なヴァリニヨンの「懸垂重力の基本命題」(新しい力学の試み、P.11) に教えられるように、角 AIB (またはその余角 KIB) の正弦を角 MB の正弦に比する、 $IM : MG$ ごとくであり、しかしそれはまた $bG : GB$ 、 $dx : dy$ と同様である、という比を用いればよい。したがって、力 $L ny$ を、点 A における部分的支えの力に対比させれば、かくしてその部分力は $= \frac{nydy}{dx}$ と見いだされる。ところで力 K の方向は接線 KI そのものであるから、この K は丸ごと点 A によって支えられる。ゆえに、いま得られた部分力 $\frac{nydy}{dx}$ に力 $K (nx)$ を加えれば、われわれが a とおいた点 A におけ

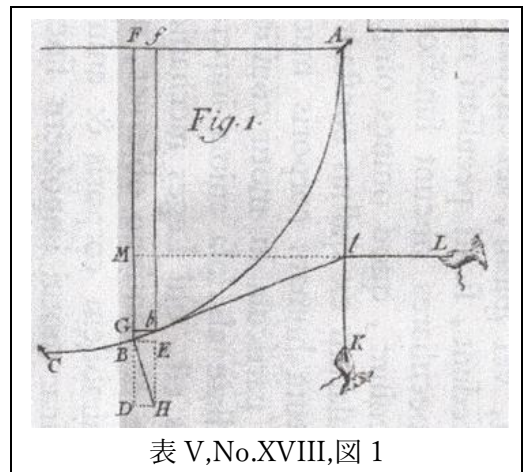


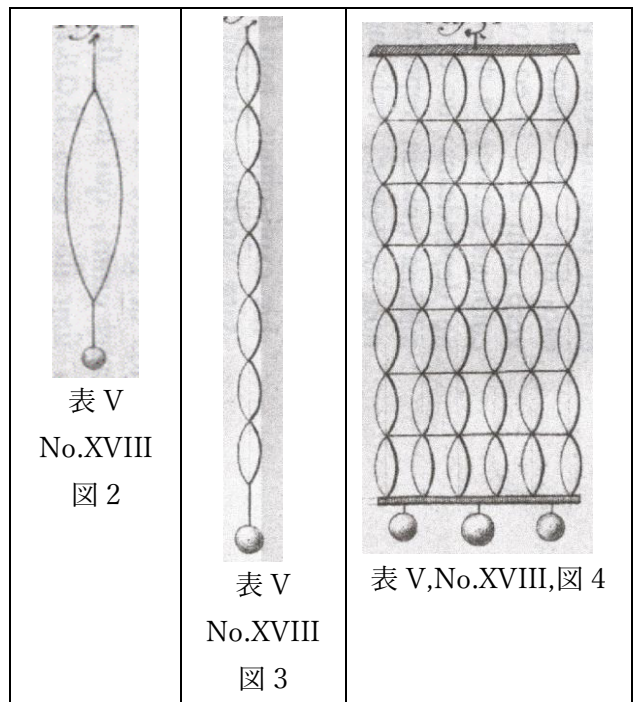
表 V, No. XVIII, 図 1

る全体の一定の支えの力が得られることになる。よって微分方程式 $\frac{nydy}{dx} + nx = a$ 導き出される。これに dx を掛けると $nydy + nxdx = adx$ となり、積分をとれば $\frac{1}{2}nyy + \frac{1}{2}nxx = ax$ $yy + xx = \frac{2ax}{n}$ を得る。この方程式は、求める曲線 ABC が半径 $\frac{1}{n}a$ の円であることを示している。証明終わり。付記。ヴァリニョンの前掲命題により、点 B における支えの力（いいかえれば、糸が切れないために要る強度の力）も、いたる所で点 A における支えの力に等しいことが見出される。さらに、膨張力と、それを支える張力との関係を求めようとするならば、膨張力 n や BH が増減するときに、A または B における支えの力がどのような比率で増減するかを調べたいとする。円の半径は等しいと仮定し、膨張要素 $BH = mds$ 、支えの力を $B = b$ と置けば、関係式 $yy + xx = \frac{2bx}{m}$ を得る。半径が等しいため $\frac{b}{m} = \frac{a}{n}$ となり、したがって $n:m = a:b$ 。支える力は膨張力と同じ比にある。この関係は、私の兄が帆の曲率を求めるために公表した規則（学術誌 Acta Eruditorum の 1692 年 5 月号の P.203）の中にも見出される。

§ X I

私たちがこの計算に用いた方法は、ほとんどすべて「帆の曲線」および「鎖の曲線」と呼ばれる二種の曲線の研究に基づいている。この方法の筋道をたどり、微分法と積分法の計算にある程度通じている者であれば、我々がこの主題についてライプツィヒ学報やパリ学士院誌など、または他の所で発表した諸々の結果を、簡単に理解できるであろう。そしてその他の文献が以下に続く。この理論は、ライプニッツ氏とホイヘンス氏にも公表された。微積分に通じた者であれば、その証明を理解し、かつ、これまで多くの、私の知る限り非常に鋭敏な数学者たちの間でも隠れていたその全ての謎を解き明かすことができるだろう。そしてこの理論は、それを知る者たちを驚嘆させてきた。さて、話を本題に戻そう。先に見たように、あらゆる点で等しい力によって垂直に張られる糸は円形に曲がる。したがって、筋線維を構成する小さな胞も、弾性流体によってすべての側面が等しく垂直に圧されるため、菱形ではなく円形である。もし筋肉が外的抵抗をまったく受けずに働けるならば、これらの小機構は完全な小円にまで

膨張するであろう。しかし実際には、筋肉はつねに重さや骨などの抵抗を克服せねばならず、そのために十分に縦方向へ収縮できず、完全な円形にはならない。これは子どもたちの作る石鹸の泡と同じである。泡は弾性をもつ空気の均等な膨張力で球形になるが、底に水滴が付くと重みでわずかに伸び、球から回転楕円体になる。同様に、筋肉の小機構も、平面的には同じ円の二つの円弧からなるレンズ形をとる（表 V, No. XVIII, 図 2）。これら多数のレンズ形単位が、鎖の輪のように連なって一条の運動線維（表 V, No. XVIII, 図 3）をつくり、さらに複数の線維が並行に並んで筋束を形成する（表 V, No. XVIII, 図 4）。そのあいだにはゆるい横繊維があって、膨張物質が自由に全体を通り抜けることができるようにな



っている。

§ X I I

これまで述べたような前提に基づけば、膨張力と抵抗力との比、一定の抵抗を持ち上げるために必要な弾性流体の弾性度を算定することができる。まさにこの目的のために、ボレッリの大著「動物の運動について」のほとんどが書かれたのである。ここで、筋肉の小機構 BEADB を考えよう。それは二つの円弧 BDA と BEA から成るレンズ形で、その円弧 AEB の中心を C とし、C から半径 CA を端点 A に、CE を小機構の中央を通るように引く。このとき、DE は小機構の最大幅を示し、これを二等分する直線 AB (円弧の弦) は最大の長さをもつ。角 EAC は直角であり、これは角 RAC と ACR の和に等しいから、角 EAR は角 ACR に等しい。したがって、弧 AE は角 EAR の弧度を表し、また BEA は角 AED の二倍に相当する。よって、もし弧 AE を 10 万等分の単位で与え、さらに膨張の半角 EAR が与えられれば、抵抗の上昇量 z を求めることができる。この z は、弧 AEB がその弦 AB を超える長さ (または弧 AE がその正弦 AR を超える長さの 2 倍) に等しい。これによって計算は遂行される。円周の長さとの半径の

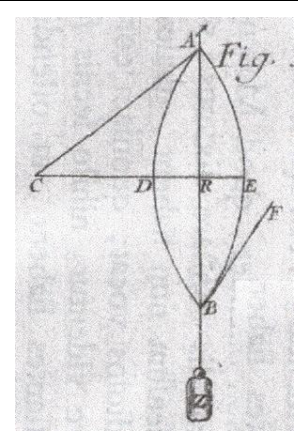


表 V, No. XVIII, 図 5

比を 44 対 7 とすると、円周 360 度に対して半径は $57\frac{3}{11}$ 度に相当する。これが 1 ラジアンに近似である。そこで、膨張角 EAR またはその弧 AE の度数を $57\frac{3}{11}$ 度に対する比としてとり、弧 AE の長さを 100000 等分の単位で表した値に対応させると、半径 AC の同等分単位の数値を得ることができる。さらに、角 EAR の正弦を求め、全正弦との比例により、弧 AE が 100000 等分である場合に対応する弦 AR の長さを求める。こうして、弧 AE がその正弦 AR より長い分だけの差 (AE - AR) をとり、その二倍をすれば、求める抵抗の上昇量 z が得られる。これが求める結果である (証明終わり)。

§ X I I I

この方法で抵抗の上昇量を求め終えた後、それぞれの場合に対応する膨張力を、次の手順で決定する。先に § X で示したように、曲線の各点 (あるいは各微小部分) で、垂直に押す力 $= nds$ 。したがって、筋の小機構を膨張させる絶対的な力、弾性流体の膨張力は n で表される。また同じ箇所では、糸が曲がる円弧の半径 $= a$ とすれば、その各点において必要とされる支える力 $= \frac{1}{n}a$ 。先ほど引用したヴァリニョン氏 (Cl. VARIGNONII) の命題によれば、抵抗 z と、点 B における支える力 (その方向は接線 BF に一致する) との比は、角 EBD と角 EBR の正弦の比に等しい。したがって

$$a = \frac{z \times \sin. EBR}{\sin. EBD} \text{ となる。この値を前に得た式 } \frac{1}{n}a \text{ に代入すれば、曲率半径}$$

$$r = \frac{z \times \sin. EBR}{n \times \sin. EBD} \text{。ゆえに、弾性流体の絶対的弾性力 } n = \frac{z \times \sin. EBR}{r \times \sin. EBD} \text{。}$$

$$\text{したがって、筋小機構の半側 AE が押される力、} n \times AE = \frac{100000 z \times \sin. EBR}{r \times \sin. EBD} \text{。}$$

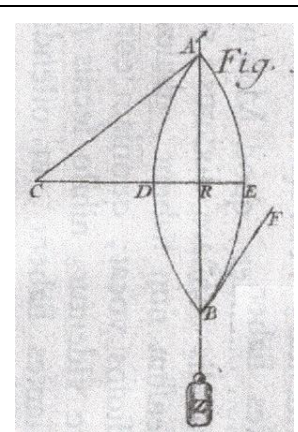


表 V, No. XVIII, 図 5

§ X I V

この計算によって、現在の表が作成された。これは、ボレリ (BORELLUS) (動物の運動について、第1部第99命題) が自らの仮説のために作成した表を模して作ったものである。しかし、両者を比較すると、動力に関しても上昇量に関しても、大きな違いが見られる。彼はそれらの値を常に、適正よりも大きすぎるか、あるいは小さすぎるものにしてしまっているからである。さて、この表からわかるのは、筋肉の膨張が始まった直後、半膨張角 EAR が非常に鋭角であるときには、運動を起こす弾性空気の絶対的な力に対して、抵抗がきわめて大きい比をもつことである。実際、角 EAR が 30 分 (0.5 度) のときには、抵抗と弾性力の比は 22,900,000 対 1 になる。したがって、筋肉の作用において、莫大で、いや信じがたいほどの力を生み出すために必要とされる膨張は、きわめて弱いもので足りることが、十分に理解される。筋肉が巨大な重さを持ち上げる際に発揮する力は、その重さの重力よりもはるかに大きいからである。なぜなら、持ち上げられる重りの作用点 (力点) は支点 (関節) から筋肉の付着点よりもずっと遠い位置にあるからである。したがって、この点に関して、自然は骨という器官を、重りを持ち上げるのを簡単にするための道具として用いているわけではない。なぜなら、骨はむしろ「逆向きのてこ」の役割を果たしているからである。つまり、支点からの距離において、克服すべき重りの位置のほうが遠く、筋肉の位置はより近い。力点が短く、作用点が高い「不利なてこ」の構造を自然は採用しているのである。したがって、もし筋肉が、何の媒介物も介さずに、直接に重りを引き上げることができるとしたら、現在の通常の仕組みよりも、百倍どころか、ときには千倍も大きな重さを持ち上げることができるだろう。

このことをよく考察すれば、少しの疑いもなく一致して認めることになるだろう。筋肉のごくわずかな膨張でも、与えられたどんな抵抗でも克服できるということである。したがって、どんなにか細い乳児であっても、理論的にはどれほど巨大な物体でも持ち上げることが可能である。ただし、抵抗が弾性運動の力に比べて大きければ大きいほど、その持ち上げる運動は目に見えて感じ取れなくなる。したがって、私たちが力を注いで持ち上げたり動かしたりするような巨大な重りは、見かけ上はまったく動いていないように見えても、実際にはわずかに自分の位置から動いているのである。以上のことがそうであるならば、あの実験によって引き起こされるかもしれない驚きは、たやすく消えるだろう。ウォリス (Wallisius) によれば (メスバヌス (Mesbanus) の著作第 15 章第 3 命題)、オックスフォードおよびロンドンで行われたあの実験では、膨らませた牛の膀胱を用い、人の息を細い管から吹き入れると、その膨張の力によって、50,60,70 ポンド、あるいはそれ以上の重さの物体を、吹く者の肺の力に応じて持ち上げることができたというものである。さらに、管が細ければ細いほど、その効果はいっそう大きくなったと付け加えてよい。この実験は、前に述べた原理によって簡単に説明できるばかりでなく、われわれの原理によっては、さらにはるかに正確に数理的に扱うことができる。なぜなら、われわれの原理は、膨らんだ膀胱の真の形状、及び空気固有の弾性をきちんと考慮に入れるからである。これに対してウォリスは、より扱いやすいが精度の劣る計算を行うために、膨らんだ膀胱の本来の回転楕円体形状を捨て去り、その代わりに立体的な菱形体を仮定した。これはまさに、ボレリ (Borellus) が自身の小型装置で行ったのと同じやり方である。さらに彼は、空気の弾性そのものをまったく考慮しなかった。しかしそれこそが、膨張作用を果たす唯一の要因である。したがって、ウォリスの計算は、真実から大きく外れてしまうのであり、その誤差はかなり目立つものとなっている。

弧 EA,角EAR (角EAD/2) 度、分	弧AEの長さ に比例し て、抵抗zを 等分にした 場合	半径AC、 又はEC	角(又は弧) ARの正弦	抵抗の 増大	筋繊維の 要求され る強度	運動する空気の弾性 の絶対的な力	筋肉模型 の半側AE を圧する 運動弾性 の力
0.00	100000	無限	100000	0	50000	0	0
0.30	100000	11454546	99958	84	50002	1/229 より少し 小さい値	435
1.00	100000	5727273	99954	92	50007	1/114 //	873
1.30	100000	3818182	99948	104	50017	1/76 //	1309
2.00	100000	2863636	99939	122	50030	1/57 //	1747
3.00	100000	1909091	99914	162	50068	1/38 //	2622
5.00	100000	1145454	99832	336	50191	1/22 //	4381
10.00	100000	572727	99454	1192	50774	1/11 //	8865
15.00	100000	381818	98822	2356	51764	1/7 //	13557
20.00	100000	286363	97942	4116	53209	1/5 //	18582
30.00	100000	190909	95454	9092	57735	1/3 //	30242
45.00	100000	127272	89994	20012	70710	1/2 より少し 大きい値	57145
60.00	100000	95454	82665	34670	100000	1 //	104708
70.00		81818	76883	46234	146191	2 //	178678
80.00	100000	71590	70492	59016	287960	4 //	403785
85.00	100000	67379	67122	65756	573709	9 //	851465
90.00	100000	63636	63636	72728	無限	無限	無限

§ X V

すでに § XI で述べたこと及び我々の表から明らかなように、筋肉小胞 AEBD 全体が完全な円形になることは決してありえない。その場合には弾性の絶対力が抵抗を無限に上回らねばならず、それは不可能だからである。したがって、筋肉の収縮には到達できない一定の限界がある。というのは、機械の最大収縮、抵抗の最大上昇は、その側の半分の長さを 100000 単位とすると 72728 単位に等しい。これから明らかなように、その小機械は最大限に伸びた状態からも、約 $\frac{1}{3}$ の部分までは収縮しない。このことは筋肉全体についても同様に考えるべきである。なぜなら、筋肉を構成するすべての小機械は同じように収縮するからである。単一の小機械の収縮と筋繊維全体の収縮の比は、それぞれの長さの比に等しい。

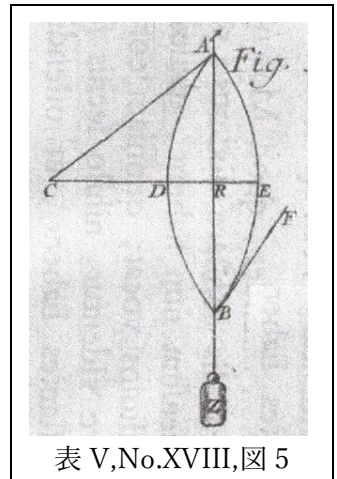


表 V, No. XVIII, 図 5

§ X V I

我々の考察をさらに進めるために、ここで取り上げるべきは、動物神経液そのものの量である。これらの量は、抵抗の上昇が常に同じであるとした場合、各抵抗に対して費やされる分量を意味している。§ X の末尾で我々は示したように、膨張力、運動性弾性空気、の絶対弾力は、等しい円形部分において、支える力に比例する。ところで、抵抗の上昇（または角 EBD）が常に一定であるとすれば、支える力はヴァリニョンの命題によって明らかなように、抵抗の大きさに比例する。したがって、抵抗は弾性にも比例しなければならない。ここで次のことを仮定する。運動性空気の量と、神経を流れる動物神経液の量とは、常に一定の比例関係を保つ。動物神経液の流体を 2 倍、3 倍、4 倍に増せば、それに応じて運動性空気の密度も 2 倍、3 倍、4 倍になるのである。ボイルの原理「密度は弾性力に比例する」という原理を仮定すると、事は簡単に済むであろう。動物神経液の量は運動性空気の密度に比例し、密度は弾性力に比例し、弾性力はさらに抵抗に比例するからである。したがって、動物神経液の量も抵抗力と同じ比率にあることになる。つまり、同じ高さ・同じ時間のあいだに 100 ポンドの重さを支えるためには、50 ポンドを支える場合の 2 倍の量の動物神経液が消費されることになる。他の場合も同様である。

§ X V I I

ところが、ボイルの原理を厳密に実験で確かめると、密度が弾性力に完全に比例するわけではないことがわかる。この差は、空気がそれほど濃くない状態で実験するときにはごくわずかで、ほとんど感じられないほどである。しかし、空気を非常に強く圧縮すると、その差は目立つようになる。そのときには弾性力が密度よりも急速に増大するからである。したがって、密度が増すにつれて弾性力がどのように増していくかを調べるのが、我々にとって重要である。この目的のために、ある体積 a の中に、空気または弾性流体の粒子が体積 b を占め、残りの部分 $a-b$ を微細物質が満たしていると考え。次に、同じ体積 a の中で、弾性流体の量が変化して体積 c を占める場合、残りの空間

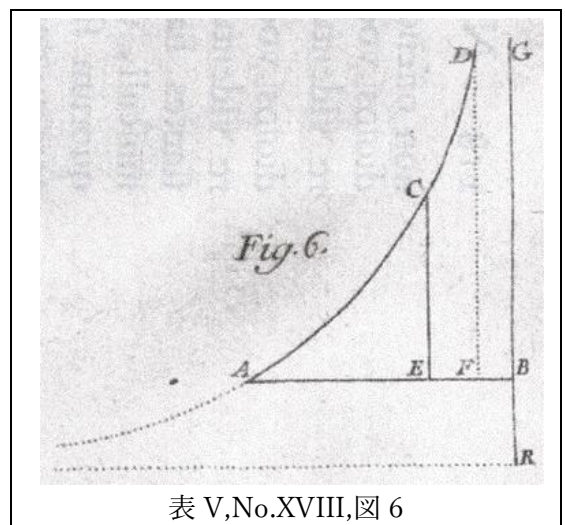


表 V, No. XVIII, 図 6

は $a-c$ となる。すると、兄の示した結果から（エーテルの重力についてのジュネーヴ版 P.37 以降、P.93 で異なる説明をしている）、最初と第二の状態における空気の弾性力の比は、微細物質の占める空間の逆比と空気部分の直接比とを組み合わせたと $(ab-bc):(ac-bc)$ に等しい。一方、密度の比は空気部分の体積比は $b:c$ である。したがって、座標軸 AF に沿って曲線 ACD を描き、軸上の距離 AE, AF を空気の密度の尺度とし、垂線 DF, CE を弾性力に対応させると、各点で長方形 $(BE \times AF)$ と $(BF \times AE)$ の比が垂線 DF:CE に等しくなるような曲線が得られる。この曲線は空気の密度に対する弾性力の変化を表すものである。もし代数的手法によって、曲線 ACD の性質を表す方程式を求めるなら、次のように得られる。AB を定数 a とし、BF を f 、DF を g 、横座標 AE を x 、縦座標 EC を y とすると、方程式 $fgx = aay - afy - axy + fxy$ が得られる。この方程式は、求める曲線が双曲線であることを示している。そして点 B における垂線（縦線）BG が無限大となることを意味する。したがって BG は双曲線の漸近線となる。その中心は、漸近線 GB を延長して点 R を得ることで定まる。ここで BR は、 $AF \cdot FD \cdot BF$ に対する第 4 比例項（ $AF:FD=BF:BR$ ）である。横の半軸は、BR と $2AB$ の幾何平均に等しい。

§ XVI I

これらのことから明らかになるのは、特に強く圧縮された空気における弾性力は、密度よりもはるかに急速な割合で増加するということである。密度は有限の最大値にしか達しないのに対し、弾性力は極限的には無限大にまで増大する。これまでの議論を実際の現象に適用するとこうなる。§ XVI で述べたように、同一の体積における運動霊気の密度は、それを血液との発泡反応によって生じさせた動物神経液の投入量に比例する。また、弾性力は抵抗力に比例することも示してある。したがって、前に導いた双曲線 ACD は、抵抗力と消費された動物神経液の量との関係を表す曲線である。つまり、もし CE, DF が抵抗を示すなら、AE, AF は消費された動物神経液の量を示す。筋肉装置の体積を AB とし、これを 10 単位の部分と仮定する。幾何図形上の定数 BF ($f=1$)、FD ($g=100000$) とする。精神流体の量 AE ($=x$) を 1 から 10 まで段階的にとると、曲線の方程式により、CE ($=y$) 「持ち上げられる重さ」が次のように求められる。

1234、2778、4762、7407、11111、16666、25926、44444、100000、無限

ここから、もし私の考えが誤りでなければ、われわれが日々経験し、しかも不思議に思う現象、われわれの力に見合う限りの重い荷も、小さな荷物とほとんど変わらぬ簡単さで同じ高さまで持ち上げられるという事実の理由が説明されるのである。筋肉運動において感じるあらゆる困難は、動物神経液の消耗にのみ由来する、と私は考える。しかし、その神経液の消費量は、持ち上げる重量の大きさに比べて、はるかに小さな割合でしか増えない。たとえば、持ち上げる重さが 2 倍になっても、神経液が 2 倍必要になるわけではない。これは、先ほどの表を見れば明らかで、神経液の量が 5 のときに比べて 8 のときには、持ち上げられる重さは実に 4 倍になっているのに、神経液の消費はせいぜい 8 対 5 の比率、つまり 2 倍にも達していない。したがって、実際に感じる労力もこの比率に従い、重いものを持ち上げるときの難しさがそれほど大きく感じられない理由もここにある。

§ XIX

ここで有益であると同時に興味深い考察が生じる。どのような方法によって疲労と強さの程度を評価すべきか、ということである。筋肉の疲れは、神経を流れる動物神経液の消費量に比例する。これを前提とする。もし筋肉が同じ高さで、同じ重さを支え続けているなら、一定時間ごとに一定量の神経液が失われていく、と考える。筋肉が常に張力を保っているなら、その膨張状態を維持するために、神経が

ら等量の神経液が絶えず供給されねばならない。そうでなければ、筋肉を膨らませ続けるための持続的な沸き立ちが途切れてしまう。神経から等しい速さで神経液が流出するなら、筋肉の疲労の度合いは経過時間に比例して増していくことになる。だがもし支える重さが異なる場合には、疲労の程度は単に時間だけでなく、重さに応じた神経液消費率にも比例する。その比率は、前章の表または双曲線方程式から数値的に求められる。

§ X X

同じようにして、筋力の度合いも定めることができる。力が二倍の人が、必ずしも二倍の神経液をもっている必要はない。たとえば、体格も筋肉の形も等しい二人を比較すると、一方がもう一方よりも二倍・三倍の重さを同じ高さまで持ち上げられるなら、通常われわれはその人を二倍・三倍の強さをもつと言う。しかし実際には、持ち上げる重さは消費される神経液の量と同じ比例ではなく、それよりもずっと急激に増加する関係にある。したがって、ほんのわずか多くの神経液を供給できるだけで、二倍あるいはそれ以上の力を発揮できることもあるのだ。しかし時間が足りず、他の仕事にも追われているため、ここで走り書きしたこれらの考察をさらに詳しく論じる余裕はない。ただ一つだけ読者に注意しておきたい。本書では、筋肉全体の一般的な働きとその運動の原理を述べることを目的とし、特に、身体の外形的・局所的な運動に関わる筋肉を主として念頭に置いてきた。したがって、筋肉を線形的かつ平行な繊維からなると述べたことを、どうか気に留めすぎないでほしい。なぜなら、たとえボレッリ (BORELLUS) が「放射状筋」と呼ぶような、繊維が放射線状に集まって見える筋肉であっても、その内部では繊維束の中の各繊維は互いに平行に並んでいることを、ボレッリ自身がすでに示しているからである (動物の運動について、第1部第80命題)。横隔膜、心臓、括約筋などのほかの筋肉も、その繊維の走り方が斜めであれ、螺旋状であれ、円形であれ、基本的には常に平行な筋繊維の構造をもっている。そして、それぞれが特有の構造を持つように造られていると同時に、特有の働きを遂行する。しかし、これらすべての筋肉に共通しているのは、それらの働きが、筋肉を構成する微小な繊維構造の膨張作用に依存しているという点である。したがって、人間の身体というこの大いなる機械の中には、運動しているどんな微小な部分であっても、魂が直接に命じるか、または筋肉によって動かされていないものは存在しない。すべての筋肉は、ここで説明した力学の法則に正確に、絶え間なく従って働き続ける。生命と死の支配者が、身体と魂の奇しき結合を解き、この全体の機械の運動そのものに終わりを告げる、その瞬間まで続くのである。

No. XIX

ヨハン・ベルヌーイ氏による、与えられた点から等速に離れていく
曲線を代数曲線の弧長を用いて作図する方法

私はかつて、ここに扱う問題に挑戦したことがあると、率直に認めた。しかし当時は急ぎの身で、他の仕事にも追われていたため、ある小さな疑問に行き当たったものの、それを解決する余裕がなかった。そこで、私はいったんこの問題から完全に手を引いた。ところが最近、学術誌 6 月号を読み返していた際、思いがけず、そして予想もせずに、この問題の兄による解法や、それに関係する論文を見つけたのである。こうした経緯をきっかけに、かつて未完成のまま放置していた自分の解法を再び手に取り、幸運にもそれを完成させることができた。たいした時間はかからなかった。ほんの少し試みただけで、兄のものよりも優れた構成法に到達したのである。私は代数曲線の弧長を使って兄と同じ結果を、より簡単に得ることができたからだ。兄はこれを機械曲線の弧長によって求めていたが、私の方法はそれよりずっと簡単である。しかも、私はスパイラルにおける接円の半径をわざわざ計算する必要すらない。

学術誌 Acta Eruditorum
の 1694 年 10 月号 P.394

ヤコブ・ベルヌーイ氏によるライプニッツ氏の問題の解法「与えられた一点からの均等な接近と離脱をなす曲線について、弾性曲線の長さを媒介として」、学術誌 Acta Eruditorum の 1694 年 6 月号、P.276

私の作図の前に、それに至るまでの計算過程を掲げておくことにした。これは、この作図が兄の方法を模倣したものだと誤解されないようにするためでもあり、そして何よりも、単なる作図そのもの（それを見ただけでは賢くなれないようなもの）ではなく、そこに含まれる理論的計算から、読者が真の利益を得られるようにするためである。まことに願わしいことだが、学者たちが皆この点でライプニッツ氏を見習ってくれればと思う。なぜなら、ライプニッツ氏という最高の幾何学者は、ただ自分の優れた発見を学界に示すだけで満足せず、無限の科学を包み込む独自の著作において、解析的手法そのものをも近く発表しようとしているからである。この著作についても、また彼の他の試みについても、我々は多くを期待している。

解析

さて、もとの課題に戻ろう。いま求める曲線を ABC とする。これは、ある物体が与えられた高さ PA から落下した後、その曲線上を運動し、一定の時間ごとに点 A から等しい距離だけ離れていくようなものである。

半径 AP で円周 PFH を描く。この円周を横切るように線 AB を引き、交点を E とする。さらに、PA の延長線に対して、BL および EG を垂線として下ろす。つぎに、A を中心として弧 $b\beta$ を描き、この弧が AB の上から小区間 $B\beta$ を切り取るようにする。この区間 $B\beta$ は、物体がその瞬間に A から離れる距離（瞬間的な後退量）に等しく、したがって、重体が最初の瞬間に曲線上を実際に進む小部分の長さにも等しい。さて、次のように置こう。 $AP = a, AB = x, AG = y$, 弧 $HE = z$, $Ee dz, B\beta dx$ 。

$Ae : Ab = Ee : b\beta$ だから、 $b\beta = xdz : a$ 。したがって、 $Bb = \sqrt{(aadx^2 + xxdz^2)} : a$ 。 $B\beta$ は、物体が点 A においてその瞬間に通過する曲線の微小部分に等しいと仮定されている。したがって、物体が bB を通過する時間と等しい時間で $B\beta$ を通過するならば、 bB は $B\beta$ に対して、点 B における速度と点 A における速度の比のように比例する。ところで、重力による落下の性質から、その比は $\sqrt{PL} : \sqrt{PA}$ であ

る。よって次のような式が得られる。 $\frac{\sqrt{(aadx^2+xxdz^2)}}{a}:dx=\sqrt{\left(\frac{xy}{a}+a\right)}:a$ 。両辺を2乗すれば、

$aadx^2 + xxdz^2 : aadx^2 = xy + aa : aa$ 。これを割り算して整理すると、 $xxdz^2 : aadx^2 = xy : aa$ 。比例式を等式に還元すれば

、 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dz}{\sqrt{y}}$ 。しかし、円の性質から $dz = ady : \sqrt{(aa - yy)}$ であるから、

$dx:\sqrt{x}=ady:\sqrt{(aay-y^3)}$ 。これが求める曲線の微分方程式である。ここで、未知数 x,y とその微分 dx,dy は、これ以上の探求を要せず自然に分離できる。他の線分を未知数として取る場合にはそうは

ならない。これこそが、計算における全ての秘訣である。このような計算法において最も習熟していたライプニッツ氏でさえ、もし今までこの点に気づかなかったとしても、それは不思議ではない。これは勤勉な考察というより、むしろ偶然の選択によって到達されるものだからである。なぜなら、それは未知数をどの線として選ぶかという、偶然的かつ恣意的な選択にのみ依存しているからである。さて、今後なすべきことは、すでに得られた微分方程式から、できるだけ簡便に問題を構成することである。

曲線の面積[その横座標を y とし、縦座標を $aa\sqrt{a}:\sqrt{(aay-y^3)}$ とするを求積することによって構成できることは明らかだが、実際には面積の求積は簡単ではない。したがって、別の方法として、ある曲線の長さを求めることでこれを試みるべきである。そしてもしその曲線が代数的に表されるなら、幾何学の原理に照らして、わざわざ機械的手法に訴える者は誤っていると見なされるべきである。特に、その機械的手法自体が、結局は面積の求積という同様に煩雑な作業によってしか記述できないとすれば、なおさらのことである。そこで私は、兄にさえまだ知られていない私自身の方法を示そう。そ

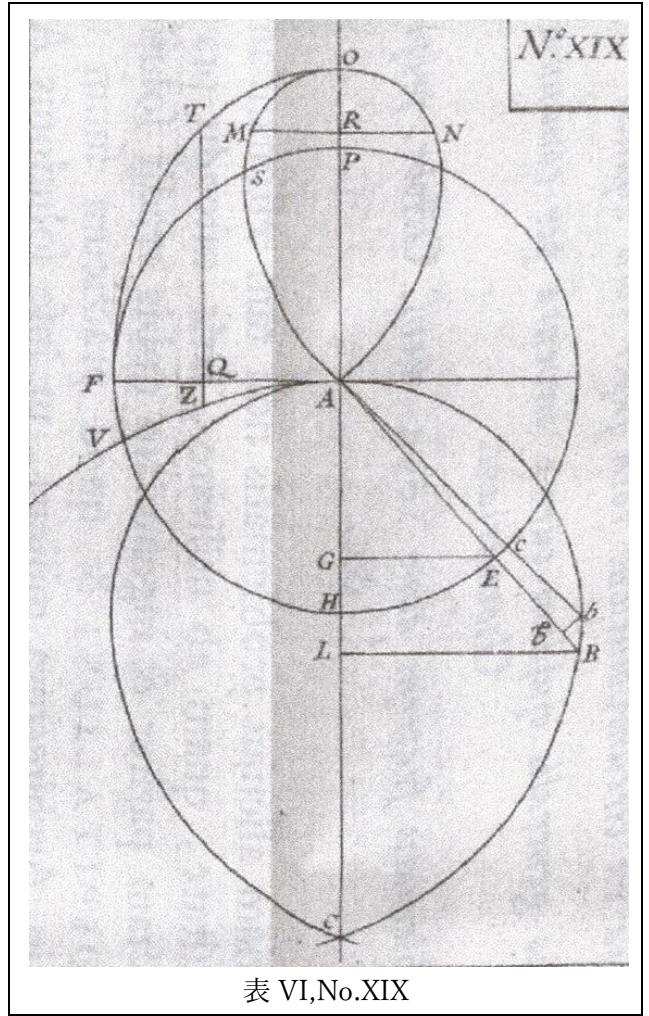


表 VI, No. XIX

れは、ある代数曲線に到達し、その曲線の直線化によって問題を構成するものである。微分方程式 $dx:\sqrt{x}=ady:\sqrt{(aay-y^3)}$ が得られた。ここで右辺の項 $ady:\sqrt{(aay-y^3)}$ は「非可積分の項」であると私は呼ぶ。その積分（または総和）は代数的な量では表せないからである。そこで、その項を二乗して $aady^2:(aay-y^3)$ を取る。そしてその平方項、またはその倍数・約分形を、ディオファントス的手法によって二つの他の平方に分ける。その平方根がもし可能であれば「積分可能」となるようにする。もしそうでなければ、単に機械的な曲線が生じるにすぎない。ここで、次の倍数平方項 $a^3dy^2:(2aaay-2y^3)$ を二つの平方に分ける。 $(aa+4ay+yy)dy^2:(4ay+4yy)$ 及び $(aa-4ay+4yy)dy^2:(4ay-4yy)$ 。これらの平方根）はそれぞれ、 $(ady+2ydy):2\sqrt{(ay+yy)}$ 及び

$(ady - 2ydy) : 2\sqrt{(ay - yy)}$ となるそして、これらの積分はそれぞれ $\sqrt{(ay + yy)}$ 及び $\sqrt{(ay - yy)}$ となる。横座標を $AR = \sqrt{(ay + yy)}$ 、縦座標を $MR = \sqrt{(ay - yy)}$ として、次のような曲線 AMONA を構成する。[横座標と縦座標が、同じ直径と同じ横距離 y をもつ等軸双曲線と、円の対応する縦座標に一致するようなものであるすると、この曲線の微分的要素 ds は次のようになる。

$$ds = dy \sqrt{\left(\frac{aa + 4ay + 4yy}{4ay + 4yy} + \frac{aa - 4ay + 4yy}{4ay - 4yy} \right)} = \frac{dy \sqrt{a^3}}{\sqrt{(2ay - 2y^3)}} = dx \sqrt{a} : \sqrt{2x}$$

よって、最初の式の積分は最後の式の積分と等しくなる。したがって曲線 $AM = \sqrt{2ax}$ 、逆に $x = \overline{AM^2} : 2a$ である。

構成。以上のことから、この問題の非常に簡単な構成が導かれる。すでに前に定めた線や点をもとに、必要ならば線 AE を延長して点 B を取る。ただし、AB が HP および AM に対して第 3 比例項になるようにする。すると、その点 B は、所望の曲線 ABC 上にあり、もし物体が点 P からこの曲線に沿って落ちるなら、等しい時間ごとに点 A から等しい距離だけ離れていくことになる。

構成による証明はここでは省略する。それは、前に示した解析的方法から誰でもすぐに組み立てることができるからである。また、この結果から主要な性質も簡単に導かれるが、それらを一々列挙するつもりもない。ただ一つ注意しておきたいのは、曲線 ABC に沿って曲げた板ではなく管を用いなければならないという点である。なぜなら、小球は下るときに曲線の凸面すべてに常に密着しているわけではないからだ。さらに、曲線が自らと交わる点 C から頂点 A までの距離は、AH の 2 倍より大きい。これは、直前の図に描かれているものとはやや異なっている。曲線 AMONA は 4 次曲線であり、A 点で自らと交わる。これを延長すると、上部と相似かつ等しい下部を生じ、A 点において角 MAN およびその対角を直角に作る。また、円弧 HFP は、その軸 AO から最も遠い点 S を通過する。ここでちょうど、弾性曲線を構成するための方法が都合よく現れる。それは、曲線 AMO とある楕円の弧長だけを用いて実行できるもので、面積の求積を前提とする方法よりも、実際にははるかに簡単である。半軸 AO と、それに垂直な円半径 AF によって楕円の弧 FTO を構成する。その楕円弧内に任意の垂線 TQ を引き、

$$AR = \frac{AQ}{AF} \sqrt{(AF^2 + AQ^2)} \text{ とする。さらに } QZ \text{ の長さを、楕円弧 TO に } AO \cdot AF \cdot AM \text{ の第 4 比例項}$$

を掛けたものに等しく取る。そうすれば、点 Z は弾性曲線上にある。証明は構成と同じくらい簡単である。 $AQ = x$ 、 $QZ = y$ とおくと、弧 TO の微小要素（楕円の性質） $= (aadx + xdx) : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ であり、また曲線 AM の微小要素（性質と構成） $= aadx \sqrt{2} : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ である。 $AO \cdot AF \cdot AM$ に対する第 4 比例項（四つ目の比例量） $= aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ となる。よって弧 TO $-\frac{AF \times AM}{AO}$ 、QZ の微小要素 $= xdx : \sqrt{(a^4 - x^4)} = dy$ となる。これは兄が弾性曲線の構成のために提示したのと同じ方程式である。兄は、この方程式がいかなる円錐曲線の弧の長さにも関係しないと考えたが、それは誤りであった。実際には、少なくとも部分的には、この方程式は楕円曲線の長さの直線化に依存しているのである。

No. XX 一次微分方程式を構成する一般的方法 ヨハン・ベルヌーイ

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1694 年 11 月号 P.435

逆接線法（微分の逆法）を完成させるために、欠けているものは、一次微分方程式における未知量の分離、変数の分離である。この目的のために、私はすでに多くの個別的規則を見いだしている。しかし、あらゆる微分方程式に普遍的に適用できる一般的な分離法は、ほとんど期待できないものである。

私は、変数の分離がほとんど不可能であることを、すでにしばらく前から考えていた。そのうちに、「もしや、あの分離法を用いずとも、微分方程式を構成することができるのではないか」と思い付いた。そして、その望みどおりに成功したのである。もっとも、私がこれまでに発見したいくつかの方法のうち、ここで述べる方法が現時点では最も扱いやすいと思われる。よりよい方法が将来見いだされるまでは、これはいわば「神聖なるいかり」のようなものであり、未知量の分離に基づくすべての規則が破綻したときに、再び立ち戻るべき拠りどころとなるであろう。

任意の一次微分方程式は、 $sdx = zdy$ という形に表すことができる。ここで s および z は、 x, y および定数から成る量を示すものとする。いま dy と dx の比が m 対 a であると仮定する。この比 m は、曲線上の各点で変化する。すると微分方程式は $as = mz$ という形に書き換えられ、これは s, z, m, x, y, a という 3 つの未知量を含む。その軌跡は無限に多くの代数曲線から成り、それらを指導曲線と呼ぶことができる。これらの曲線は、3 つの未知量のうち一つ（たとえば m ）を定数とおくことで構成され、その結果、二つの未知量だけを含む方程式が得られ、それが無数に存在する指導曲線のうちの一本を与える。この定数 m の値を大きくしたり小さくしたりすれば別の指導曲線が得られ、この操作を無限に続けると、同一の軸上に無限の指導曲線が構成される。したがって、 m と a 、 dy と dx との比は、取りうるあらゆる値をもつことになる。このとき、任意の二つの近接した指導曲線のあいだに、一本の微小な線分を引く。その線分の軸に対する傾きの正弦が、その余角の正弦に対してちょうど m と a の比になるようにする。この操作を全域にわたって行い、さらに、描いたすべての線分をそれぞれ自分の指導曲線に常に密着したまま、平行に上下へ滑らせていく。こうしてそれらが互いに連結されるとき、求める曲線ができる。

したがって、同じ微分方程式を満たす曲線は無数に存在する。固定していた微小線分を少し高く、または低く取ると、毎回異なる曲線が生じるからである。ここで注意すべきは、その線分が自分の指導曲線にちょうど接するところで、求める曲線は反対の変曲点を持つ、ということである。これは少し考えれば誰にも明らかであろう。したがって、指導曲線が直線である場合を除き、あらゆる微分方程式は、反対の変曲点を有する無数の曲線を与える。その中でただ一つ、変曲点が頂点または他の特定の点と一致して消滅してしまう曲線があるかもしれない。たとえば、微分方程式 $axdx = yydy$ を考える。これに対応する曲線として第二種 3 次放物線 $\frac{1}{2}axx = \frac{1}{3}y^3$ がある。この曲線には変曲点は存在しない。し

かし同じ種類の曲線で、 $\frac{1}{2}axx = \frac{1}{3}y^3 \pm b^3$ の形をした無数の曲線もあり、これらも同じ微分方程式

$axdx = yydy$ を満たす。そしてそれらはすべて、互いに反対方向の変曲点をもっている。以上のことから明らかなように、各曲線の変曲点は、それ自体で新たな曲線を形づくる。そして驚くべきことに、そ

の変曲点が属するもとの曲線が非代数的曲線であったとしても、それらの変曲点を結ぶ曲線は常に代数曲線となる。例を挙げよう。微分方程式 $xxdx + yydx = aady$ を考える。これが変数分離によって構成できるかは試していないが、先に述べた一般的な方法でこれを解くと、 $xx + yy = am$ という式が得られる。すべての指導曲線は原点を中心とする同心円である。よってこの微分方程式には無限に多くの曲線が含まれ、それらの各曲線の変曲点は、次のように定まる代数曲線上に並ぶ。同心円の中心から軸に垂線を引き、その垂線上で中心から距離 $a\sqrt{(am : (aa + mm))}$ の点を取る。その点を通る軸に平行な線を引くと、半径 $\sqrt{am}$ の円と交わる。その交点が、求める曲線上の一点である。あるいは、横軸 r 、縦軸 s として次の方程式 $s^3 + rrs = aar$ をもつ曲線を構成してもよい。この曲線こそが、すべての曲線 $xxdx + yydx = aady$ に属する変曲点を通過するものである。

ところで、この一次微分方程式の普遍的構成法の理念は、二次あるいはそれ以上の高次の微分方程式にも拡張することができるであろう。しかしその完全化の荣誉は、より多くの時間のある他の人々に譲ることにしよう。

№. XXI

一般的な級数を用いてすべての曲線の面積及び長さを求める方法に関する補遺

私は、すでに述べた微分方程式から曲線を構成する一般的方法に密接に関連するものとして、空間や曲線の一般的な次元をここに付け加えることにする。この種の方法は、あの著名なライプニッツ氏もまたライプツィヒ学術誌 *Acta Eruditorum* の 1693 年 4 月号（ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ著、実用幾何学の補遺、あるきわめて一般的な新しい方法によって無限級数を用い超越的な問題にまでその応用を拡張したもの。学術誌 *Acta Eruditorum* の 1693 年 4 月号 P.178。）で示しており、彼の考案はきわめて巧妙であり、あらゆる曲線に普遍的に適用できるという点で大いに賞賛された。ところで、どの例においても、個別の計算を行わねばならず、その結果、求めるものに対応するのは常に個別の級数にすぎない。それゆえ、ここではあらゆる曲線の面積及び長さ、及びその他の微分の積分を一般的に表す普遍的な級数を掲げることにしよう。

空間・曲線などの要素は、一般に ndz の形で表せる。しかし ndz をそのまま積分することは、与えられた条件が不十分なためにできない。そこで、 ndz に何かを加え、同じものを引くことで（値を変えずに）その和と差の部分を実に積分できるようにする。そのために、 dz を定数とみなして、次のような級数展開を作る。 $ndz = +ndz + zdn - zdn - \frac{zzddn}{1.2.dz} + -\frac{zzddn}{1.2.dz} + -\frac{z^3dddn}{1.2.3.dz^2} \dots$ 。 ndz の積分は、級数の形に還元され、各項を順に積分することによって求めることができる。隣り合う二つの項が互いに反対符号をもつとき、それらは互いに打ち消しあう。したがって、このような項を無限に続けた級数全体は、結局ただ ndz だけに等しくなる。一方、同じ符号をもつ隣接 2 項については、その積分を個別に取ることができる。したがって、この方法によって次のような最も一般的な積分級数が得られる。

$\int ndz = +nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4dddn}{1.2.3.4.dz^3} \dots$ 。この式をどんな具体的な場合に適用しても、微分項 $dn, ddn, dddn, \dots$ や $dz, dz^2, dz^3, \dots$ の項はすべて消えてしまう。それらの関係は与えられた条件のもと

ですすでに代数的な量で表されているからである。この級数全体は純粹に代数的な項だけから成る。

ライプニッツ氏の例を取ろう。対数を求めたい数を $a+x$ (略して r) とし、その対数を y とする。

すると微分方程式は $dy = \frac{adx}{r}$ 、 $y = \int (adx:r)$ となる。この積分は、前に導いた普遍級数を使えば簡単

に級数形に書き直せる。実際、 $z=x, dz=dx, n=\frac{a}{r}, dn=-\frac{adx}{rr}$ (なぜなら $dr=dx$)、 $ddn=\frac{1.2.adx^2}{r^3}$,
 $dddn=-\frac{1.2.3.adx^3}{r^4}, \dots$ とおくと、一般形は次の特殊級数に変わる。

$y = \frac{ax}{r^1} + \frac{axx}{2r^2} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4r^4} + \dots$ 。これは形式こそライプニッツ氏の展開と異なるが、値は同じ対数を与える。

逆に、対数を与えられてその数を求めたいときの微分方程式は $dx = rdy:a$ となる。普遍級数の式に

$z=y, dz=dy, n=\frac{r}{a}, dn=-\frac{rdy}{aa}$ (なぜなら $dr=dx$)、 $ddn=\frac{rdy^2}{a^3}$, $dddn=\frac{rdy^3}{a^4}, \dots$ 用いると、

$x = \frac{ry}{a} - \frac{ryy}{1.2.aa} + \frac{ry^3}{1.2.3.a^3} - \frac{ry^4}{1.2.3.4.a^4} + \dots$ という級数が得られる。 $\frac{x}{r}$ より、

$\frac{x}{a+x} = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{1.2.a^2} + \frac{y^3}{1.2.3.a^3} - \frac{y^4}{1.2.3.4.a^4} + \dots$ となる。 $\frac{x}{a+x}$ が分かれば x も求められる。

与えられた円弧と半径から正弦を求める問題も、同じ方法で簡単に解ける。円弧を y 、正弦を x 、半径を a とし、余弦を $r = \sqrt{aa-xx}$ とおくと、微分方程式は $dx = rdy:a$ となる。これを前に導いた普

遍級数に代入し、 $z=y, dz=dy, n=r:a, dn=-\frac{xdy}{aa}$ (なぜなら $dr=-xdx:r$)、 $ddn=-\frac{rdy^2}{a^3}$,

$dddn=\frac{rdy^3}{a^4}$, $ddddn=\frac{+rdy^4}{a^5}, \dots$ とおけば、一連の微分関係から次の級数が得られる。

$x = \frac{ry}{a} + \frac{xyy}{1.2.aa} - \frac{ry^3}{1.2.3.a^3} - \frac{xy^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{ry^5}{1.2.3.4.5.a^5} + \dots$ 。これらの項を x 倍し、他方の辺に移項し、両方の級数を割り算すると $x:r$ が得られる。つまり、

$$x:\sqrt{aa-xx} = \left(y - \frac{y^3}{1.2.3.a^2} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5.a^4} - \dots \right) : \left(a - \frac{yy}{1.2.a} + \frac{y^4}{1.2.3.4.a^3} - \dots \right)$$

が得られる。したがって、この比 $x:\sqrt{aa-xx}$ がわかれば、 x も求められる。ここで注目すべきことは、分母の級数が余弦に等しくなるという点である。ライプニッツ氏によれば、分子の級数は正弦に等しいことが知られているからである。

学術誌 Acta Eruditorum に掲載した最後の例は、ド・ボーン(D. de Beaune)がデカルト(Cartesius)に提出した問題であり、その作図は私はすでに以前に同誌で示してある。問題は次の通りである。もし座標を S, y としたとき、接線のサブタンジェントが $(yy-sy):a$ に等しいような曲線を求めよ。これは、その微分方程式は $ds = (ydy-sdy):a$ である。もし与えられた横座標 y に対して縦座標 s を級数で表したければ、 $y-s=r$ とおき、一般級数において $z=y, dz=dy, x=r:a$,

$dn = \frac{ady-rdy}{aa} \left(\text{なぜなら } dr = \frac{ady-ydy+sd y}{a} \right)$, $ddn = \frac{-ady^2+rdy^2}{a^3}$, $dddn = \frac{ady^3-rdy^3}{a^4}, \dots$ とお

く。すると $s = \frac{ry}{a} - \frac{(a-r)y^2}{1.2.a^2} - \frac{(a-r)y^3}{1.2.3.a^3} - \frac{(a-r)y^4}{1.2.3.4.a^4} - \dots$ となる。したがって、 $\left(s - \frac{ry}{a} \right) : (-a+r)$,

$(as - yy + sy) : (-aa + ay - as) = \frac{yy}{1.2.aa} + \frac{y^3}{1.2.3.a^3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.a^4} + \dots$ となり、この比

$(as - yy + sy) : (-aa + ay - as)$ がわかれば、 s が求められる。

比類なきライプニッツ氏に敬意を表して指摘しておきたい。彼の方法によれば、求められた結果はすぐに単独で、他の量に依存することなく得られる。しかし、私の方法もまた、その普遍性によって大いに称賛に値することを、彼も認めてくれるに違いない。

No. XXI

高名なるロピタル侯爵による、ある学識深い幾何学者が提出した物理数学的問題の解法

問題

木製の橋 AB が軸 A のまわりに回転できるものとする。(図 1・2・3 を参照) その上方 C に滑車があり、索 BCM がそれに巻きかけられている。この索の一端は橋を支え、もう一端には重りまたは荷物 M がつながっている。さて、曲線 CMN または LMN はどのような形であるべきか——重り M が曲線上のどの位置にあっても、橋 AB が常に釣り合いを保つようにするには、その曲線はどんな形でなければならないか。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1695 年 2 月号 P.56

解答

橋 AB の重さを、点 B に集中しているものと仮定し、その重さを垂直線 AC で表すことにする。このとき、三つの異なる場合が考えられる。第 1 の場合は、重り M を表す線が、索 BCM の長さに等しいとき。第 2 の場合は、その線が索 BCM の長さを超えるとき。第 3 の場合は、その線が索 BCM の長さより短いとき。

一般的な構成法

中心を C とし、半径 CQ (これは索 BCM の長さに等しい) で描かれた円周 QDN 上の任意の点 D から、垂線 DG と半径 CD を引く。索 BCM (あるいは半径 CQ) の長さ = a 、重り M を表す線の長さ = b 、横座標 CG = z とする。このとき $CM = 2a - 2bz : a$ と取れば、点 M は求めるべき釣り合い曲線上にある。したがって、第 1 の場合 $a = b$ の作図は非常に簡単である。この場合は CM を単に GQ の 2 倍に取ればよい。この後、これらの曲線のいくつかの具体的な形を求めることにしよう。

1. $z = aa : 2b$ とおくと、AC に垂直な直線が、曲線 CMN (または LMN) に点 N で接する。この点 N は、円周を横切る点であり、かつ水平線に最も近い位置にある。したがって、提示された目的 (橋と重りの釣り合いの条件) に関係するのは、曲線 CMN または LMNのうち、N 点までの部分だけである

2. 橋の長さに等しい水平線 AH を引き、斜辺 CH = c とする。もし第 1 および第 2 の場合において $a = c$ の場合、曲線 CMN の全体が有効部分 (釣り合いに寄与する

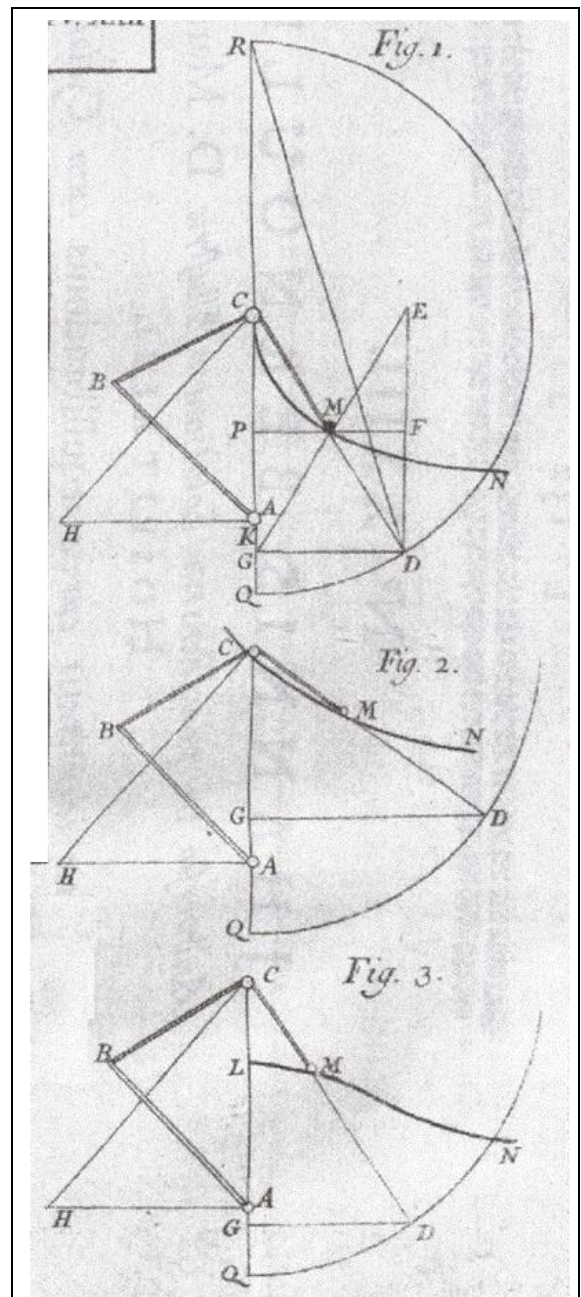


表 VI, No. XXII, 図 1, 2, 3

部分)となる。しかし、 a が c より大きい場合は、条件を満たす部分 MN のみであり、次の関係で定まる。 $CG=(aa+ac):2b$ 。

3. 前の二つのケースでは、曲線はいずれも中心 C を通過する。ただし違いがある。第一の場合には、曲線の接線は垂直線 AC であるが、第二の場合にはその垂直線 AC を斜めに横切り、そのときの交わる角度は、 $z=aa:b$ という関係によって定まる。第3の場合の曲線は中心を通過せず、むしろ中心の下方の点 L において、垂直線 AC と直角に交わり、その距離は $CL=2a-2b$ である。

4. それぞれのケースの曲線は、いずれも閉じた形をなす。ただし次のような違いがある。第1および第3の場合には、曲線は中心 C の上方に延長された垂直線 AC を、中心から距離 $2a+2b$ の点で直角に交わる。一方、第2の場合には、同じ垂直線 AC をさらにもう一つの点で横切り、その点は中心から距離 $2a-2b$ の位置にある。したがって、これらの三つの曲線の形状は図4,図5,図6に示されているようなものである。

5. これらの曲線における最大幅の点を求めるには、次の関係式を用いればよい。

$z=(aa \pm a\sqrt{(aa+8bb)}):4b$ 、ここから次のことが分かる。第1および第3の場合では、真の根は半径と等しいかそれより大きいため、使用できるのは偽の根のみである。一方、第2の場合では、両方の根が半径より小さいため、そのどちらも有効に使うことができる。実際、図5を見ると、この場合には二つの最大幅の点が存在することがよく示されている。

6. 第3の場合の曲線 LMN (図3,図6参照)は、点 L と N のあいだに曲率が逆転する点を持っている。この点は、 $z=(aa+2bb):3b$ とおくことで求められる。頂点 L における接触円の半径は $L=(2aa-4ab+2bb):(2b-a)$ で与えられる。パラメータは、 $b=(a+c):2$ と取るべきである。したがって、この第3の場合に限って、重り M の値は自動的に決定されるが、他の二つの場合では重さは任意に選ぶことができる。

7. この曲線全体で囲まれる面積は、自らを生成する円4個分の面積と、半径 b の円2個分の面積を加えたものに等しい。したがって、第1の場合、 $a=b$ のときには、この面積は生成円1個の6倍にあたる。

8. 第1の場合においては、曲線全体の長さは、その生成円の半径の16倍に等しい。一般的には、曲線の任意の部分 CM の長さは、4つの直径 RQ の和から、4つの弦 DR の和を引いた値に等しい。

この問題は軍事建築においても応用と利用の可能性をもっている。私はこの問題を、解析幾何(サーヴァール殿へ)に非常に熟達したある幾何学者から提示された。彼は、ついに解法への道筋を見つけたと語ったが、曲線の性質を明らかにする前に、なんと27もの異なる比例式を立てなければならなかったという。その計算はあまりに長大で複雑であったため、最終的な解を完成させることができず、曲線上の点を近似的に定めるにとどまった。しかし、実用上はそれで十分だと考えていたのである。これまで述べた構成からも十分に分かるように、この曲線はどの円錐曲線にも劣らず、きわめて簡単に描くことができる。私が用いた方法は、ライプニッツ氏の方法と同一である。ここにその手順を示そう。それに

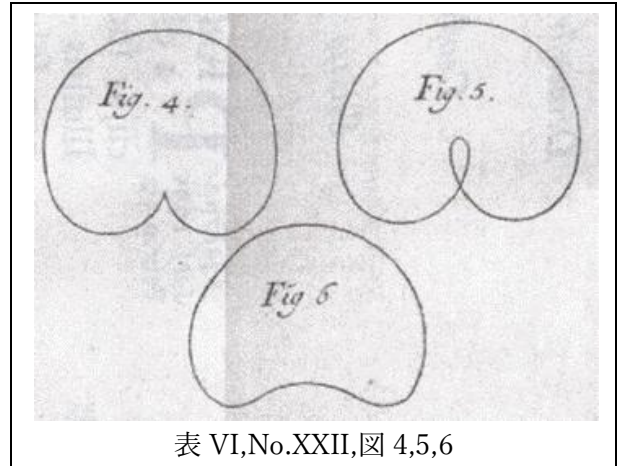


表 VI, No. XXII, 図 4, 5, 6

よって、われわれがこのように有用な発明の公表によってライブニッツ氏という学識豊かな創始者にどれほどの恩義を負っているかが明らかになるだろう。まさに彼の方法のおかげで、数学から物理学への扉がかくも見事に開かれたのである。

まず、この問題から力学的な要素を取り除き、純粋に幾何学の問題として扱う。そのために次のように考える。橋 AB の重さを、点 B に固定された重りとして扱い、それが中心 A、半径 AB の四分円の円周に沿って動けるとする。この重りの重力方向を垂直線 AC で表すならば、静力学の法則によって、線 BC は橋を支えるために必要な反対の重さを表すことがわかる。いま、曲線 CMN（または LMN）が求める性質を備えており、橋と釣り合う重りが点 M にあるとするならば、点 M において曲線に立てた垂線 MK を考え、もし $CK : CM$ の比が、重り M とある第 4 の比例線との比と同じであるとすれば、その第 4 の線は BC に等しくならなければならない。したがって、中心 C、半径 CQ が弦 BCM の長さに等しい円を描き、それが CM を D で切る。AC に平行で長さ b に等しい DE を引くと、直線 EM は点 M で曲線 CMN に垂直に接しなければならない。あるいは同等に、点 M で曲線に立てた垂線 KM を延長すれば、それは平行線 DE を E で切り、その切片 DE の長さが常に b に等しくなる。三角形 CMK と DME が相似であるため $CK : CM = DE : DM$ が成り立ち、また半径 CD が BCM に等しいので、比例関係の第四項 DM は、線 BC に等しくなる。よって、橋 AB と重り M は常に平衡状態にある。問題はただ一つ、垂線が常に一定の長さ b をもつ平行線を切るような曲線を見出すことである。

AC に垂直な PMF を引き、未知数として $CP = x$ 、 $PM = y$ とおく。既知の長さとして CQ（または弦 BCM） $= a$ 、 $DE = b$ とする。直角三角形 CPM により $CM = \sqrt{xx + yy}$ が得られ、相似三角形 CMP と CDG により DG （または PF） $= ay : \sqrt{xx + yy}$ 、 $CG = ax : \sqrt{xx + yy}$ となる。したがって、垂線上の差 $PF - PM$ 、 $MF = ay : \sqrt{xx + yy} - y$ 、水平方向の差 $DE + CP - CG$ 、 $FE = b + x - ax : \sqrt{xx + yy}$ 。相似三角形 MPK と MFE の比例から、 $MF : FE = MP : PK = dx : dy$ 、 $b dx + x dx - ax dx : \sqrt{xx + yy} = ay dy : \sqrt{xx + yy} - y dy$ 。この微分方程式を積分すると、 $a \sqrt{xx + yy} = bx + \frac{1}{2} xx + \frac{1}{2} yy$ あるいは $bx + \frac{1}{2} xx + yy = ff$ となる。これは求める曲線の固有方程式であり、前節までの幾何学的構成はこれから導かれる。

No. XXIII

ヨハン・ベルヌーイ氏による、尊敬すべきロピタル侯の前述の解法
への注釈

平衡曲線が、等しい半径の二つの円が互いに転がるときに描かれるサイクロイドと同一であることの証明。同じ曲線を、通常の幾何学によって一般的に構成する方法。1694年10月に兄が提示した問題に対する解答。

ある問題の価値というものは、その難解さによってではなく、その有用性によって評価されるべきであることを、本稿は十分に示している。著名なるロピタル侯が我々に簡潔かつ巧妙な解法を伝えてくれている。そしてその実的な応用は、著者自身が指摘するように、軍事建築の分野に限らず、市民建築においてもきわめて広範に及びうるのである。たとえば、地下室の扉を開くとき、作業場の翼部を持ち上げるとき、あるいはさまざまな種類の門を降ろすときに、どれほどの困難がしばしば克服されねばならないか、である。その困難がどれほど大きくとも、釣り合いを取るための金具や、著者がそれらに割り当てた曲率を持つよう適切に設計された板によって、うまく調整することができる。そのようにすれば、この種の機械は、子供でさえ危険なく操作できるほどになる。そして、そこからさらにどれほど多くの日常的な応用が生じうかは、各人が自ら考えてみるがよい。

われわれが問題を解く際に主として目指すのは、理論的な考察を終えたのち、最も単純な作図法へと導く簡単な道を見いだすことである。そして、私が実際の応用において最も便利と考える作図法は、点の連続的な運動によるか、あるいはライブニッツ流の引きずりによる方法である。なぜなら、曲線上の点の一つ一つ求めて描くような方法は、実用的というよりはむしろ理論的なものと呼ぶべきだからである。しかしこの関係から、いわば一つの法則として、連続的運動の条件が導かれる。同様に、侯爵殿が自らの平衡の曲線を定めるために提示した代数方程式から、私は、この曲線が、実に注目すべきことに、サイクロイドの一種に属していることを見いだした。したがって、それはきわめて単純で、実際の応用にもたいへん適した運動によって描くことができる。

円 SOT を、それと等しい円 RVT の上で回転させ、その回転の始点を点 V とする。軌跡を描く点 M は、円 TO の周上にとっても、外側または内側にとってもよい。私は、このようにして描かれるサイクロイド CMN が、いわゆる平衡曲線であることを主張する。その証明は次の通りである。中心 R と S を結び、直線 SM を延長して延長した RV と交わる点を X とする。SM に等しい長さの RC を取り、RC を半径とした円と同じ半径をもつ円 CQD を描く。中心 C から点 M を通って半径 CMD を引き、点 D から垂線 DG を下ろす。サイクロイドの性質から、弧 TV は弧 TO に等しい。したがって、角 XRS は角 XSR に等しく、辺 XR と XS も等しい。垂線 XT を引けば、それは接点 T を通る。RC=SM であるため、線分 CM は RS に平行となる。∠GCD は∠XRT に等しい。ゆえに、三角形 CGD と RTX は相

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1695年2月号 P.59

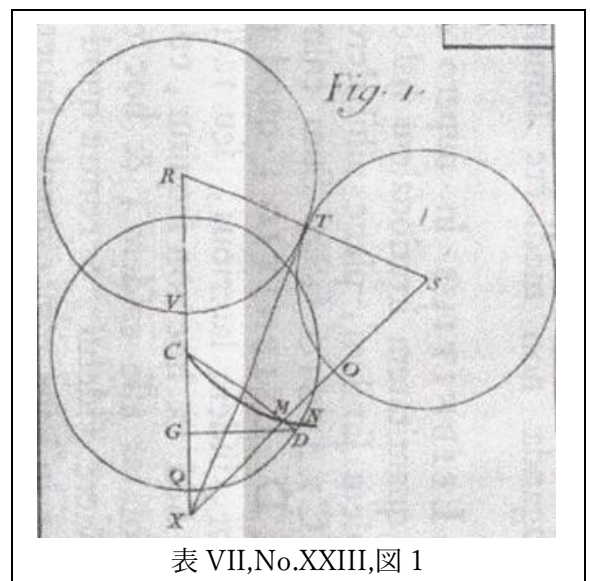


表 VII, No. XXIII, 図 1

似であり、また三角形 XRS と XCM も相似である。ここで、次のようにおこう。線分 RT (又は ST, CD) = a 、線分 SM (又は RC) = b 、線分 CG = z とする。すると、比例関係 $CG(z) : CD(a) = RT(a) : RX = aa : z$ が成り立つ。したがって、 $RX - RC, XC = aa : z - b$ 。また、 $XR : RS = XC : CM$ であるから、比例を使えば $CM = 2a - 2bz : a$ が得られる。この式は、かのロピタルが解析的に求めた式とまったく同じものである。したがって、サイクロイド曲線 CMN は、ロピタルの平衡曲線にほかならない。ここではっきり分かるのは次のことである。サイクロイドを描く点 M について、生成円 TO の円周上に取れば第 1 の場合に対応し、円の外側に取れば第 2 の場合に対応し、円の内側に取れば第 3 の場合に対応する。したがって、前の節で列挙した主要な性質は、通常であれば煩雑な計算を経なければ得られないものだが、サイクロイドの生成という幾何的構成から導かれることがわかる。

同じ問題の解を、より一般的な形で付け加える。「鉛直平面内に任意の与えられた曲線 AB があるとき、同じ平面内にもう一つの曲線 LM を求めよ。条件は、二つの与えられた重り B と M が、定められ

た位置にある滑車 C を回る共通の糸 BCM によって結ばれており、それぞれの曲線上の任意の位置に置かれたとき、常に互いに釣り合いを保つ、または同じことだが、最小の力で動かすことができるようにすることである。」

この問題は一見したところ、通常の幾何学では解けないほど難しそうに見える。その理由の一つは、特別な場合、与えられた曲線 AB が円周であるときには、ロピタル氏の解法が接線の決定を含むためであり、もう一つの理由は、有名なカルテジアン分析家が、27 もの類似関係を設定したあげく、計算の労苦にすっかり疲れ果てて、これ以上の探求を放棄したからである。

しかし実際に正しく取り扱えば、この問題はきわめて単純に解決されるが、あの幾何学者が 27 番目の比例関係まで進んで到達できなかったことに、私は驚かすにはいられない。ところが、ここで示すように、たった一つの比例関係だけで、しかもはるかに先まで進むことができるのである。まず原理として、よく知られた静力学の公理を採用する。「釣り合っている重物のいかなる運動においても、その共通の重心は上昇も下降もせず、つねに同じ水平の高さにとどまる。」この原理を現在の課題に適用するためには、求めるべき曲線は次のような性質を持たねばならない。二つの重り M と B がどの位置にあっても、常に同じ水平の平衡軸を共有するようではなければならない。したがって、滑車 C から垂直線 CQ を下ろし、これに任意の水平線 KIE を引く (これが一定の平衡軸を表す)。そして次の関係が成り立つようにする。与えられた重り M と B の比が、与えられた曲線 AB により定まる最短距離 IH と、それに対応する第四の比例項 IP (これは反対側を取る) との比に等しいようにする。さらに、P から M に平行線 PM を引くと、この線は中心 C、半径 CM (全長 CBM から与えられた部分 CB を引いた差) で描かれた弧を切る。その交点 M が、求めるべき曲線 LM の上の点となる。このようにすれば、二つの重り B と M の共通の重心は、つねに水平線 KIE 上に存在することになる。そして、この水平線 KIE は任意に引くことができるので、求める曲線を、与えられた任意の一点を通るように導くこともできる。

より十分な確証を得るために、与えられた曲線 AB として円周をとり、われわれの一般的な解法か

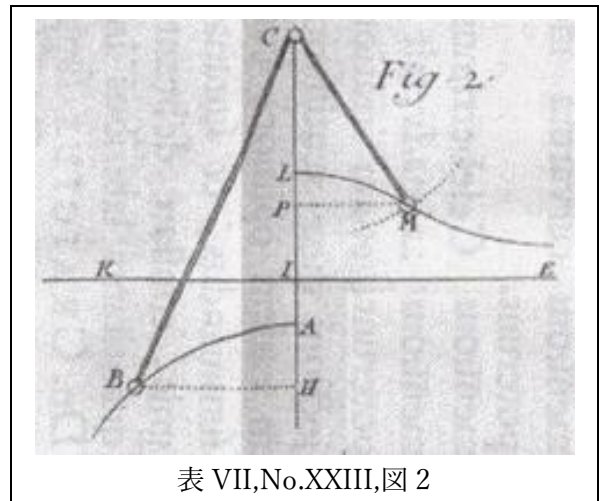


表 VII, No. XXIII, 図 2

ら、対応する曲線 LM の解析的方程式を求めてみよう。すると、それはまさに、尊敬すべき侯爵が提示した方程式と完全に一致することが分かる。しかも、その二つは全く異なる道筋と原理によって導かれたにもかかわらずである。このことから何よりも明らかなのは、自然は、その不変の法則を忘れることなく、常に自己と一致しているということである。

さて、この上に掲げた原理を、同種の他の問題に応用してみようとするならば、それが実にきわめて実り多い原理であることが分かるであろう。たとえば次のような場合を考えてみよう。糸が、一つの滑車だけでなく、いくつもの滑車を取り巻いている場合（実際の操作では、場所の事情や障害物などのために、平衡曲線を橋げたに直接取り付けることができず、それをより遠く、あるいはより都合のよい位置に移さねばならないことがある。）、あるいはまた、複数の曲線が与えられ、それぞれにいくつもの重りが、一つまたは複数の糸に、異なる距離で結びつけられ、全体系として一つまたはいくつかの重りによって釣り合わせられねばならない場合。あるいは、滑車の代わりにてこが用いられ、その端に糸と重りが取り付けられ、それらが与えられた曲線上に乗っているような場合。または、どのような機構であれ、どれほど複雑な装置であっても、建築家が考案するいかなる機械構成であっても、この原理によれば、平衡曲線は常に同じ簡単さで、まるで遊ぶように構成できる。それに対して、もし以前の解法を模倣しようとし、そこから機械的要素を除いて純粋に幾何学的に扱おうとしたならば、我々は到底越えられないほど煩雑で果てしない計算に陥ってしまうであろう。

ここで私は、より深遠な幾何学に通じたあの博学なるライプニッツ氏にお伺いしたい。次のような種類の問題に対して、一定の規則を見いだすことができないだろうか。それは、抽象的な形では通常の幾何学を拒むが、具体的な形に置き換えれば、その同じ幾何学によって解けるような問題である。つまり、微分積分法に頼る必要のないような場合だ。その明白な例は、私たちが扱ってきた平衡曲線にある。そして、これをある程度裏づけるのが、兄が最近 *Acta Eruditorum* 10 月号で述べているところである。ある問題が必然的に代数的曲線を含むならば、その問題もまた必然的に通常の代数の規則によって解くことができるという命題である。私はこの一般的な主張には賛成しない。たとえば、ある図形の面積を求める問題や、接線または下接線に関する条件からある曲線を決定するような問題があったとして、その曲線が他の理由から必然的に代数的であるとわかっていても、私はそれを微分法またはそれに類する方法以外の手段で解くことはほとんど不可能だと思うからである。実に、きわめて鋭い洞察をもつクレイグ氏 (Craigius) は、1693 年に刊行した著作「求積について」の第 1 部で（数学論考、曲線図形の求積および幾何的軌跡について、著者：ジョン・クレイグ氏、四つ折り版、ロンドン、1693 年刊）、代数的な図形であって、その求積曲線もまた代数的であるような図形を測定する方法を提示している。この方法は、彼が「高次的方程式」と呼ぶ方程式を利用し、一般幾何、デカルト流の項の比較法によって実行されるものである。しかしこの方法が一般的なものだなどというのは、とんでもない誤りである。むしろ、この方法が適用できない例は無数に存在する。その理由は、著者が暗黙のうちに、ある種の無理数を含む任意の微分量はその積分もまた同じ無理数を含む形で表されると仮定している点にある。そしてこの前提から、この才気ある著者は後に、どのような図形が求積可能であるか、という条件を導き出そうとしているのである。クレイグ氏は、他人を批判したのとまったく同じ誤りに自らも陥っている。（ツィルンハウス博士 (E.W. von Tschirnhaus)、ここに引用されている言葉は、数学論考、曲線図形の求積および幾何的軌跡について、著者：ジョン・クレイグ氏、四つ折り版、ロンドン、1693 年刊の P.38 から取られたもの）（彼自身の言葉を借りれば）、自分の方法によって、ある図形は求積不可能であると結論してしまったが、それより前に、自分の方法がすべての求積可能な図形に適用で

きることを示してもいなかったのである。

彼はその著作の後半で、超越的な求積線を探求するための、あるいは同じことだが、面積の求積を曲線の伸長に還元するための、巧妙ではあるがやはり一般的ではない方法を示している。しかし、最も単純な例。たとえば円や双曲線のような場合でさえも莫大な計算労力を要することは、著者自身がその計算を示していることから明らかである。したがって、この方法は理論的な観点から見ればきわめて優れたものではあるが、実際的应用にはほとんど適さないと言わざるを得ない。したがって私は、著者が第4の例 $z = \sqrt{y^4 + a^4}$ で表される図形を挙げたところで筆を止めたのは、この理由によるのだと考える。彼はすでに疑いなく予見していたからである。もう少し複雑な例に進めば、計算はきわめて長大で煩雑となり、それを終えるのに一、二時間では到底足りなくなるだろう。

私は、より扱いやすい別の方法があると考え。それは、私が中心曲線を構成する際に用いたもので、代数的曲線を拡張することによって行う方法である。その方法の要点は、与えられた微分式の平方を、積分可能な二つの平方に分割することにある。(No.XIX,P.68を参照) いかなる計算を行うことなく、すぐにわかることは、与えられた図形 $z = \sqrt{y^4 + a^4}$ の求積は次のように第一種立方放物線の延長して得られる。この図形の微分要素 $y^4 dy^2 + a^4 dy^2$ は、二つの平方項 $y^4 dy^2$ と $a^4 dy^2$ に分けられる。これらの平方の辺である $yydy$ と $aady$ はともに簡単に積分可能である。これらの辺の積分 ($\frac{1}{3}y^3$ および aay に比例する) を座標としてもつ曲線を構成すれば、それは第一種立方放物線である。これを定数倍することで、 $z = \sqrt{y^4 + a^4}$ の面積を求めることができる。

著名なライプニッツ氏が、彼の等時曲線の解法 (Acta Eruditorum の 1694 年 8 月号 P.370) において、この同じ求積問題を双曲線の延長へ還元していることを、私はよく承知している。彼は次のように述べている。「もし求積すべき図形が、縦座標 $\sqrt{a^4 + x^4}$ によって表されるものならば、その求積は双曲線の延長によってできるであろう。」しかし、この点の証明を、あの著名なライプニッツ氏はおそらく公にすることをいとわないであろう。それによって第一種立方放物線と双曲線とが互いに依存し合い、一方が他方を測ることが示されるであろうからである。それは幾何学における、きわめて高貴で、しかもまったく新しい発見となるであろう。

ライプニッツ氏のパラセントリック曲線に関する解法そのものについて言えば、それが私自身のものとこれほどよく一致していることを、私は大いに喜んでいる。このことから、ライプニッツ氏も、同じ頃、私とほとんど同じ考えをこの件について考えていたことがわかる。一定の高さからの降下に関して、一つの点に対して無数のパラセントリック曲線が存在することは、微分計算に少しでも通じた者なら誰にでも明らかなことである。すでに Acta Eruditorum でもしばしば示唆してきたように、どんな微分量も無限に多くの積分を持つが、その逆は成り立たないからである。ただし、私がここで一つだけ言及したのは、数ある中でもそれが最も単純であり、実際の応用上、他のどれよりも便利だからである。すべての等時的パラセントリック曲線の形は、一つの一般的解の中に包含されているからである。私の作図法によれば、ホイヘンス氏が Acta Eruditorum 1694 年 9 月号で決定されるべきとして提案したような螺旋形のものは、実際には存在しないことを簡単に証明できるであろう。

結びの代わりに、兄によって最近の Acta Eruditorum 10 月号で提出された問題の解法を付け加える。(学術誌 Acta Eruditorum の 1694 年 10 月号 P.394、3 つの代数曲線 G,H,I が与えられている。各々において、曲線 G の接線が H、I を横切る点を考える。それぞれの点における H、I の接線 HK,IK を取り、その交点の軌跡が第 4 の曲線 K を作る。その曲線 K の接線を求めよ。) 点 H と I における曲線が与えられているので、曲率がわかっている。よって、点 H における接触円の半径を r 、点 I における半径を s とする。HK= m 、IK= n 、GH= p 、GI= q とし、さらに HI に対応して $(q-p)=t$ とする。線 GH 上一点 L を取る。その位置は、
 $HL = rspm^3 : (rpn^3 - spm^3)$ となる。このとき、線分 LK は点 K において曲線に接することを私は主張する。これが示すべきことであった。

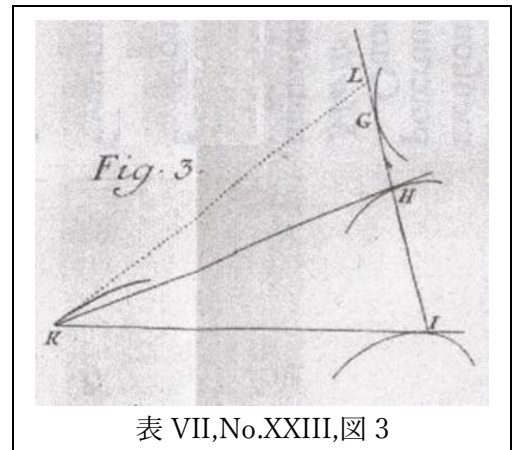


表 VII, No. XXIII, 図 3

さて次に、私は、非常に博識なヨハン・ベルヌーイ氏が、ジョン・クレイグ氏の「曲線の求積に関する論考」で暗黙のうちに仮定しているところの、無理関数の積分もまた同類の無理関数であるという前提を認めていないことに気づいた。私もまた、その仮定がクレイグ氏の著作中では証明なしに記載されていることを認める。しかし、私自身が同様の方法でこの種の問題を扱ううちに、この議論においては、私の知るかぎりこれまで誰も考慮してこなかった一つの原理に気づいた。それによって、この問題

に関する正当な証明が得られると思われるので、ここでその原理を提示することにしたい。したがって、微分項とその積分は、根式や指数に関して同じ種類の曖昧さや多様性を持つ。各根式は独自の級数を生み、それぞれに対応する微分もまた固有である。したがって、もし y を微分項、 v をその積分とするなら、 $S.ydx=v$ の関係において、 y と v は x に対して同じ次元の関係に属することになる。したがって、無理関数もまた同様の性質を持ち、そこには同じように根号の多様性が認められる。確かに高名なクレイグ氏は多くの優れた成果を示しており、そのことによって私は、彼によってこの学問（微積分・求積法）がさらに発展するだろうと期待している。また、彼が私の考察に何らかの恩恵を受けたと率直に認めてくれたことについて、私は彼の誠実さに深く感謝している。もし私が彼の計画を事前に知っていたなら、その方法の改良に何か役立つものを提供できたかもしれない。ただ惜しいのは、彼がどのように、卓越した才智と学識をもつ人物に対して手きびしい発言をしたことである。彼がほのめかしたような非難を、私がその人物に向けたなどということは、私の心に一度も思い浮かんだことがない。

No. XXV

高名なるロピタル侯爵閣下がヨハン・ベルヌーイ氏宛に送った書簡からの抜粋。

これはベルヌーイ氏の「平衡問題の解法」に付加されるものとして、ライプツィヒ学術誌 1695 年 P. 56 に掲載された。

君の最近の手紙を受け取ったばかりだ。その中で君は、平衡問題を一般的に、普通の幾何学によって構成する方法を得たと知らせてくれた。ところが、私自身もちょうど同じような構成をすぐさま見出していたところだった。それをここに送るので、君の方法とどの程度一致しているか見てほしい。そして、これをライプツィヒ学術誌に掲載してもらえよう取り計らってほしい。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum 補遺
の第2巻第6章
P.289

平面内に任意の与えられた曲線 VBH があるとする。これに対してもう一つの曲線 CMN を求めよ。なお、与えられた二つの重り B と M とが、固定された滑車 C をめぐる共通の糸 BCM によって結ばれ、それぞれの曲線上の任意の点においても釣り合うようになっている。

以下を作図せよ。中心を C とし、半径 CQ を糸 BCM に等しくとって円 QD を描く。そして、曲線上の任意の点 B を通じて基線に垂直な BE を引き、また C を中心として半径 CBD をとる。重さ M と重さ B との比を、横距離 AE と CP との比に等しくなるように定め、点 P から BE に平行な直線 PM を引く。このとき、中心 C、半径 BD で描かれた円弧は、PM を点 M で切り、その点 M が求める曲線上にある。

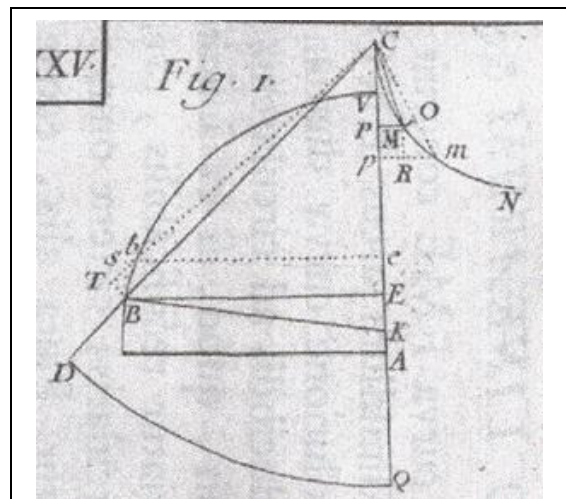


表 VII, No. XXV, 図 1

証明：重り B と M がごくわずかに動くと仮定し、糸が位置 bCm をとるようにする。垂線 BE, be および MP, mp を引き、中心 C にして極微小の円弧 BT および MO を描く。また軸に平行な微小線分

BS,MR を引き、曲線に垂直な線 BK を引く。構成より、重り M と B との比は $AE:CP=Ae:Cp=(Ae-AE):(Cp-CP)=Ee(=BS):Pp(=MR)$ 。よって $B \times BS=M \times MR$ となる。しかし、糸 BCM と bCm は同じ長さなので $Tb=Om$ となり、したがって $B \times BS:Tb=M \times MR:Om$ 。さて、角 CBT と KBb はいずれも直角であり、共通部分 CBb を取り除くと、残りの角 TBb と CBK は等しい。同様に、角 SbB (EBb) も角 CKB に等しい。なぜなら、いずれも角 EBK とともに直角をなすからである。したがって、Tb と BS との比は、角 CBK と角 CKB の正弦の比に等しい。これより静力学の法則によって、比 $B \times BS:Tb$ は、重り B が重り M に及ぼす作用の力のモーメントを表し、同様に $M \times MR:Om$ は、重り M が重り B に及ぼす作用を表す。これらの作用が等しいため、平衡（釣り合い）が成り立つ。

（証明終わり）

したがって、滑車の固定点 C は、上方にも下方にも、また曲線 VBH の頂点そのものの位置にも置くことができることが明らかである。よって、横座標の原点 AE は、任意の位置で水平線 AH の下方に取ってよい。

系：曲線 VBH が代数的であるならば、曲線 CMN もまた代数的である。

ヨハン・ベルヌーイ氏による補足

この機会に、幾何学者たちにもう一つ興味深い問題を提案しよう。それは、ヒュゲンスやライプニッツ氏の等時曲線に少なからず類似した曲線に関するものである。鉛直平面内において、物体 B が自重によって自由に下降しつつ、常に等しい遠心力で曲線を押しつけるような曲線 ABC を求めよ。

あるいは同じことだが、その展開曲線 DE を求めよ。この DE に糸 BE が巻きつけられており、糸が重り B によって巻きほどこれるとき、糸がどの瞬間にも等しい引張り力を受けるようなものである。言い換えれば、どの時点でも糸の張力が常に一定であるようにせよ。

この問題を満たす曲線は、一つではなく、さまざまな次数の曲線がいくつも存在する。

注：この問題の解法は、ロピタルによって詳しく論じられており、それは 1700 年版のパリ王立科学アカデミー紀要の中で見ることができる。（パリ版では 9 ページ、アムステルダム版では 11 ページを参照。）

№. XXVI ヨハン・ベルヌーイ

円による関数によって曲線の長さを測定することに関する考察

これはきわめて精妙で優雅な発見である。それを最も博識なヒュイゲンスは、自著「振り子時計論(De Horologio Oscillatorio)」P.76 で公にした。

そこでは、与えられた扁平な楕円体（回転楕円体）から双曲回転体を構成する方法、また逆に、与えられた双曲回転体から扁平な楕円体を構成する方法

を述べ、両者の表面において同時に等しい円断面が現れるようにしている。これは、彼がすでに前の章で示したように、どちらか単独ではそのような等しい円を得ることはできず、ただ、双曲線の面積が既知である、という条件を仮定したときにのみ可能である、という事実に基づいている。高貴なる著者が、その発見をもっと普遍的な形に拡張していたなら、さらに望ましかったであろう。与えられた任意

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1695 年 8 月号 P.374

の凸面に対して、それと等しい円形の面積をもつ別の曲面を構成する一般的な方法を示してくれていれば、ということである。その模倣として、われわれはここに、一般的な方法を提示しようとする。与えられた任意の曲線から、ただちにもう一つの曲線を描く方法であり、その二曲線の和、または差が、ある円弧の長さに等しくなるように構成される。この目的のために、まず展開線に関する、非常に顕著で有用な性質を前置きとして述べる。

任意の曲線 ABC の上を、線分 DAE が、その部分が曲線の部分に順次接するように滑ると考える。このとき、定規の両端 D, E (またはその上の任意の反対点) が描く二つの曲線 DLG と EMF を考えると、これら二つの曲線を合わせた全長は、半径 DE をもち、角 EDO を張る円弧 EO に等しい。そしてその角 EDO は、曲線の端点 A と C における二つの接線がなす角 EPF に等しい。

証明：線分が任意の位置 LBM にあり、それに近い位置 lBm に移るとする。 LM および lm にそれぞれ平行な線 DN, Dn を引くと、三角形 LBl, MBm, NDn は相似になる。これは LM, lm がそれぞれ曲線 DLG, EMF に垂直であり、角 LBl, MBm, NDn が等しいためである。辺の比 $BL:BM=Ll:Mm$ が成り立つ。これから加え比と転置の法を用いると、 $LM:Ll+Mm=BL:Ll$ となる。 LM と DN は仮定により等しいから、 $Ll+Mm=Nn$ である。したがって、すべての Ll および Mm 、曲線 DLG と EMF の弧長の和は、円弧 ENO の長さに等しい。(証明終わり)

もし描く点のうち一方 (たとえば E) が、 D と A のあいだにある場合には、同じ理屈により、曲線 DLG と EMF の弧長の差が、円弧 ENO の長さに等しいことが証明される。

このことから、われわれの命題の意味するところが完全に明らかになった。与えられた曲線に対して、きわめて簡単に無限に多くの他の曲線を構成する方法である。そしてそれらの各曲線は、与えられた曲線とともに、円弧に還元することができる。たとえば、 DLG が与えられた曲線 (またはその一部) であるとすれば、その各点 L において、曲線に垂直で互いに等しい長さの直線 LM を引くならば、それらの端点 M が描く軌跡 EMF が、求める新しい曲線となる。この曲線は、連続的な運動によって、糸を用いて描くこともできる。与えられた曲線 DLG の展開曲線 ABC に糸を逆に巻きつければよい。一般に、同じ一つの展開運動から生じる任意の二つの曲線について、もし両者の凹面が互いに向かい合っているならば、その弧長の和は円弧に等しくなり、一方の凹面が他方の凸面に向かっているならば、その弧長の差が円弧に等しくなる。

これまでのことから、ある与えられた曲線が円弧の長さとのどのような関係をもつかが明らかになると思う。展開線 ABC が二つの部分 BA と BC をもち、それらが相似かつ等しい場合、その曲線は円弧と比較できるものとなる。この場合に $CF=AD$ であれば、曲線 FME は DLG と一致し、曲線 DLG そのものが円弧 ENO の半分をなす。逆に、二つの相似かつ等しい部分をもつ曲線の展開から生成されるあらゆる曲線は、円曲線へ還元できる。また次の点も注意すべきである。もし展開によって描かれる無限に

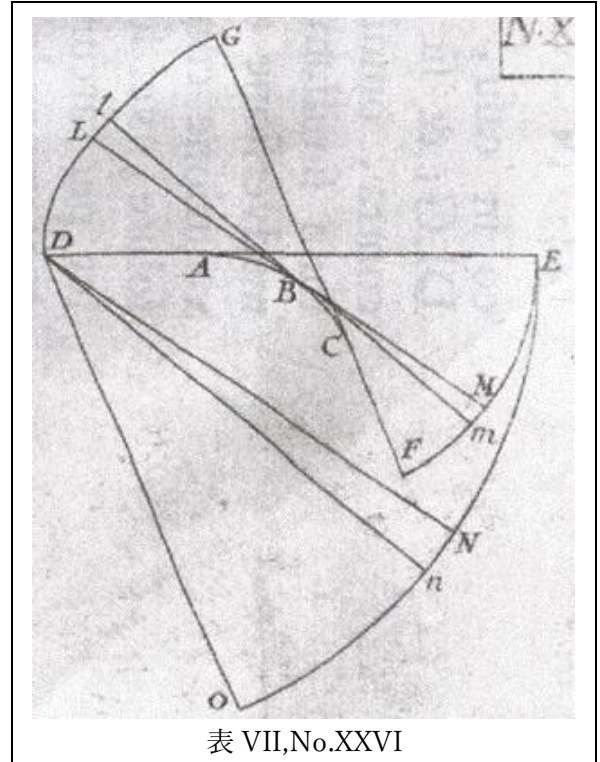


表 VII, No. XXVI

多くの曲線のうち一つでも、その長さが直線で表せる曲線が見つかるならば、他のすべての曲線も同様に円弧によって測ることができるであろう。この議論から、他にも多くの重要な帰結が簡単に導かれ、それらは曲線の一般的な測定理論に大きな光を投げかけるものとなる。

著名なるライプニッツ氏が最近の *Acta Eruditorum* 3 月号 (No. XXIV を参照) で、無理量はそれに対応する和 (積分量) もまた無理量となると指摘したことは、私が非常に鋭いクレイグ氏に対して行った反論を、少しも損なうものではない。私もライプニッツ氏と同じ見解をもっており、加えられる項 (微分) とその和 (積分) は、同じ根号の符号 (同じ側) で成り立たねばならないと考えているからである。しかし、そこから直ちに、平方根の中に含まれている量そのものまでも同一であるとは言えない。まさにこの誤った前提をクレイグ氏 (Craigius) が置いているように見え、私の反論はこの点に向けられている。この問題に関しては多くの例が存在し、その中には、積分可能な量であってもクレイグ氏の方法では積分できないものがある。たとえば y の量が、著者のやり方に従って、できる限り根号の束縛から解放放たれていたとしても積分できないものがある。この理由とは、場合によっては根号からの解放を行うだけでなく、根号の後にある量そのものを、さらに別の量で割らなければならないことがあるからだ。

そうしなければ、その方法は成功しない。しかし、このような注意点については、クレイグ氏のすべての論文を通して完全な沈黙が守られている。

No. XXVII ヨハン・ベルヌーイ

ド・ボーン曲線 (Curva Beauniana) の構成に関する解析的および総合的証明、学術誌 Acta Eruditorum の 1693 年 P. 234 に掲載。(No. XI を参照)

私が長らく手に入れたいと願っていたベルンハルト・ニューウェンティット (Bernhardi Nieuwentiit) の「無限解析に関する二つの論考」が、最近アムステルダムを通った折に、ようやく私の手に入った。そのうちの一つ「微分法の使用に関する考察」と題されたものは、ただ一つの目的のために書かれた

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1696 年 2 月号 P.82

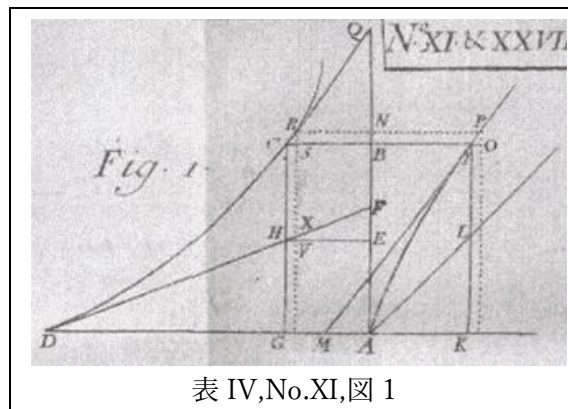
ように思われる。この高名な著者が、彼自身が我々の新奇な方法においてあちこちで自らの進行を妨げる障害であると訴えている諸々の困難を、我々のために取り除こうとしたのである。それらの難点については、実のところ私は、それほど重大なものとは思わない。それらは、ただ微分法が十分に明確に理解されていないことから生じるにすぎず、心を正しく集中して考えれば、自然に消え去るものだと少しも疑わないからである。したがって、そうした問題はここでははぶくことにする（すでに高名なるライプニッツ氏が Acta Eruditorum 7 月号の末尾で全体的にしっかりと答えている）。私はただ、自分に特に関係する点についてのみ触れることにしよう。

彼 (ニューウェンティット) は、自身の「微分法の使用に関する考察」の P.41 で、自分の方法と私の方法との違いを示そうとして、余談のように、しかも特に必要にも迫られないのに、私が Acta Eruditorum 1693 年 5 月号で発表した、かつてデカルトが提起した問題の構成を攻撃すべき対象として取り上げている。このことを、私はまったく苦々しくは思っていない。もちろん、彼がもっと優れた解法を示してくれればよかったと思う。そうすれば、彼の方法がどの程度まで適用できるのか、それが私の方法よりも優れているのか、また異なっているのかが、いっそう明確になっただろう。しかし、彼がそれを非常に謙虚な態度で行っているのも、私はむしろ、彼の望みに応え、自らの疑問の解明を求めるその願いに満足を与える機会を得たことを喜んでいる。称賛されるべきは、自分にとって障害となるものを率直に認め、それを取り除くことで、より確実に前進しようとする人々の率直さである。反対に、見習うべきではないのは、誰かから教わるよりも、むしろ最も優れた事柄を知らずに済ませたいと望むような人々だ。彼らは、その相手を年齢や地位、あるいは名声という想像上の理由から自分より上だと見なし、そのために、自分たちには理解できないその技術そのものを、みじめにも中傷するのである。この同じ避けられぬ運命が、我々の新しい解析学にも起こった。この学問は、どこに行ってもそれを理解しない人々を見出すと同時に、それを憎む人々も見出すのである。その中の何人かを、私自身も知っている。だが、卓越したニューウェンティット氏がより公平な心をもっていることを、私は彼自身にも、我々にも、そして我々の学問にも喜ばしく思う。彼が著名なライプニッツ氏の返答と、私による彼の疑問の解明を十分に熟考したならば、彼は自ら進んで我々の方法を受け入れるだろうと私は信じている。したがって、もし我々が力を合わせてこれに努めるなら、おそらく近いうちに、この研究分野には顕著な発展がもたらされることだろう。

さて、話が本題からそれすぎないようにしよう。彼が立てた計算は、私の構築を打ち壊すどころか、むしろそれを見事に裏づけているほどである。彼の誤りの原因は、誤った仮定に立って、等しい微分は等しい積分や総和をもたらし、と信じた点にある。それを無条件に主張するのは正しくない。すでに何度も述べたように、同一の微分量は無限に多くの積分をもつ。たとえば、 dx の積分は単に x だけでは

なく、 x に任意の定量を加えたり引いたりしたものでもありうる。このことは他のすべての場合にもあてはまる。したがって、ある問題を解いていて微分方程式にたどりつく場合、常に無限に多くの異なる解がその方程式を満たすことになる。このことをライプニッツ氏は等時曲線の研究において見事に指摘している。

今、私の方法の応用をより明確にするために、以前 Acta Eruditorum で述べたやり方に従って曲線 AIP を構成しよう。軸 AK に垂直な漸近線 AB に対して対数曲線 DC を描く。その下接線 AF は一定の長さ r に等しい。、横座標 AK (または BI) は、AB に平行な線分 CH に等しくとる。Nieuwentijt の計算法を少し修正して用いれば、この曲線 AIP がまさに求められているもの、つまり縦線 IK と下接線 KM の比が r と IL の比に等しいような曲線であることが明らかになる。



図において、KIを y 、KMを t 、CBを z 、ADを k 、AKを x 、ILを $y-x$ とする。すると、 $AF=QB=r$ 、 $CH=BI=AK=x$ 、よって $HG=y-x$ 、 $DG=k-z$ となる。また $PO=NB=RS=dy$ 、 $IO=dx$ 、 $CS=dz$ となる。問題の条件から $y:t=r:y-x=dy:dx$ が得られる。これにより $xdt=ydy-rdx$ 。積分を取ると、 $omnia xdy=\frac{1}{2}yy-rx=\Delta BIA$ となる。(注： $omnia xdy=\int xdy$)しかし、問題の構成から $k:r=k-z:y-x$ である。これにより $ky-kx=kr-rz$ となり、すべての項に dy を掛けると、 $ydy-rdy+rzdy:k=xdy$ となる。対数曲線の性質から、 $rdz=-zdy$ とおける(ここで負号-を使うのは、 z が増加すると y が減少するためである)ので、 $ydy-rdy-rrdz:k=xdy$ となる。

ここまでは、著名なる Nieuwentijt は非常によく推論している。しかし、そこから彼が導こうとする帰結は、誤っている。彼は、 $ydy-rdy-rrdz:k$ が、その積分量として唯一 $\frac{1}{2}yy-ry-rrz:k$ をもち、 $\frac{1}{2}yy-ry-rrz:k=omn:xdy=\frac{1}{2}yy-rx$ と結論している。しかし、 $\frac{1}{2}yy-ry-rrz:k$ と、 $omn:xdy$ とは等しいとは限らない ΔBIA 、 $omn:xdy$ が消滅するときでも、 $ydy-rdy-rrdz:k$ は消えず、 $-rr$ という値になる。これは次のことを示している。残っているこの $-rr$ を、符号を反転させて加えねばならない。正しい積分量は、 $ydy-rdy-rrdz:k+rr=omn:xdy$ である。しかし、もしかすると誰かは反問するだろう。どうして前の積分の結果 $omn:xdy=\frac{1}{2}yy-rx$ においてある一定の定数を同じように加えたり減じたりする必要がないのか？と。これに対して私は言う。これはこうなるのだ、 ΔBIA が消滅するときには $\frac{1}{2}yy-rx$ もまた消滅するからである。したがって、何らかの一定量を加えたり減じたりする必要はない。もし彼がこの点に気づいていたなら、この箇所だけでなく、他の多くのところでも、そして彼自身が抱えていた主要な困難の多くからも、簡単に抜け出せただろうし、我々の構成が真理に反するような結果を全く導いていないことも理解できたはずである。 $\frac{1}{2}yy-ry-rrz:k+rr$ を、先に得られていた $yy-rx$ と等しいものとして置き、両辺を整理すると、 $ky-kx=kr-rz$ という式が現れる

が、問題の構成から導き出したのと全く同じ方程式である。

しかし、Nieuwentijt が、そこから生じると信じた“矛盾”について、公に撤回することができないとしても、せめて我々の方法の正しさを暗黙にでも認めるきっかけを持てるように、ここに総合幾何学的な証明を付け加えておくことにする。この証明は、深い我々の原理をすでに味わった者はもちろん、まだ一般幾何学の入り口をかじった程度の者にでも理解しうるものだ、と私は思う。

彼が自分の図で指示したすべての線を、ここに移した図でも同じように引いたとしよう。さらに、軸 DAK に平行に HE を引く。すると、 $CG=IK$ であり、また CH を引いたとすると（構成より） $BI=AK$ であり、（仮定より）KL であるから、残る HG、EA は IL に等しい。また、構成によって $NP=RX$ であり、 $BI=CH$ なので、 $NP-BI$ 、IO は、 $RX-CH$ 、 $RS-XV$ に等しい。したがって、 $PO:IO=RS:RS-XV$ であるが、これは対数曲線の性質（AF という与えられた定数 r を持つ）より、 $RS:RS-XV=QB:QB-FE$ である。しかも $QB-FE$ は EA (IL) である。

ゆえに $PO:IO=IK:KM=AF(\text{与えられた } r):IL$ 。(証明終わり)

No. XXVII I

新しく独特な幾何学の発展

D. T. (De Tschirnhausen)による、曲線量の測定に関して

数学では、同じ真理へと導く道がいくつも存在するので、できるかぎり単純な方法を探求することに努力を払うべきである。これはあらゆる個々の難問において絶対に必要というわけではないが、数学全体がそれらに頼るような、根本的原理や基礎を定める場合には、最も重要な要請となるからである。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1695 年 11 月号 P.489

そしてこの基礎の中には、あらゆる曲線の生成に関する原理も含まれる。私はこれらすべての曲線について、もっとも簡単な作図法を焦点によって見いだした後、すぐに *Medicina mentis*（心と身体の医術、ライプツィヒ刊、1695 年、四つ折判）において公に発表した。この方法がいかに広大な領域をわれわれに開き、無数の新奇で独特な、しかも極めて簡単に得られる発見をどれほど豊かにもたらすかを示したのである。かくして、真理の増進という、一個人のものではなく、学者たちが力を合わせてこそよりよく推し進められるべき事業が、いっそう進展することを期待した。そして、ライプツィヒ学術誌 *Acta Eruditorum* にすでに掲載されている、ライプニッツ氏および、あの博学なる名高いベルヌーイ兄弟が成し遂げた成果は、私にとって少なからぬ喜びをもたらした。しかし、この焦点による曲線の生成法は、あまりにも簡単すぎる印象を与えるので、そこからあれほど多くの、しかも非常に優れ有益な成果が導き出されるとは思われにくい。そのため私は、*Acta Eruditorum* において新しい発見を提示しただけでなく、「*Medicina mentis*」の後版にも、いくつか並外れて重要な系を付け加えておいた。これは、他の人々もこの問題をさらに深く考察するよう促すためである。私は、実のところ、優美さとすぐれた価値をそなえた結果をまだ多く知っている。それらについてはこれまで、極めて優秀な人々に対して私的に触れただけで、公には一切述べなかった。それらは新規性と独特の応用ゆえに、公表する適切な機会さえ得られれば、いっそう人々に喜ばれるだろう、そう私は判断していたからである。しかし、近いうちにこれが実現するかどうかは分からない。これらの研究が何よりも必要とする静かな研究時間の中で私が生活しているわけではないからである。そこで私は、これらのうち幾つかを公に出すことに決めた。いずれも幾何学者たちにとって好ましく思ってもらえるような重要性を持つものだと思っている。目的は、このわずかばかりの公表によって、たとえ私自身でなくとも、より余暇を多く持つ他の誰かによって、真理の増進が進められるようにするためである。

I、曲線を焦点によって生成する方法から、私は次のことを理解した。唯一で最も単純なヒュイゲンスの展開法だけでなく、ほかにも数えきれないほどの展開法が存在し、どんな曲線でも無限の方法で展開することができる。これに伴い、曲線の寸法も無限の方法で求められることになる。これは別の機会に示した通りである。さらに私は、曲線図形の面積測定そのものも、きわめて一般的に、この焦点生成法から導きうることを悟った。この導き方は非常に簡明であり、しかもそこにいくつか特異で興味深い性質が現れるのである。**第 1**。よく知られているように、円に関する面積は、ある直線を円弧に沿って引き延ばすことで求められる。同じことが、実はあらゆる曲線図形の面積にも普遍的に当てはまる。つまり、任意の曲線図形の面積は、「ある直線×ある曲線の弧長」という形で表すことができ、ここには円の面積計算と類似する点が多数現れるのである。**第 2**。他のあらゆる曲線の面積を測る手段となる曲線、いわば最初の・基本となる曲線は、きわめて注目すべき性質をもっている。そしてこれらの曲線は機械的曲線でもある。デカルトが幾何学から誤って排除したあの種類の曲線である（これについ

ては私が *Medicina mentis* で明確に論証した)。ゆえに、このような曲線の使用は、ここから幾何学においてより明白に正当化されるのである。第3。他のすべての曲線の面積を測るために用いられるあの曲線は、もし対象の図形が絶対的に求積可能である場合には、直線に退化する。その曲線の生成法を見るだけで、ある図形の面積が求積可能かどうかを簡単に判定することができる。さらに、このことから、閉じた図形は求積を許さない、という事実が導かれる。これはニュートン氏の述べているところ（自然哲学の数学的諸原理（*Principia*）第1巻、第6章、補題38）と一致する。また、どの図形が閉じた図形であるかも、それほど困難なく見分けることができる。見たところ閉じているように見えて、実際にはまったく閉じていない図形の例が多く挙げられるからである。

私の考えをよりよく理解してもらうために、すでに述べたことを一つの例で説明しよう。楕円 AFGE をとる。小半径に等しい半径をもつ円を、中心 C から描けば、その周上に BFD が得られる。次に、任意の仕方で C から直線 CG を引き、そして AE に平行な HG を引く。私は次のことを主張する。直線 AE と、円弧 HD との積（ $=AE \times \text{弧 HD}$ ）からなる長方形は、楕円の扇形 CGE のちょうど4倍である。この方

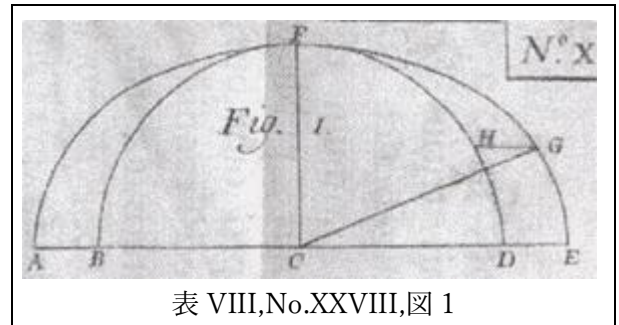


表 VIII, No. XXVIII, 図 1

法を用いれば、楕円の面積を点 C を基準として簡単に等分することができる。同じことは放物線や双曲線についても、適切に適用すれば成り立つ。ただし次のような違いがある。楕円ときには、すでに見たように、面積を測るために用いるのは、法線が一定の長さに等しいという性質をもつ円の弧 HD であった。同様に、あらゆる双曲線を測る場合には、接線そのものが与えられた直線に等しいという性質をもつ曲線の弧を用いねばならない。これはデカルトの考えでは機械的曲線に属する。放物線の場合には、法線と接線の両方が一定量に等しいという性質をもつ別の曲線、つまり直線そのものを用いるべきである。このようにして、たった一つの定理によって、すべての円錐曲線（円・楕円・放物線・双曲線）の面積が、一定の直線を別の曲線または直線にかけ合わせた長方形を用いて求められることになる。この結果は、幾何学者たちにも、Huygens が等積双曲線について見出した類似の方法を提示したときに与えた助言に劣らず、喜ばれるものと思う。なぜなら、これらすべての方法は互いにまったく異なる手段から得られ、しかもより普遍的であり、単にすべての双曲線だけでなく、無数のその他の曲線にも適用できるものだからである。

ここからさらに、三つ以上の焦点をもつ高次の曲線について、どのような結論が導かれるかについては、この種の事柄に通じた人々は、自ら進んで調べれば、格別の喜びをもって簡単に発見できるだろう。私としては、ここにもっと多くの、美しく、かつ一般的な定理を付け加えることもできる。しかし、それをすべて述べてしまって、彼ら自身が自分の力で探求する楽しみを奪いたくないので、私の主張の信頼性を示すために、たった一つの例だけを挙げることにしよう。

曲線 FG が、4つの焦点 A, B, C, D を使って作られているとする。また点 E は、これら4点 A, B, C, D の重心であるとする。私はこう主張する：もしこの5つの点（A, B, C, D, E）から、曲線上の任意に選んだ2点 F と G に向けて直線を引くならば、三角形 AFG, BFG, CFG, DFG の面積の和は、つねに三角形

EFG の面積の 4 倍になる。もし焦点が 5 個なら、(重心から見たとき) それらの面積は EFG の 5 倍になる。そしてこの関係は無限に一般化できる。この話はこれくらいにしておこう。

Ⅱ、円においては、周長は互いに直径に比例し、また相似な円の面積は直径の二乗に比例するという事は知られている。しかし一般には知られていないこととして、私は次のことに気づいた。同じ種類の曲線に属するすべての曲線について、たったひとつの一般定理が存在するという事だ。それによって、たとえば楕円曲線や双曲線の互いの比が明らかになる。これはこれまで私たちに隠されていた事実である。そこからあらゆる曲線について無限に多くの新しく特異な性質が導かれる。このことを、ある一つの例によって示すことにしよう。

二つの放物線 AE と BD があり、その焦点を C とする。そして直線 CDE を引く。私は言う。放物線 AE は放物線 BD に対して、より小さい方の準直径がより大きい準直径に対する比のような比を持つ。したがって、もし準直径の比が 2 倍であるなら、放物線 AE は放物線 BD の 2 倍となる。また、これらが同じ焦点 C を持つことは絶対に必要ではない。実際、点は任意に取ってよく、それでもなお、曲線同士が互いに持つ比は決定されるのである。

Ⅲ、円の曲線部分どうしが互いに持つ比はよく知られている。しかし、他のいかなる曲線についても、こうした関係はこれまで幾何学者によって示されたことがなかった。おそらく彼らにとっても不快ではないだろう、もし私が、任意の曲線において、その曲線のある与えられた部分が知られていれば、それに対して任意に与えられた比を持つ別の部分を常に割り当てる普遍的方法を自分は身につけている、と告げるならば。実例を示すことにしよう。

放物線 ACDEF があり焦点は B とする。曲線部分 CD が与えられているとき、その倍数的な対応部分 EF を作りたい。 $CD:EF=GH:IK$ という比を満たすように EF を求める。焦点 B から C, D に BC, BD を引く。与えられた直線 GH, IK の二乗の比 ($GH^2:IK^2$) と同じ比になるように BE, BF を作る。 $GH^2:IK^2=BC:BE=BD:BF$ 、こうして BE と BF を決めれば、放物線の部分 CD と EF は、ちょうど GH と IK の比に等しくなる。例として $GH:IK=1:2$ とする。すると $GH^2:IK^2=1:4$ なので、 $BC:BE=BD:BF=1:4$ と取ればよい。つまり $BE=4BC, BF=4BD$ にする。放物線の部分 EF は、CD のちょうど 2 倍の長さになる。この場合いくつか細かい注意点はあるが、前の命題の証明 (焦点からの距離²の比例で弧比が決まる仕組み) を理解していれば、どう処理すべきか直ちに分かるだろう。そして、ここからさらに重要な応用が得られる。たとえば曲線の長さや面積が明確には分からない場合でも、所望の比を満たす部分を構成できる方法が見つかる。これはとくに等軸双曲線に適用できる。この双曲線の測度は放物線と似た構造をもっている、今述べた手法が新しく、これまで知られていなかったやり方で使える。結果として、互いに任意の線分比を持つような曲線部分を確実に作図できるようになる。さらに円錐曲線に関して、幾何

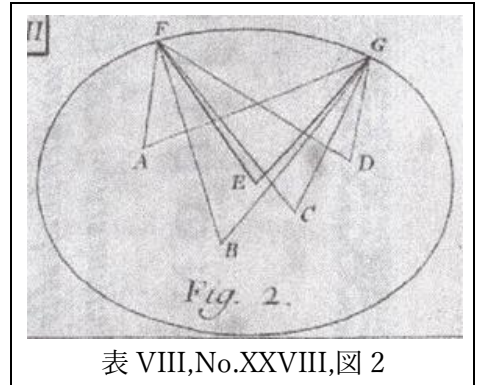


表 VIII, No. XXVIII, 図 2

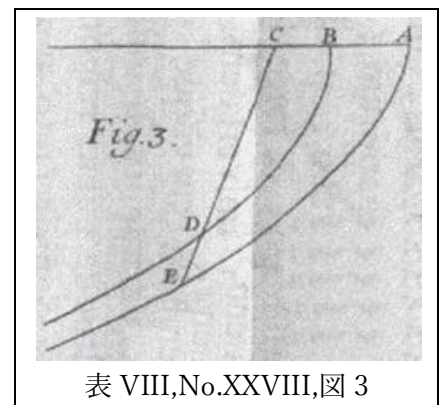


表 VIII, No. XXVIII, 図 3

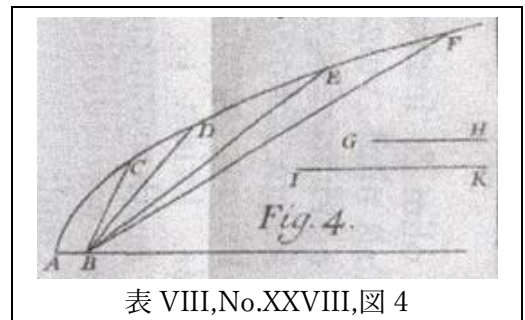


表 VIII, No. XXVIII, 図 4

学者たちが何世紀も研究してきたにも関わらず、まだ見落とされていたような新しい定理が多数見いだされるだろう。これらすべての定理の証明をいちいち示すのは、長くなりすぎるし、正直あまり意味がない。ここで述べた発見は主に上級の幾何学者向けに書かれているからで、そのような読者なら、量の次元に関する一般的な結論から逆向きに辿っていけば証明はたやすく再構成できるということはすでに分かっているからである。

Ⅳ、本来ここで論述を終えるつもりだったが、ちょうどその時、ヨハン・ベルヌーイ氏の「円による曲線長の測定についての考察 (No.XXVI.第 XXX 番を参照)」を読む機会を得た。この論文はとても優れたもので、私を大いに感銘させたため、いくつかの補足を書き加えておくことにする。ベルヌーイ氏はこの問題を解く際、主にヒューゲンスの「展開曲線」の理論を踏まえている。だが、私が提案した「焦点による曲線生成法」から見ると、どんな曲線でも無限に多くの方法で展開できる。したがって、ベルヌーイ氏の方法はこれにより無限に拡張でき、幾何学全体にも大きな進展がもたらされるはずである。もう一つ、これまで別の機会に回していた話をここで付け加えよう。ある面積が与えられたとき、それと等しいが性質の異なる面積を、いくらでも簡単に構成できることはよく知られている。だが、これと同じことを曲線で行う方法は、与えられた曲線と同じ長さを持つ。まったく別種の曲線を構成する方法については、今のところ誰もその原理を示していない。通常やり方でこの問題に挑むと、どうしても「逆接線法」に行き着く。この手法の最も見事な例を示したのが、かの有名なロピタル侯である。逆接線法についても、私は十分に研究し、ほぼあらゆる点で満足のいく完成度に達した。だが、それでもこの方法は、最近私が発見したある普遍的方法には及ばない。新しい方法を使えば、与えられた曲線と全く同じ長さを持つ無限に多様な曲線を構成することができる。この驚くべき方法の例は、また別の機会に示すつもりである。差し迫った用事が多く、友人たちに促されて何とか前の議論だけを書き上げることができたにすぎないからだ。



し、直線の場合にはその点が無限遠点として考えられねばならないとしても、それでもなお同じ一般理論の枠内で扱える、というわけである。一般に、平行線または平行面とは、その間の距離がどこでも等しいものと定義する。そして長方形とは広い意味では、四つの角がすべて直角である図形をいう。ただちに帰結するのは、二つの平行線のあいだにあって、その両端の最小間隔によって囲まれた図形 $D(K)$ は、正当に長方形と呼ぶべきである。さて、ついでにこれも付け加えておこう。与えられた線（曲線であれ直線であれ）に平行な線を引くという問題は、進展線を使わなくても作図することができる。まず与えられた線に垂直な直線を引き、その垂線上のある一点を中心とし、その点から与えられた曲線までの垂直距離を半径として、与えられた線に接する円を描く。この円をその線の上で転がせば、その円の中心が描く軌跡は、与えられた線に平行な線となる。しかし、展開法が優れているのは、与えられた点を通る与えられた線の平行線を引くことができる点である。実際、必要なのは、その点から与えられた線の母線に引いた接線をそのまま引くことである。この接線は同時に、求める平行線の母線にもなるからだ。接線として引かれた線分が、糸を成す一部分になるのである。

No. XXX ヨハン・ベルヌーイ

デカルト幾何学が軌跡の決定において、欠陥を補う補足。

Acta Eruditorum の 11 月号に掲載された、ライプニッツ氏およびツィルンハウスの原稿への注記。
円錐面および楕円体面の展開について。
数学者に提起された新しい問題。

ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の 1696 年 6 月号 P.264

I、幾何学がどれほどの発展を遂げたかは、無限の方法が現れて以来、誰も異論を唱えないであろうが、微分計算が第一の地位を占めることが広く知られるようになって以後になされた、数多くの発明の例が証明している。これらの発明は、もし真実を語ることが許されるなら、我々のこの時代において、なお絶望的だと見なされていたものであったことは、多くの近代数学者の著作から推し量ることができる。確かに、より良い方法を身につけていない者の中には、あまりに大胆に主張する者もいて、数学全体においてデカルトやその他の者によって伝えられた通常の幾何学で扱えないものなど何ひとつないのだ、と言い張る者がいる。また、もう少し公正な判断力をもつ者もいて、通常の幾何学から無限に関する考察だけは排除し、この部分での欠点は喜んで認めるが、有限で通常の量についてのあらゆることは区別なく取り扱えると認めている。しかし、もし私が示したならどうだろうか。実はこの有限で普通の量の領域においてさえ、なお数多くの欠落があり、そのため一般の幾何学は驚くほど不完全なまま残されているということ。

よく知られているように、デカルト派幾何学の最も重要な部分は、幾何学において極めて重要な題材とされる軌跡と曲線の性質を求めるために書かれたものである。著者の方法は、曲線上の点がある一定の直線上の点（これを彼は軸と呼ぶ）と一定の関係にあると仮定し、その関係から代数方程式を導き出し、それによって曲線の性質と作図法を決定する、というものである。しかし、もし曲線そのものの点同士の相互関係だけから（他のいかなるものも与えられず、考慮されずに）曲線の性質や作図を導き出そうとするなら、私はデカルトの規則によってそれを実現できるとは思わない。また、そのような場合には、微分・無限小の方法も何も助けにはならない。ゆえに、私は、この種の問題や類似の問題のために、自分が新しい方法を発見したことを、一つか二つの例の解法を通して示せば、幾何学者には喜ばれるだろうと考える。

この考察に最初のきっかけを与えたのは、Euclid 原論第 3 巻命題 35・36 で証明されている、あのきわめて有名な円の性質であった。それは、与えられた点を通して引かれ、円周によって両側を切られる任意の直線は、その切られる二つの部分の長さの積が一定である、というものである。この性質が円に固有の本質的性質である。そして逆に結論する。与えられた点を通る任意の直線において、その直線が曲線によって切りとられる二つの部分の矩形が一定であるような曲線は円周であると。しかし私はむしろその反対を主張する。そのように論じる者（円だけがその性質を持つと言う者）は、大きく誤っている、と私は言う。円周と同じように持つ曲線の種類が、実は無限に存在する。違いはただ一つ、円ではその性質が円の部分がすべて相似であるため、与えられた点をどこに置いてもよいのに対し、その他の曲線では、その与えられる点が特定の位置に限られる、というだけである。このことをより明確に説明

するため、私はここでは、その性質を満たす図形が円であるという事実を知らないものと仮定し、次のような問題が与えられているとする。与えられた点 D から引いた任意の直線が、求める曲線 ABC を点 E と点 C で切るとき、その二つの区間 DE と DC のつくる矩形が、常に同じ一定の与えられた値に等しくなるような曲線 ABC を求め構成せよ。この問題には、すでに述べたように、無限に多くの方法で解が与えられる。実際、任意の直線 DAG を引き、それを直径とみなし、その上の点 DF を横座標、これに任意の角度で BF を縦座標として立てることができる。また適当な一本の直線を単位長と定め、点 D と B を結んだ DB を x 、BF を y とする。私は主張する。 $y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha}$ としても

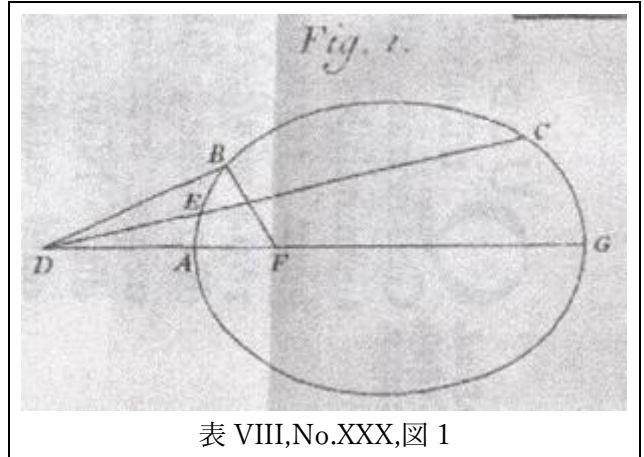


表 VIII, No. XXX, 図 1

$y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha} + bx^\zeta + bx^{2-\zeta}$ または $y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha} + bx^\zeta + bx^{2-\zeta} + cx^\gamma + cx^{2-\gamma}$ でもよいし、要するに、このやり方で好きなだけ項を続けた任意の量 y を取ってよい。すると、必ず点 B は求めるべき曲線 ABC 上にあることになる。ここで注意すべきは、係数 a, b, c など、またべき指数 α, ζ, γ など、いずれも任意の定数であり、自由に選べるということである。したがって、曲線 ABC は次数についても無限に変化させられるだけでなく、係数や指数に無理数を用いれば、超越曲線にさえすることができるのである。さて、最も簡単な形の方程式を選んで $y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha}$ とし、 $\alpha = 0$ と置くと、 $y = ax + a$ が得られる。また、単位の一乗によって同次化すれば $ny = xx + an$ となる。この方程式を調べれば、それが円を与えるものであることがわかる。したがって、私が述べたとおり、円は私の一般的な解のうちのごく特殊な場合にすぎず、この性質を満たす曲線としては、より高次の無数の曲線をいくらでも構成できることになる。

直線 DC に対して一定角度の方向で、任意に直線 GFB を曲線に引くとき、その直線が切り取る二つの部分 BG と BF の長さの積が常に一定になるような曲線 FHG を求めよ。円錐曲線の父（＝アポロニウス）からすれば、求められた問題には双曲線が応じる。しかし、その双曲線以外にも、次に述べるように無限に多くの曲線がある。ある直線を単位として取るとし、DC を y 、CE を x と置く。たとえば、 $y = ax^\alpha + ax^{-\alpha}$ あるいは $y = ax^\alpha + ax^{-\alpha} + bx^\zeta + bx^{-\zeta}$ あるいは $y = ax^\alpha + ax^{-\alpha} + bx^\zeta + bx^{-\zeta} + cx^\gamma + cx^{-\gamma}$

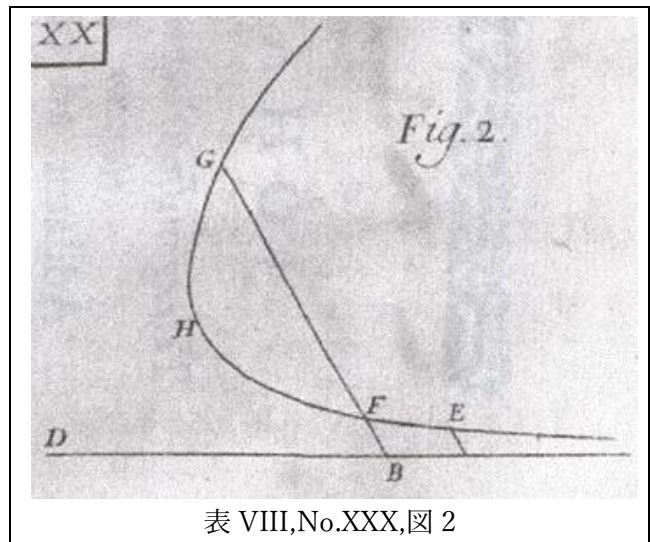


表 VIII, No. XXX, 図 2

、このような仕方任意に与えられた量を y としてもよい。こうして、無限に多くの解（曲線）を得られるのである。最も単純な方程式として $y = ax^\alpha + ax^{-\alpha}$ において、 $\alpha = 1$ と置くと、双曲線を表す方程式 $xy = ax + a$ が得られる。この双曲線は、前の例における円の場合と同様に、他のすべての解の中で最も単純な次数のものである。

しかし、私は例を挙げるのに少し長くなりすぎた。すでに述べた二つの例だけでも、この方法の正しさは十分すぎるほど明らかである。そこで、ある地位の低くない幾何学者が私に出した問題へ移ろう。

その問題とは、次のようなものであった。次のような曲線 ABCDE を求めよ。点 A において曲線の接線 AC を引き、さらに曲線を任意の位置で B と D に切る任意の直線を引くと、その直線の切断によって生じる部分 BA と DA の長さの和が、接線 AC の長さの常に 2 倍となるような曲線である。解。一定の線

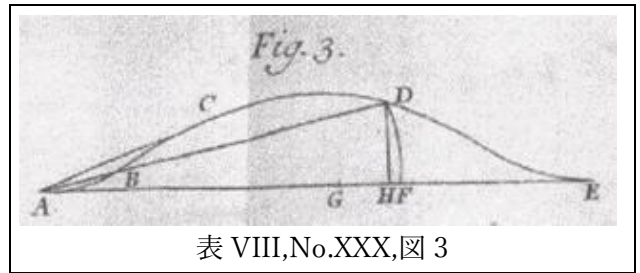


表 VIII, No. XXX, 図 3

分 AE を単位として取る。そこから任意の長さ AF を切り取る。AE と AF の第 3 比例 AG を作る。 $AE:AF=FG:HD$ となるように FG を取り、その HD を AE に垂直に引く。中心 A、半径 AF で弧 FD を描き、その弧の正弦を HD と一致させるようにする。すると、その点 D が求める曲線の点となる。また、あなたが文字による式で表すことを好むなら、先ほどと同じことを次のようにして無限に多くの解によって達成できる。AE=1 と置き、AF (または AD) = x 、DH= y とすれば、 $y = x(x - xx)^n$ とすればよい。ここで n は任意の定数を表す。

もし他の人々が、これらの例において自分の方法の力を試してみたいなら、図 1 に示す曲線 ABC を求めてみよ。それは次の性質を持つ。与えられた点 D から任意に引いた直線 DEC に対して、曲線とその直線などで囲まれる部分 DC の下面積と、もう一つの線分 FB の平方とが、常に一定の与えられた値に等しくなるような曲線である。

Ⅱ、私がこれらのことを考えていた折、ほかの冊子とともに Acta Eruditorum の最新の 11 月号が届いた。そこにライプニッツ氏 (No. XXIX を参照) とツィルンハウス (No. XXVIII を参照) という栄えある二人が公表していた内容を、私は実に大きな喜びをもって読んだ。実際、前年 8 月号に掲載された私の新たな定理 (No. XXVI を参照) が、両氏にさらなる新しい発見を生み出す契機を与えたのだと分かった。特に著名なライプニッツ氏は、曲線の長方形と等高長方形の差または和が、共通の展開によって同時に描かれると、円の面積に等しくなる、と非常に巧みに指摘していたのである。そして、そこにさらに含まれている曲線の長方形や平行曲線に関する記述は、彼の通常のやり方で、じつに巧妙に考案されている。私は、展開を使わずに平行曲線を作図する彼の方法を非常に気に入っている。そして当の彼自身が抱いている意見とは逆に、私はその方法を、展開によって作られるもう一つの方法よりも優れていると考える。第一に、円は展開曲線よりはるかに作図しやすいし、第二に、回転によっても展開と同じように、与えられた点を通る平行曲線を導くことができるからである。ただし、円の半径を、その与点から曲線へ下ろした垂線の長さに等しくとることが条件となる。

高貴なるツィルンハウス (Tschirnhaus) が、曲線における焦点の考察から私たちに与えてくれた諸結果は、この題材がどれほど綿密に研究される価値を持つかを十分に示している。実際私はそこから、驚くべき定理や普通なら極めて捉えがたい真理が、ときにほとんど苦勞なしに引き出されてくるのだ、ということを認めざるをえない。ところで、ハイゲンス (Huygens) の方法による進展以外のやり方は、私の接触曲線の寸法に関する定理がどうして証明できるか、私にはまったく理解できないし、ましてやその学説をより拡張できるとも思えない。証明にはどうしても母曲線に対して、展開される曲線の半径が常に法線である、という事実が必要だが、この法線性は、ハイゲンス (Huygens) 流の進展の場合にのみ成り立つからである。さらに言えば、あの非常に鋭い学者は、任意の曲線を単純焦点だけで描く一般的方法を、まだ私たちに示していない。もし彼がその方法をすでに秘めているのなら、ぜひ公共

の利益のためにも、それを世に出してほしい。そして例えば、3次放物線を焦点法で描くやり方に適用してもらいたい。彼が第3条で、自分はその方法を完全に心得ていると言っている、普遍的方法”の公表を私たちは強く望んでいるその方法とは、任意の曲線において、その一部分が与えられたとき、常に与えられた部分と指定された比を成すもう一つの部分を割り当てることができるというものである。むしろ、もし彼が同じ箇所を示した、放物線において、指定された比に応じて部分（弧・区間）を割り当てするための例示、これの正当な証明を与えるなら、彼は数学者の世界全体を自分に負い目ある者にし、永遠の名声を獲得することになるだろう。あの高名な著者が、彼自身の鋭い洞察力にしては珍しく、あの例示が見かけ以上にはるかに重大な帰結を秘めていることに気づいていないことを私は驚いている。彼の構成の証明を私に示してくれるなら、私は彼に双曲線の求積を与え、さらに、これまで歴代の数学者がことごとく徒労に終わってきた放物線の幾何学的長さの求積をも与えてみせようと思う。

そのほか、ツィルンハウスがその覚書で述べていることは、きわめて優れたものである。とりわけ第1条は注目すべきで、彼が楕円の扇形を円の扇形へ還元する方法を示した点は非常に重要である。そこから、楕円領域を等しい部分に分割する方法を実にうまく導き出している。もっとも、他の観点から言えば、楕円扇形も双曲線扇形も、扇形の弧を張る弦を、中心から引いた直線で二等分するだけで、最も簡単に二等分されるのだが。なお私は次のことも観察する。高貴なる彼の作図は、円周 BFD の半径の代わりに楕円の長径を取った場合にも成り立つ。つまり、楕円 AFE が円 BFD の内部に入るときのことである。私は次のことを主張するからである。直線 AE と円弧 HD との積は、楕円の扇形 CGE の4倍である。ここで不思議に思われるのは、双曲線の面積を測るために、彼が機械的曲線の弧を用いていることである。ところが、よく知られているように、それは幾何学的曲線の弧、放物線の弧に、一定の直線を引き回すことによって、非常に簡単に行うことができるのである。

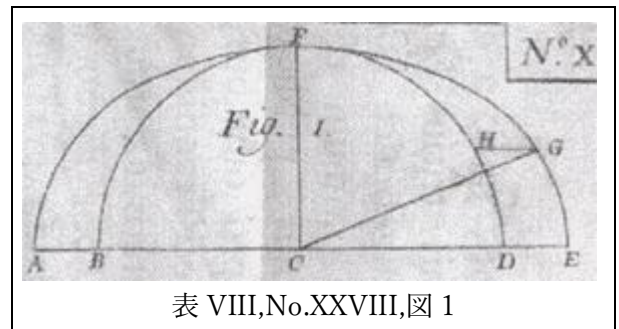


表 VIII, No. XXVIII, 図 1

第1項の終わりに、見事な定理が提示されている。その定理は、私の考えでは、焦点の性質から流れ出てくるものではない。その定理は、著名な著者が提示しているよりはるかに一般的であり、あらゆる曲線に及ぶからである。それらが焦点によってであろうと、別の仕方であろうと、どのようであっても、望むなら、自由手描きの曲線にさえ拡張されるのである。曲線 FG が任意のものであるとする。また E が、任意に取られた複数の点 A, B, C, D の重心であるとする。これら各点から、曲線の任意の2点 F と G へ直線を引けば、 $AFG \cdot BFG \cdot CFG \cdot DFG$ の各扇形の和は、EFG の扇形に対して、点の数と1とが比になる。(No. XXXIV を参照)

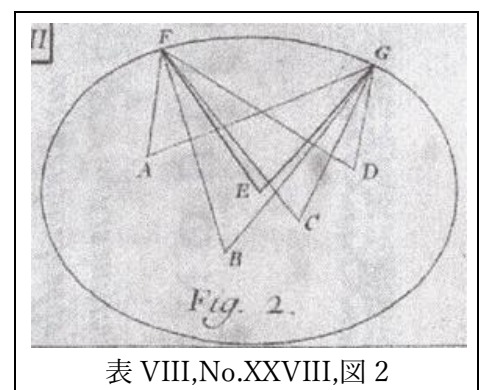


表 VIII, No. XXVIII, 図 2

残りとして、ここで、先に述べた非常に有益な定理を与える機会に乗じて、私は、円錐面および球面のすべてであって、その軸が底面に対して直角であるものを、平面に展開する一般的方法を自分が有していることを暗に示さないわけにはいかない。そしてまた、それらから、与えられた直線的または曲線的な面積に等しい部分を切り取る方法も、私は有している。しかも、そのどちらも、普通の正統的なクアドラトリックスだけを用いて行うことができる。さて、最後に付け加えると、先に述べた非常に有益

な定理に関連して、私は、底面に垂直な軸をもつ円錐形・球状のあらゆる曲面を、平面へ展開できる一般的な方法を持っていることを明かしておきたい。さらに、その曲面から任意に与えられた直線でも曲線でもよい平面領域と等しい面積の部分を取り出す方法もある。これらはいずれも、古来の面積求積曲線だけを用いて実現できるのである。ここから、直円錐に関する注目すべき性質がさらに導かれる。この性質は、私の知る限りこれまで誰も注意していないので、ここに述べる。直円錐の底面の上に、底面として任意の図形をもつ直柱体を立てると、その柱体は円錐の側面からある部分を切り取る。この切り取られた部分の面積は、柱体の底面積に対して、円錐の母線の長さと円錐底面の半径との比に等しい。以上のことから明かなように、どんな平面図形に対しても、求積可能であろうと求積不可能であろうと、直円錐の側面からそれと面積がまったく等しい部分を選び取ることができ、逆に円錐側面上の任意の部分に対応して等面積の平面図形をとることもできる。さらに、直円錐の側面において、円錐の軸と平行な軸をもつ双曲線が3つ以上で囲む部分は、すべて面積が求められる。なぜなら、そうした部分の面積は、ある直線図形と正確に等しいからである。

新しい問題

その解法を求め、数学者たちへの挑戦

鉛直平面内に2点AとBが与えられているとき、点Aから運動を開始した質点Mが、重力だけで降下しつつ可能なかぎり最短時間で点Bに到達するためには、どのような経路AMBを与えればよいかを求めよ。

この種の問題を愛好する人々が刺激され、より熱心な気持ちでこの問題に挑戦するよう促すために言うておく。この問題は単なる抽象的・理論的思索にとどまるものではなく、一見すると何の実用もないように見えるかもしれないが、じつは力学だけでなく他の科学分野においても、驚くほど大きな応用を持っているのである。これはおそらく誰も簡単には信じないかもしれないが。さて、一部の人が早合点

しないようにあらかじめ言うておくが、AとBを結ぶ直線ABは距離としては最短であっても、それを通っても最短時間では到達できない。最短時間で進む軌道は、幾何学者にはよく知られたある曲線AMBである。もし今年が終わるまでに他の誰もその名を宣言しないなら、私がその曲線に名前を付けるつもりである。

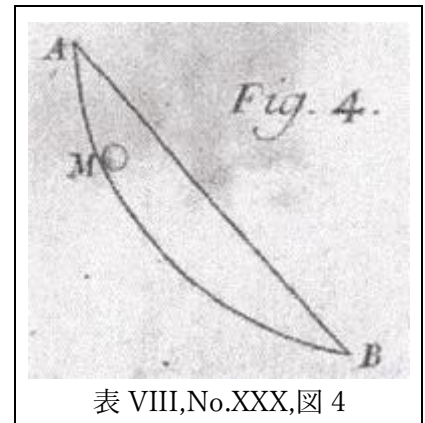


表 VIII, No. XXX, 図 4

No. XXXI ヨハン・ベルヌーイ

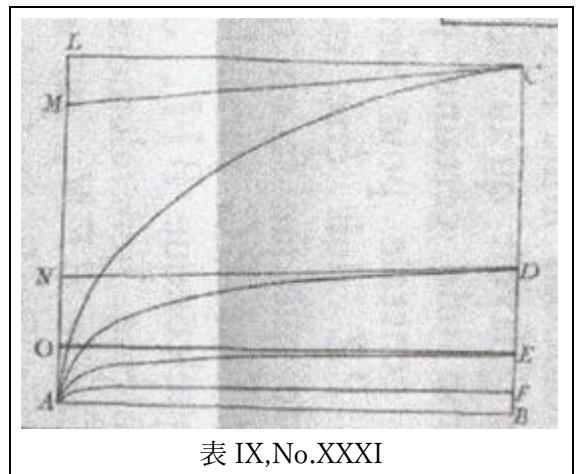
「曲線図形の普遍的求積法・幾何学的連続近似による作図法」
1694 年 11 月号の Acta Eruditorum (No. XXI を参照) に掲載された記事への補足である。

かつては珍しかったが、ここ 10 年か 15 年ほどのあいだに、代数的に求積できない図形の面積を無限級数に持ち込んで解こうとするやり方は、幾何学者たちの間でこれ以上ないほど一般的で使い古された方法となってしまった。これは本来、最後の逃避手段であるにもかかわらずである。私は、

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1696 年 12 月号 P.551

1694 年 11 月号の Acta において、あらゆる図形の面積や曲線長に、区別なく適用できる普遍的な級数法を、おそらく最初に、そして恐らく唯一人、公表した。その方法は、無理式であろうと、不定式が複雑に絡んでいようと、いっさい妨げられることはない。私は、ある人物が何を言おうとも気に留めないし、返答する価値も感じない。私の方法が最も優れた数学者たちから大いに称賛されたこと、これは彼らの書簡が証明している。それだけで十分であり、後悔する理由などない。むしろ、この第二の方法を私的な原稿の中に隠し続けていれば、公にも自分自身にも不当であろう。この方法は多くの場面で、前の第一の方法の便利な代わりとなるからである。前の方法は解析的に書かれているので、計算が複雑な場合には使いにくくなるが、これから示す方法は解析計算に依存せず、複雑・単純を問わず同じ簡単さで面積を処理できる。必要なのは、曲線が描かれ、その接線がわかっていることだけである。私はここでは級数項の計算など、いかなる解析的計算も用いない。むしろこれまでに例のないことだが、非常に簡単な一定法則に従う幾何学的作図を無限に続けることによって、外接長方形に対する曲線図形の真の面積比を与えるのである。

任意の曲線図形 ACB が与えられ、座標軸を AB、BC とする。この曲線図形が、それに外接する長方形 BL に対してどのような面積比をもつかを求めよ、という問題である。これに私は次のように一般的に答える。与えられた曲線 AC の接線 CM は求めることができるから、次の規則によって新しい曲線 AD を作図する。どの点においても BD を、AM の半分に等しくとるのである。こうして AD が定まる。次に第 3 の曲線 AE を作図する。これは、AC から AD を構成したと同じ方法で、AD から構成する。曲線 AE の高さ BE は常は $\frac{1}{2}$ AN と等しい。同じ規則によって、



得られた第 3 の曲線 AE から第 4 の曲線 AF を作り、その第 4 から第 5 の曲線 AG を作る。さらに同様に第 6、第 7 と、この操作が無限に続くものとする。すると、外接矩形 BL が曲線下面積 ACB に対してもつ比は、BC の 2 倍が $BC+BD+BE+BF+BG+\cdots$ の和に対する比と同じである。

符号を交互に配する形式の方が好ましいと思うなら、考案しうる多くの方法のうちから次の別法を挙げよう。曲線 $AD \cdot AE \cdot AF \cdot AG \cdots$ を次の条件で作図する。どの点でも BD を LM ($AC-AM$) と等しく取り、 $BE=BD-AN$ 、 $BF=BE-AO$ 、そしてこれを順次同様に続けていく。こうして作図を行えば、外接矩形 BL と曲線図形 ACB との比は、BC と $(BC-BD+BE-BF+\cdots)$ との比に等しくなる。

注意しておくべきは、AD,AE,AFなどの曲線を全部きちんと作図する必要はないということである。私は理解を助けるためにそれらを全体の曲線として図示したが、実際には、BCの近くにほんの小さな部分だけ引けば、交点D,E,F,Gなどを決定するにはそれで十分なのである。

さらに注意すべき点として、実際にこの方法を用いようとすると、いくつかの場合には次のようなことが起こる。AD,AE,AFの数本を描いた段階で、後続の曲線はBCと点Bより下の位置で交わるようになり、その交点はBからますます遠ざかって、ついには無限に離れた地点に至る。その結果、何一つ決定的な値を得ることができなくなる。しかし、このような場合に我々の方法が無用となり、本来の効果を発揮できなくなってしまうためには、この不都合を取り除く手段がいくつもある。その中で最も確実なのは、与えられた図形を（そのやり方は今では誰でも知っているが）漸近曲線で境界される別の図形へ変換することである。このような漸近曲線で区切られる領域は、先ほど述べたような不都合（交点が無限遠に飛んでしまう現象）に決して陥らないからである。

さて、私が注意したところでは、面積が厳密に求積可能な曲線の場合には、前の方法で得られた級数 $BC+BD+BE+BF+\cdots$ も、また後の方法による交代級数 $BC-BD+BE-BF+BG-\cdots$ も、明らかに総和可能になる。そのため、求積は有限個の項だけで自然に得られる。たとえば、与えられた曲線ACが任意次数 n の放物線族に属するならば、放物線の性質により $BC:AM$ は常に $n:(n-1)$ という一定比を保つ。したがって曲線ADも、並びに $AE \cdot AF \cdot AG$ などすべての後続曲線も、ACと同一の次数の放物線となる。したがって、前の方法によれば、級数 $BC+BD+BE+BF+\cdots$ は、次のような減少等比級数、

$\frac{1}{1}BC + \frac{n-1}{2n}BC + \frac{(n-1)^2}{4nn}BC + \frac{(n-1)^3}{8n^3}BC + \cdots$ という形になる。そして、その総和は通常の等比級数の公式により、 $\frac{2n}{n+1}BC$ となる。ゆえに私は次のように言う。外接矩形と放物線領域ACBの比は

$2BC : \frac{2nBC}{n+1}$ 、 $(n+1):n$ の比である。そしてこの結果は、微分積分法によってすでに久しく知られている

事実と完全に一致する。私はここで新しいことを述べているのではなく、この方法がいかに普遍的であることを示すために引用したにすぎない。同様に、後の方法によれば、級数 $BC-BD+BE-BF+\cdots$ は、 $\frac{1}{1}BC - \frac{1}{n}BC + \frac{1}{nn}BC - \frac{1}{n^3}BC + \cdots$ のような等比的な交代級数となり、その和は $\frac{n}{n+1}BC$ となる。ゆ

えに、外接矩形BLと領域ABCの比は $BC : \frac{n}{n+1}BC$ 、 $n:(n+1)$ である。これはすでに先に述べた結果と同じである。

No. XXXII

善意ある読者よ、なかでも高等数学の愛好家諸氏へ、挨拶を送る

Acta Eruditorum 本年6月号P.269 (No.XXX,P.100を参照)において、きわめて高名なヨハン・ベルヌーイ氏（当時フローニンゲン大学の数学教授）は9つの問題を提出し、その解決に数学者たちを招いた。そして、もし今年が過ぎても他の誰もその解法を公表しなければ、自分自身がその解法を公表するつもりであると約束した。ところがこれまでのところ、その問題の解決に関係するものを、私どもActa編集部へ送ってきた者は誰もいなかった。そしてまた、この問題は価値あるものであり、6

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1696年12月号P.560

月号がまだ届いていないため他の人々の才知をも鍛えるにふさわしいと見なされた。さらに、フランスおよびイタリアの学報 (Ephemerides) にも同じ問題がその間に提示され、より多くの人々の知るところとなった、と確信していたので、かの著名なベルヌーイ氏は、その締切を延期すべきだと判断し、自分の解法の公表を来たる年の復活祭まで差し控えることにした。したがって、数学者たちには自らの力量を試すための十分な時間が与えられており、もしその解法を得たならばその問題の解決を、われわれのこの Acta においてであれ、他国の学報においてであれ、公衆に知らせる機会が与えられている。

No. XXXIII

プログラム

フローニンゲンにて、1697 年に刊行

全世界にその名を馳せる、最も鋭敏なる数学者諸氏へ。

ヨハン・ベルヌーイ数学教授よりご挨拶申し上げます。

私たちが承知しているように、学問を進歩させる事業に取り組むよう才気ある人々を最も奮い立たせるものは、困難でしかも有益な問題を提示することほど強いものはほとんどありません。そしてそのような問題を解決することによって、人は名声を高め、後世に永遠の記念碑を築くことができるのです。そこで私は考えました。数学界にとってもっとも喜ばれることは、メルセンヌ、パスカル、フェルマー、とりわけ最近のフィレンツェの匿名の謎解き名人など、かつて同じことをした偉大な人々にならって、この時代の優れた解析学者たちに一つの問題を提示することではないかと。(ヴィンチェンツォ・ヴィヴィアーニは、1692 年に、半球形ドームの驚くべき構造に関する幾何学的な難問を提示した。この内容については、1692 年の Acta Eruditorum 6 月号 P.274、または 1703 年刊パリ王立科学アカデミー史に収められたヴィヴィアーニ伝を参照。) その問題は、彼らが自分の方法を試金石にかけ、能力を発揮し、もし新しい発見があれば私たちと共有することを可能にします。そしてそれによって、それぞれが自らの功績にふさわしい称賛を、私たちが公に認めるかたちで得ることができるのです。

ところでそのことは、半年前、ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum 6 月号 P.269 (No.XXX,P.161 を参照) において行われており、そこで私はこのような問題を提示した。その問題の有用性が、楽しさと結びついていることは、成功裏にそれに取り組むすべての人々によって理解されるであろう。最初にこの問題を公表した日から、幾何学者たちには 6 ヶ月の期間が与えられていた。その期間内にもし解答が現れなければ、私自身の解法を提示することを約束していたのである。ところが、その期限が過ぎても、何の解答も世に出なかった。ただし、有名なライプニッツ氏、深い幾何学の領域で卓越した功績を挙げた人物が、書簡で私に知らせてきたことだけは例外である。彼は、この極めて美しく、彼の言葉によれば、これまでに聞いたことのない問題の結び目を、すでに見事に解きほぐした。同時に彼は、フランス人やイタリア人たちの間でもその問題が発表できるように、また誰からも期限が短かったという不満が出ないように、設定していた締め切りを次のイースターまで延長することを、私に丁寧に願ってきたのである。このように誠実な願いには、私はただ応じただけでなく、自らその期限延長を公示することに決めた。そして、長い時間が経ったのちに、この高貴で困難な問題に取り組み、ついにその解法を得る者が現れるかどうかを見たいと思ったのである。その間、ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum が手に入らない人たちのために、ここに問題の提示をもう一度繰り返しておく。

幾何学的問題

最速降下の線についての幾何学

地平線からの高さが異なり、しかも同じ鉛直線上にはない二つの与えられた点を結ぶ曲線を求めよ。その曲線上を、上方の点から重力だけで運動を始める可動物体が、可能な限り最も速く下降して下方の点に到達するようなものであること。

この問題の趣旨は次のとおりである。二つの与えられた点を結ぶ、あるいはそこからそこへ引くことのできる無数の線の中から、次の性質をもつものを選び、ということである。細い板を曲げて管状の溝

の形にし、その上に小さな球を置いて自由に離したとき、その球が一方の点から他方の点へ最も短い時間で移動するような線である。

さて、あらゆる誤解の余地をあらかじめ取り除くために、読者に知っておいてほしい。私たちはここでガリレオの仮説を採用する。抵抗を除外した場合、その仮説の正しさについては、もはや健全な幾何学者の中で疑う者はいない。落下する重い物体が得る速度は、その物体が通過した高さ（落下距離）に対して平方根の比にある、というものである。もっとも、私たちの解法は本来はどのような別の仮説に対しても一般的に拡張できることは、付け加えておく。

もはや何の不明点も残っていないので、私たちはこの時代のすべての幾何学者一人ひとりに、強くお願いしたい。即座に取りかかり、自分の方法の最後の深部に隠しているものを、すべて試し、吟味し、明らかにしてほしい、ということである。この賞を奪い取れる者は、どうぞ奪い取ってほしい。私たちが解答者のために用意した賞である。もっともそれは金や銀の額ではない。金銭は、卑しい、賃金目当ての才覚を引き寄せるだけであり、そのような者たちからは、称賛に値するものは何ひとつ期待できず、学問に実りあるものも何も望めないからである。しかし徳はそれ自体がもっとも美しい報酬であり、また栄誉は巨大な励みとなる。ゆえに私たちは、自由で高貴な精神を持つ人物にふさわしい賞を提供する。それは名誉、称賛、そして拍手喝采から成る賞である。その賞によって、我々が偉大なるアポロ（＝数学の守護神・比喩的に傑出した数学者）に匹敵する洞察力を示した者を、公にも私にも、著作によっても言葉によっても、われわれは冠を授け、飾り立て、讃えよう。

もし復活祭までに、我々の提示した問題を解いた者が誰も現れなかったなら、我々は自分たちの得た解答を公表することを惜しむつもりはない。比類なきライブニッツ氏が、自分自身の解法と、すでに以前から託しておいた我々の解法の両方を、すぐに世に出してくれるだろうと期待している。そして幾何学者たちが、それらの解法がより深い源泉から導かれていると理解するなら、彼らも通俗的な幾何学の限界がいかに狭いかを認めざるを得ず、したがって我々の発見をいっそう高く評価するようになるだろう。我々の卓越した問題を解き得る者は非常に少なく、しかもそれは、自分たちが大いに誇りにする独自の方法によって幾何学の最も深い領域にまで到達したと自慢する者たちのあいだでさえ同様である。彼らは、自分たちの「金色の定理」は誰にも知られていないと思い込み、それによって深奥の幾何学の境界を著しく拡張したと誇っているが、実のところ、そのような定理の多くはほかの人によってずっと以前に公表されていたのである。

第二の純粹幾何学的問題

これを前の問題に付け加え、学者諸氏への新年の贈り物として掲げる。

ユークリッドの時代から、初学者ですら知っていることであるが、与えられた点からどのように直線を引いても、その直線は円周によって二つに切られ、与えられた点と円周との二つの交点の間で得られる二つの線分の長さの積は、常に同じ一定の値に等しくなる。私はすでに *Acta Eruditorum* の同年 6 月号の P.265 (No.XXX を参照) で、あの性質が、円に特有のものではなく、実に無数の他の曲線にも当てはまることを最初に示した。したがって、それは円に固有の本質ではあり得ない。そこで私はこの機会を利用して、幾何学者たちに次の課題を提出した。二つの線分の積が一定となるのではなく、一方の線分と他方の線分の二乗との積（＝3 次の量）が、常に同じ値になるような曲線、あるいはそのような曲線群を決定せよ、というものである。しかしこれまで誰一人として、この問題の解法を示した者はいない。望まれるならば、我々自身でその解法をいつでも公表するつもりである。ところが、先の問題は

超越曲線によってでしか満たされないので、ここに、別の問題を提示する。その新しい問題の解法は、純粋に代数的な曲線によって我々の力の及ぶところにある。代数的に解決できる。

次の性質をもつ曲線を求めよ。固定点から引いた任意の直線が曲線で切られて生じる二つの線分を、与えられた任意のべき乗にそれぞれ上げ、その二つを加えると、常に同じ一定の和になるような曲線である。

最も簡単な場合、べきの指数が1のときのケースについては、同じ Acta の P.266 (No.XXX を参照) にすでに解を示してある。しかし一般の場合の解については、我々はまだ公表していない。その解明は、解析学者たちが自ら見いだすべき課題として残しておく。

No. XXXIV ベルヌーイ兄弟の批評への返答

本年6月号の Acta Eruditorum に D. T. (D. Tschirnhaus) による掲載

数週間前、私は Acta Eruditorum の6月号を読み、著名なベルヌーイ氏らの、1695年11月に公表した幾何学研究 (No. XXVIII を参照) について記した注釈を見つけた。もし私があの論評を、あの方たちが望むような形で十分に読まれる時期に読むことができていたなら、どれほどよかったことか。

しかし、私は絶え間なく旅を続け、この問題とはまったく別種の雑務に追われて研究から引き離されていた。そして、迫りくる冬以前には、この研究に時間を割くことはほとんどできないだろうと、私はすぐに予想した。そこで、まったく返答しないよりは、とりあえず少しでも答えるほうがよいと考えたのである。

まず私は考えていたことを先に述べておきたい。私の一般的な方法について、分かりやすく新しい例を提示すれば、最も筋道にかなったやり方である。そうすれば、他の人々もその例から、他のあらゆる曲線にどのように適用すべきかを理解し、彼らもそれを良いと判断するなら、私と協力して真理の発展に寄与できるだろう、と考えたのである。図1の楕円に関する定理が、他の、いや無数の方法でも証明できるとしても、

それは私の主張を少しも損なうものではない。私が主張するのは、この定理が新しい定理であり、すべての円錐曲線に適用でき、とりわけ重要なのはこの種の方法によってあらゆる曲線を測定し得る、ということである。この方法はまったく独自のものであると私は考えている。著名なヨハン・ベルヌーイ氏が、その卓越した知性にふさわしい洞察力によって、重要性をよく理解したのも不思議ではない。

図2以降に関して言えば、ヨハン・ベルヌーイ氏の言葉は、「焦点によるものでも、その他いかなる方法によるものであれ、さらには手で自由に描いたものであれ、曲線一般に話が及ぶ」と述べているが、そこから察するに彼は「すべての曲線が焦点によって描けるとは限らない」という考えを持っているように思われる。しかし実際には、その反対、「すべての曲線は焦点によって（ある種の焦点的構成により）描き得る」ことは簡単に証明できるのである。

接線法の逆問題を、私は数年前には非常に高く評価していた。

だが今では、いくつかの重大な理由から、当時のような高い位置には置いていないことを認める。しかしだからといって、その方法をさらに発展させようとする才能ある人々の意欲を妨げようなどという気持ちは、私には全くない。私はずっと年前に、この逆接線法を十分に発展させ、専念する時間があつた時には、解けなかった問題は一つもなかった。そして実際、ごく最近も、多くの曲線に共通する接線の性質を明らかにしてきた。しかしそれでも私は常に、曲線の作図や寸法を決定するための本質的・正道の方法ではない、と考えていた。今では、こうした研究を続けるための自由な時間がほとんど残されて

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1696年11月号 P.319

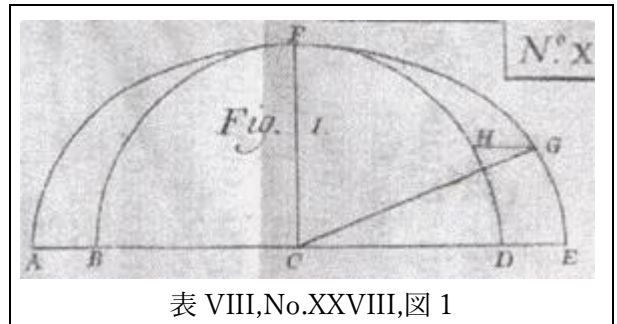


表 VIII, No. XXVIII, 図 1

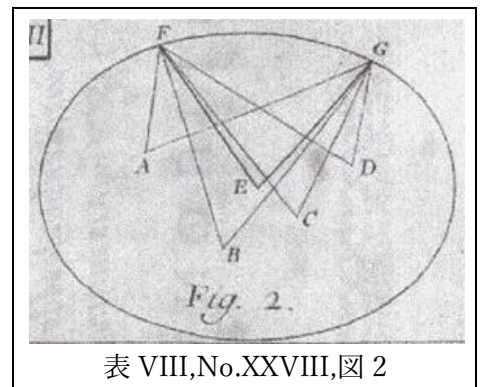


表 VIII, No. XXVIII, 図 2

いないので、私は逆接線法の追究を他の人々に喜んで譲ることにする。私に許されるわずかな余暇は、この種の研究を、正しい秩序に従って扱うことに充てたい。そのほうが私自身にも、そして学界全体にも大いに益すると考えるからである。

任意の特定の曲線に対する焦点についての事項は、私はすでに「*Medicina Mentis*」の中で論じ、この種の問題に通じた者にとって十分な形で、すべての焦点をどのように確実に決定できるかを示してある。私の考えでは、どんな曲線も、たとえば円ですら無限に多くの焦点を持つ。それらは、すべて私の方法によって求めることができることを *Acta Eruditorum* において示した。しかし私は、ここには特別な簡便法が存在することを否定できない。これらがなければ、通常解析学によってこの問題を克服することは、ほとんど不可能なのである。もし、誰かがこの問題に取り組みたいと望むなら、私は喜んで協力し、すでに私が知っていることをその人と共有したいと思う。もっとも、3次放物線の焦点を決定することには、それほど大きな困難はない。以前これらの焦点を調べていたとき、それをすでに知っていたからである。

双曲線の面積を測るために、私はある機械的曲線の弧を用いた。私の方法によれば、そこからただちに、同じ原理が楕円や放物線にも、どんな曲線に対しても成立することが分かるからである。この方法は、双曲線の場合について、Dr.ホイヘンス (Huygens) にも好評であり、幾何学者が特別なものとして考察すべき事項として提示されてきた。私は、それをはるかに普遍的な形で実現したのである。ヘウルニウス (Heuradius) が既に示した、放物線の弧を用いて双曲線の面積を求める方法は、私の普遍的方法に従うと、それほど自然には導かれられないように思われる。もっとも、私がヘウルニウスの方法の本質を正確にたどれていなかったかもしれない。いずれにせよ、今後の研究ではその点に十分注意を払うつもりである。

さて、図4において、放物線の部分を互いに比較するために私が示した例について、私は率直に告白せずにはいられない。曲線の部分どうしを一般的に比較し得る方法を偶然見出したとき、その発見がもつ重要性を私はすぐに理解したのである。しかし、その計算を実際に応用しようとすると、かなりの困難が立ち現れたため、私はごく単純な場合から取りかかった。そうした中で、他のいくつかの場合に加えて、放物線の曲線にも行き当たったのである。放物線では、当初はた

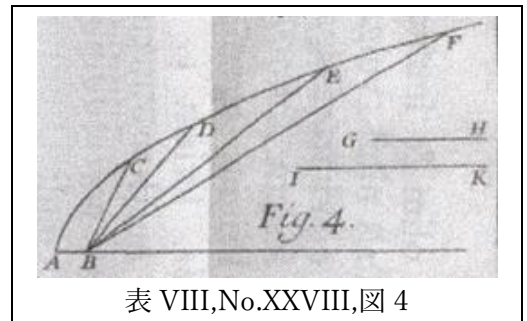


表 VIII, No. XXVIII, 図 4

しかに無視できない困難が現れた。しかし、円錐曲線のすべてに通用する、いくつかの一般的定理を発見してからは、そうした困難は消え去った。そして、こうした定理からは、円錐曲線についてこれまで知られていたすべてが、通常よりはるかに簡単な方法で導き出されるのであるそこで私は、この問題の全体をある才気ある人物と共有したところ、彼もまた計算が自分の側でも完全に正しいと確認してくれた。そのため私は、何かを公に発表し、この問題そのものをさらに追究する決心をした。しかし、この研究をさらに先へ進めることはできず、それが可能になったのは、ほんの数か月前のことであった。そして私は、方法そのものがまったく確実であり、計算も十分に正確であることを発見したのである。ところで私は、ある仮定を用いていた。この仮定は、無限小計算に携わる者なら誰もが用いるものではあるが、時には誤りに導きうることに私は分かっていた。しばしば常に残る無限小量の総和が有限量を構成してしまうからである。そこで私は、まったく別の方法でこの事柄に取り組み、

少しでも疑念の余地のある仮定を一切必要としない方法を採用した。そして、かなり大規模な計算であったが、ようやくそれを仕上げる事ができた。しかし、その方法の正確さについては、まだ私には確信が持てないので、当面は結論の公表を控えることにする。これは、時間が取れ次第、私がまず取り組むべき研究課題となるだろう。その研究が終わったなら、より多くの実例を示し、場合によってはその方法そのものも公表するつもりである。私は今のところ、この方法が確実であり、しかも普遍的であって、同一の曲線だけでなく、どのように異なる曲線同士でも比較できると認めている。これにより、何ができ、何ができないかが明らかになるだろう。さて、ヨハン・ベルヌーイ氏の、さまざまな曲線を円曲線へ還元するという非常に美しく、きわめて巧妙な発見について言えば、私は彼に異議を唱える点は何もない。しかし、私には、同じことが私自身の曲線進開法によって無数の方法でさらに拡張できることを簡単に示すことができる。そしてここから、ときとして他人の思考を理解することがどれほど困難なものかが分かる。もっとも、その考えは私自身のものからそれほど遠いわけではないのだが。しかも、彼の才能がまったく卓越し、きわめて理解力に富むことを私はよく知っている。しかし、私が出発点の源泉、精神の治療薬ともいべき真の原理を直接指し示したにもかかわらず、彼はまだその核心を十分に理解するには至らなかったようだ。こうである以上、他の誰かがそれを解き明かせるとは私は到底思えない。さて、私がどれほど進んで彼の卓越した才能に応えようとしているかを、彼に理解してもらうために述べておくが、ベルヌーイの方法では、ヒュイゲンスの進開法によって生じるすべての曲線、私の見解ではただ一つの焦点しかもたぬ曲線は、円曲線へ還元できる。同様に私の方法では、二つの焦点をもつ曲線は楕円・双曲線・放物線へ、そして三つ、四つ、さらに多数の焦点をもつ曲線は、常により高次の幾何学的曲線へ還元しうるのである。これが幾何学の進歩にどれほど大きな意義をもつかは、誰の目にも明らかであろう。だから、この一点でも理解した者が、全ての考えうる曲線を記述するために、これ以上の方法を望むなどということがあれば、それこそ奇妙というほかない。私が精神の医術と呼ぶところの方法以上のものなど、望めるはずがないのだから。もしこれまでの説明でも私の意図を十分に示しきれていないのであれば、私は喜んでその方法全体を公開するつもりである。さて、ヨハン・ベルヌーイ氏が「交わる直線が作る長方形の積が常に等しい」という円の性質が、円に固有の本質ではないと述べていることに関連して言えば、私も付け加えたい。私は独自の、しかも普遍的な定理をいくつも持っており、それらはデカルトが教えたものとは異なる、新しい軌跡論へと通じる道を開くのである。この種の例は、私はすでに2年ほど前にライプニッツ氏に示していた。そして、前に述べたあの性質、交わる直線の作る線分積が等しいという性質は、あらゆる曲線に無条件に成り立つ可能性が非常に高いと私には思われる。しかも確実なこととして、放物線・双曲線・楕円においても、二本の直線がそれらの曲線上で交わるとき、その交点によって生じる線分の積が、無数の取り方において、一定の関係のもとで常に等しいという真理は、実際に証明可能である。

最後に、曲線図形の分割に関することで、一つ公に述べておくことには価値があるだろう。アルキメデスが螺旋線を用いて円の面積を有理的部分へ分割したことはよく知られている。同じことは、近代の数学者たち、特にスルジウス氏が「Miscellanea」の中で、数と数との比に従い無数の螺旋線を用いることによって行ったことでもある。この問題をさらに進展させたのはジェイムズ・グレゴリーであり、彼は *Geometria Universalis* の 62 命題 P.113 で、次数が順に上昇する幾何学曲線を用いて、円の四分円を有理的比率に分割した。しかし、私はこれらすべての方法を凌駕するやり方を知っている。その方法によれば、二本の直線と一本の幾何学曲線で囲まれた任意の領域は、たとえ求積不可能であっても、与えられた線分比に従って、ただ一本の幾何学曲線によって、しかも無数の方法で分割できるからである。

さらに、その領域が求積可能な場合には、その求積も無数の方法で決定できるのである。この方法について、これまで誰ひとりとして同じような発見に達したとは私は聞かないので、ぜひ公にしておきたいと思った。そして、この方法そのものも、もし相手に受け入れられると分かれば、機会を見て喜んで伝授するのをためらわないつもりである。

No. XXXV

ヨハン・ベルヌーイ氏のある種のコノイド（円錐的形狀）およびス
フェロイド（球状・楕円体的形状）について

1695 年の Acta Eruditorum の P.553 に提示された方程式の解析的解法。（弟ヤコブ・ベルヌーイ）

この最近 11 月、高名なる D.T.によって発表された回答に対する小さな注記（ほか若干）。（前章を参照）

前年 6 月号の Acta Eruditorum において（No.XXX を参照）、私は円錐体および回転楕円体の表面を平面に展開する方法について、ただ通りがかりに軽く触れる程度にほのめかしたただけであった。本来なら、私はそのことに公に言及するつもりはなかったのだが、執筆の途中で、直円錐に関するあの見事な性質がふと心に浮かんだため、それを読者に披露すべきだと判断したのである。その際、その性質が生じてくる考え方の由来もあわせて暗示しておいた。この題材は、研究すれば必ず報われるような価値あるものである。まだ優れた成果が多く掘り出される余地が残っているからだ。それを示すために、私は

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1697 年 3 月号 P.113

ここで新しく、簡単ではあるが優雅な定理を一つ提示しよう。任意の曲線 ABC を、二つの軸 DE と DF のまわりに回転させる場合を考えよう。これら二つの軸 DE と DF は、角 EDF を任意の大きさに構成しているものとする。そして、角 EDF を二等分する線に対して垂直な直線 GDH を取り、この二等分線に平行なものを EF とする。私は次のように主張する。曲線 ABC を軸 DE のまわりに回転して生じる表面と、同じ曲線 ABC を軸 DF のまわりに回転して生じる表面とを合わせたものは、曲線 ABC を GH のまわりに回転して生じる一つの表面に対し、ちょうど EF:ED の比をなす。同じことは、回転によって生じる立体についても成り立つ。曲線 ACB の部分、扇形 ADC、あるいはその他どんな図形であっても、それを三つの軸 DE・DF・GH のまわりに回転してできる回転体について、その体積の比も同様に EF:ED となる。角 EDF が直角の $\frac{2}{5}$ の場合には、曲線 ABC を軸 DE

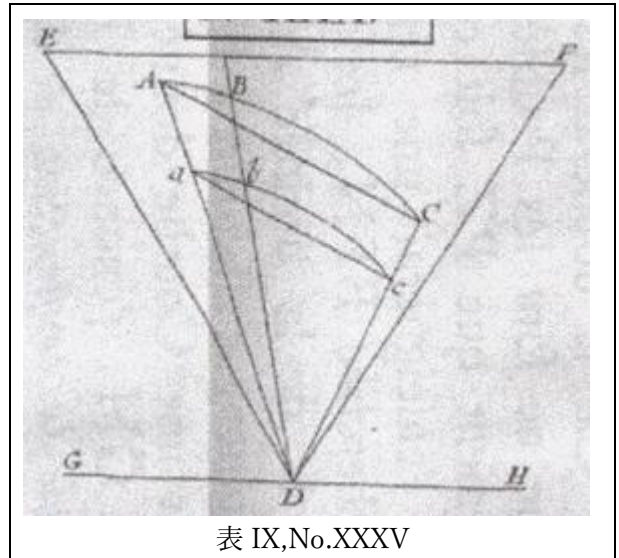


表 IX, No. XXXV

と DF のまわりに回転して生じる二つの回転面の合計は、曲線 ABC を GH のまわりに回転して生じる回転面と等しくなる。しかし、角 EDF がこの値以外の場合には、曲線 ABC に相似な曲線 abc を、 $Db:DB = EF:\sqrt{EF \cdot ED}$ を満たすように構成すれば、曲線 ABC を DE と DF のまわりに回転してできる二つの表面の和は、曲線 abc を GH のまわりに回転してできる表面と等しくなる。もし Db と DB が、EF との比と同じ比をもつように取られるならば、図形 ACB を軸 DE と DF のまわりに回転して得られる二つの回転体は、図形 acb を GH のまわりに回転して得られる回転体と等しい体積になる。このことから、同一の楕円から作られる長球（長軸回りの回転楕円体）と扁球（短軸回りの回転楕円体）の二つを合わせた体積に等しい一つの回転体を構成しうること、またそれら二つの楕円体の表面積と等し

い一つの表面も構成しうることが明らかである。そしてこれは、かつてホイヘンスが最も求めていた課題の一つであった。

ここに、兄が1695年12月号のActaに提示した微分方程式について、これまで誰も解を示していなかったの、私が解析的解法を付け加えることにしよう。レイプニッツから取り組むよう強く促され、しかもレイプニッツ自身もこの問題の解決にかなりの労力を注いでいることが分かったし、兄もまた度々数学上の挑戦を送ってきて、この問題を私が最初に想像していたよりも重要視していたことが分かったからである。私はこの招きを、これ以上放置しておくわけにはいかなかった。そこで私は、わずか四分の一時間ほど熟考しただけで思いついたこの解法をここに示そう。この解法は、もし覚えておられるなら、私は当時すでにレイプニッツに書き送っていたものであり、それは兄の構成的解法がまだ世に出る前のことであった。

提示された方程式は次のものである。 $ady = ypdx + by^n qdx$ (a と b は与えられた定数、 p と q は x によって任意に与えられる関数)。この方程式では、不定文字 x と y およびその微分 dx, dy を互いに分離し、少なくとも求積によって解を構成できる形にしなければならない。私はこれを次のように行う。指数 n を低めて扱いやすくするために、 $y = v^{n(1-n)} y = v$ と置くべきである。すると元の方程式は、さらに解くべき次の形へと変換される。 $\frac{1}{1-n}adv = vpdx + bqdx$ 、そしてこの形は、1696年3月号でレイプニッツが示した公式に一致している。しかし、先に述べたような指数を下げる変換を私が用いる必要はない。 $y = mz$ と置けば、私は目的を直接達成できるからである。このとき $dy = mdz + zdm$ が成り立ち、これらを元の方程式に代入すれば、 $amdz = mzpdx + bm^n z^n qdx$ となる。さて、この四つの項をもつ方程式を二項だけの形に簡約するため、 $amdz = mzpdx$ 、 $adz : z = pdx$ と置く。この関係により、 z は x により、代数的にまたは少なくとも超越的に求められるので、 $z = \xi$ とする。 ξ は x と定数から決まる与えられた量である。すると元の式から $amdz$ と $mzpdx$ を除いた残りは $azdm = bm^n z^n qdx$ であり、 $z = \xi$ を代入すれば $a\xi dm = bm^n \xi^n qdx$ 、 $am^{-n} dm = b\xi^{n-1} qdx$ 。この式から m もまた x による積分によって、 $\frac{a}{-n+1} m^{-n+1} = b \int \xi^{n-1} qdx$ が得られる。 m を X と置けば、 X は x と定数から構成される量である。したがって、 $y = (zm) = \xi X$ という、 x と定数のみに依存する形の解が得られる。以上で求むることは示された。(証明終わり)

これを書いているちょうどその時、最近のActa Eruditorum 11月号に掲載されたあの高名なツィルンハウス殿の小論文が私のもとに届いた。そこには全体を通じて、きわめて鋭い才能の深い思索が息づいていることを私は認める。ただ一つ残念なのは、私が彼の幾何学的考察について述べた私の観察を、彼が是認しているのか、あるいは却下しているのか、その点を理解することができないということである。高度な幾何学について誰にも劣らぬこの人物が、私の述べたような事柄を否定しようとしているなどとは、私は決して思わない。私が述べるところは、望みさえすればいつでも最も明瞭な証明によって支持しうるものだからである。したがって私はむしろ、彼が1695年11月号(No. XXVIIIを参照)で提示したいくつかの事項には、本来は限定を加えるべき点があったのだ、と認めたい。しかしその限定は、兄にも私にも。私たちは互いに相談したのでもないのに、ほとんど同じ指摘をしたのだが、理解することができなかった。私はもはや、あの鋭敏きわまりない著者が驚くべき一般的方法を有していることを疑わない。できることなら、彼がそれらを我々にも分け与えてくれればよいのだが。

そうでなければ、もし彼に不慮のことが起これば、本来決して忘れ去られてはならないそのような方法が、彼とともに失われてしまうおそれがあるからである。ここで当面、あの最新の返答の中で私が注意すべきと思った点を、簡単に記しておこう。

私は今でも、図2に示した定理はどんな曲線にも当てはまると主張する。その曲線が焦点を使って描かれたものであろうと、ほかのどんな方法で描かれたものであろうと、さらには手で自由に描いたものであってもかまわない。ところが、あの有名な学者は、私のその主張から、ベルヌーイ氏は「すべての曲線を焦点によって描くことができる」とは考えていない」と主張している、という結論を引き出すのだが、そんな結論はまったく成り立たない。まるで、同じ曲線が焦点法で描けるなら、他の何百・何千という別の方法では描けないかのように話しているが、実際には同じ曲線は焦点法でも描けるし、他の多くの方法でも描けるのである。

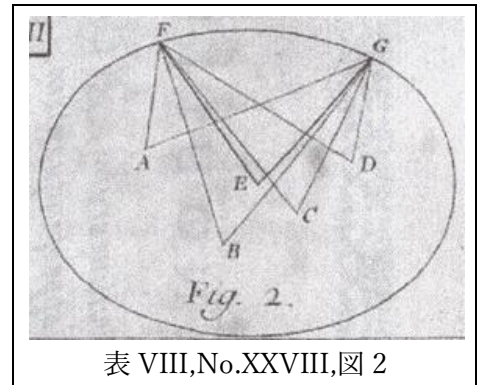


表 VIII, No. XXVIII, 図 2

たとえば、楕円ひとつを取り上げてもよい。楕円は、単に糸によってだけでなく、直角をなす二つの辺に沿って進む定規によっても、またその他の方法によっても、同じように簡単に作り出される。私の主張からに導かれるのは、「あの定理（図2の定理）は、曲線が焦点によってだけではなく、どのような生成法によって生じたものであれ、すべての曲線に対して成り立つ」ということだけである。したがって、私の主張を損なうことなく、私はすべての曲線が焦点をもつことを否定しない。しかし、さらに進んで、曲線が常に単純な焦点点状の焦点をもち、そこから常に糸を使って描くことができるのかどうか。これについては、これまで誰によっても証明されていない。

さらに、あの非常に才気に富んだ人物が述べているところによれば、数年前までは大いに重視していた接線法の逆問題を、いまでは、いくつかの理由によって、自分の評価する方法として扱っていない、という。これはむしろ、彼自身がその方法を、自分にとっては簡単でありふれた手法とみなすほどまでに習熟したことを示す徴候であろう。彼は、その方法を使えば、これまで提示されたどんな問題でも、自分がその方法に取り組む機会さえあれば、解けなかったものはないと見ているからである。そこで私は、彼が以前の方法に代えて新たに導入したという、放物線の部分を相互に比較するもう一つの方法を、ぜひ見てみたいと思う。彼はその方法を、より多くの例とともに公表することを約束しているからである。しかし率直に言えば、彼が挙げているあらゆるものから、どのようにして私の曲線を円に還元する定理が、Huygensの方法以外の別の展開によっていっそう拡張され得るというのか、私にはまだ理解できていない。もし彼が、自分の申し出ているという方法を実際に持っているのであれば、それを、彼が知らせる気になった時には、喜んで受け取るつもりである。しかし前もって注意しておきたいのがある。もし曲線が円によって還元できるのであれば、それらを楕円・双曲線・放物線、あるいはそれより高度な曲線への展開として還元する必要はない。円は直線の次に最も単純な曲線だからである。ところが実際のところ、どんな曲線でも、たとえいくつ焦点を持っていようとも、常にただ一つの方法、Huygens型の展開によって描くことができる。したがって私は、同じことが常に、よりいっそう単純な方法によって得られるのに、より複雑な展開法に訴える必要があるのかを理解できない。

つづいて、あの非常に博識な人物は、新しい軌跡の学問のための特別な普遍定理を自分は持っている」と述べ、互いに交わる直線によって作られる長方形の等しさが、私が最近示したように円だけでなく無数の他の曲線にも成立するばかりでなく、絶対的にすべての曲線に共通していると、自分には非常にも

っともらしく思われるのだ、と言っている。彼が、二本の直線だけが互いに交わる場合のことを言っているのなら、その点について私は簡単に認める。彼が述べているところによれば、放物線・双曲線・楕円においても、互いに交差する二本の直線によって生じる線分の長方形が、無数の仕方で、ある一定の比例関係のもとに等しくなることが証明できるということが確実なことだ、と彼は言おうとしているようである。しかし、もし私がそのようなことをあたかも新発見であるかのように売り出そうとしていたら、まったく馬鹿げたことになっていただろう。少し注意を向けただけで誰にでも明らかなように、どんな曲線でも、それが円でない限り、円によって4点で切られることができる。その4点のうち、2点ずつを通る直線を引けば、それらの直線は必ず、その線分の長方形が等しくなるのである。したがって、この性質がすべての曲線について成り立つことは、もっともらしいどころではなく、完全に確実である。私の定理の趣旨は、それとはまったく異なる。私が求めているのは、二本だけの直線ではなく、ある一点から出る無数の、すべての直線が、曲線を切るときに、それぞれの線分によって作る長方形が等しくなることである。そして、この性質がすべての曲線に共通するなど誰も証明することはできない。むしろその反対で、この性質が成り立たないことは、あの3種の円錐曲線（楕円・双曲線・放物線）そのものの内部において示すことができる。さて残るところとして、もし彼が自分の定理の効力を試してみたいのであれば、十分すぎるほど豊富な適用材料がある。私が Acta Eruditorum の6月号において未解決のまま残しておいた曲線の探索問題である。「ある曲線において、その一つの部分の下に含まれる立体と、その曲線の別の部分の正方形とが、どの位置でも常に互いに等しくなるようにせよ」という問題である。この問題についての解は、私はすでに発見している。また、私が最近公に提示した次の問題、「与えられたべき乗に上げられた曲線の部分の和が、常に一定となるような曲線を求めよ」に挑戦していただきたい。この問題やその他の問題にあの非常に洞察力に富む人物が満足に解答することができるならば、彼の発見について私たちも相応の評価を下す格好の機会となるだろう。もっとも、それは、これまで我々には隠しておきたい様子であった彼自身の方法が、ついに率直に公開されるならばの話であるが。

№. XXXVI

ヨハン・ベルヌーイ氏による指数関数の計算原理

驚くべきことに、著名なニウウェンティット (Nieuwentijt) が、最近出版した自らの第二の考察の中で、あの極めて著名なライプニッツ氏 (Leibniz) の返答について不満を述べている。自分が最初に提出した反論に、完全には答えていないように思われると、彼は主張しているのである。

ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の 1697年3月号 P.125

私は確かに、われわれの計算法（微積分法）が、それ自身だけでも十分に信用に値するものとして自らを証明していると信じていた。たとえこれまで互いに異なる道をたどっていたとはいえ、数多く偉大な発見者たちが、皆この方法に行き着いたこと、さらに、この方法が一度たりとも間違いであると証明されることがないからである。疑わしい方法、ましてや誤った方法に、これは決して期待できることではないし、期待すべきでもない。われわれにとって、あらゆる証拠に等しい一つの実例として、有名なカテナリー問題を挙げよう。この問題の解を、見事に一致した形で示したのは、尊敬すべき二人の偉大な学者、ホイヘンス (Huygens) とライプニッツ氏 (Leibniz) であった。この二人の解に、私自身の解が加わったが、それは最小の点においてさえ二人と異なるところがなかった。ただし、ホイヘンスは彼独

自の解析を、私は私の方法を用いたのであるが、私の方法のほうが幸いにもより深く進むことができた。実際この方法の導きのもとに、私は単なる解答を超えてさらに先へと進んだ。そのため、ホイヘンス自身が驚嘆し、率直に告白したほどである。(ロッテルダムで出版された *Historia Operum Eruditorum* の 1693 年 2 月号 P.251 を参照) 自分には、この計算法が、どのようにしてあなたをそこまで導き得たのか想像もつかない。

私は、ここでニウウェンティット (Nieuwentijt) の新たな反論に対して返答したいとは思わない。この問題の中心人物である最も鋭敏なるライプニッツ氏 (Leibniz) 自身が、もし必要と見れば(もっとも、私はそうなるとは思わないのだが)、正当な弁護をおこたうことは決してないだろうからである。私はただ、これら第二考察の最後の節だけに取りかかることにする。それは、私がすでに何度も言いたいと思っていたことであり、指数が不定として現れるような曲線方程式をどのように扱うべきか、の方法を説明する機会を得るためである。私はその発明を、ある程度までは自分に帰することが許されると思う。今から 5 年も前に、私は自らの力でそこへ到達しており、ライプニッツ氏からの示唆によったものではないと、ライプニッツ氏自身が *Acta Eruditorum* の 1695 年 P.314 ではっきり述べているからである。これはもちろん、とくにニウウェンティットに対して、微分計算が指数曲線に応用される場合にも、いささかの困難にも悩まされていないという強力な論拠となるはずである。ともあれ私は、私のより詳しい説明が、あの博識なニウウェンティットにとって、ライプニッツ氏の説明があまりに簡略すぎたために彼がつかずいた問題を取り除く助けとなるなら、大いに喜ぶであろう。そうならなくとも、私は公共のために努力したことを後悔することはない。

私は、(この点についてライプニッツ氏でさえまだ考察していなかった頃に) 不定のべき乗へと上げられた量を通過量と呼んでいた。その理由は、そうした量があらゆる可能な次元を、いわば通過するように見えるからである。このため、そのような量を含む方程式、そしてそれによって定義される曲線も、私は同じ名前、通過量と呼んでいた。しかし、指数的量という名称が、あの偉大な幾何学者に大いに気に入られたので、その名誉に敬意を表して、私はこのもう一つの名称を自分も採用することにする。以前の名称は廃して、同じ対象に対して異なる名前を用いると、しばしば起こるように、読者に混乱を招くからである。

私は、指数的量というものを代数的量と超越的量の間にあるものとして考えていた。指数的量は、有限個の項から成り立つという点で代数的量に近づくが、いかなる代数的作図によっても表すことができないという点で超越的量に近づくからである。ここから理解できるのは、ホイヘンス (Huygens) が指数曲線を超超越曲線と呼んで冗談を言ったことが、どれほどの外れで余分なものであったかということである。むしろ真面目に、そして適切に呼ぶのであれば、それらを亜超越的と名づけるべきであった。対数曲線こそが、すべての超越曲線の中でも最も単純なものであり、しかもこの指数曲線の属する種類に入るからである。さらに、他のすべての指数曲線も、この対数曲線を用いて構成することができ、その接線もこれによって求めることができることは、以下で述べることから明らかになるだろう。さて、ニウウェンティットが同意しようとしなくて、彼を困惑させている点は次の三つである。1、同じ一つの不定量が、対数曲線において垂線の長さでありながら、同時に別のある曲線の横座標になり得るのはどうしてか。2、方程式 $x^y = y$ から、どうして $ylx = ly$ という方程式が導かれるのか。(ここで $lx, ly, lz, \dots$ はそれぞれ $x, y, z, \dots$ の対数を意味する。) 3、どうして k が $\int \frac{dx}{x}$ に等しいと言えるのか。

これらは、他ではすでに十分に語りつくされた事柄であるが、彼がその起源を自分は知らないと告白しているので、私は彼にそれを教えることにしよう。

曲線 HGF を考え、その横軸を DE、これに垂直な DC を縦軸とする。また別に、対数曲線の軸を AB とする。曲線 HGF 上の点 F から縦線 FE を延長していくと、それは対数軸 AB の一点 B に達する。この B から垂線 BC を下ろすと、その長さは元の DE と等しくなる。こうして BC は対数曲線に属する縦線とみなせる。このことから、どんな曲線 HGF であっても、その DE を対数曲線だけでなく、任意の別の曲線 AB においても、縦線と同種のものとして扱うことができる理由が明らかである。しかもこの変換は、DE の増

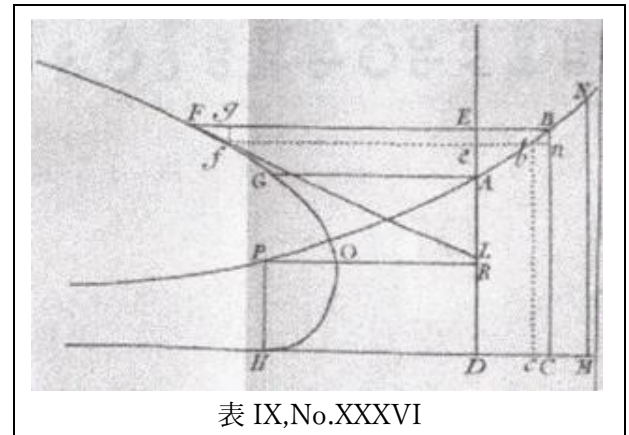


表 IX, No. XXXVI

加の仕方が均等であろうが不均等であろうが、もとの曲線での DE と EF の関係を損なうことがない。したがって、たとえば対数軸 AB 上で等しい微小増分 Co をとって、曲線 HGF 側の微小増分 Fg と、変換先での微小増分 Ee の比、FE とその下接線 EL の比は、常に一般的な法則どおり保たれるのである。第二の点、 $\sqrt{v}x = ly$ となることを証明するためには、普通に出回っている対数表を参照してほしい。即座に、平方、立方、4 乗などの数の対数が、その平方根・立方根・4 乗根の対数の 2 倍・3 倍・4 倍になっていることを示してくれる。したがって一般に $\text{Logar. } x^v = v \text{Logar. } x$ 。ゆえに、 $x^v = y$ ならば、両者の対数も等しいのであり、 $\sqrt{v}x = ly$ になる。残る第 3 の点を次のように示す。もし AD=1 を接線の下接線とし、BC をある数値とすると、DC はその対数となることは周知のとおりである。ところで、対数曲線の性質から、点 B における下接線 Bn は $BC \times Cc$ に等しくなる。したがって $Bn : BC = Cc$ である。ここで BC を $x, y, z, \dots$ とし、DC を $lx, ly, lz, \dots$ とすれば、次が成立する。

$dx : x, dy : y, dz : z, \dots = dlx, dly, dlz, \dots$ 。積分すれば、 $\int \frac{dx}{x}, \int \frac{dy}{y}, \int \frac{dz}{z}, \dots = lx, ly, lz, \dots$ となる。そこで私は大いに不思議に思うのが、ニウウエンティットは、ほとんど私と同じ証明を作っているが、記号の違いによって区別を求め、 $\int \frac{dy}{y} = ly$ は認めるのに、 $\int \frac{dx}{x} = lx$ が成り立つかどうかを疑っている。まるで、任意の呼び名の違いが、実質の変更をもたらすかのようなある。もちろん彼はこう言うだろう。これは、すべての不定量を絶対的に考えるならば成り立つが、ここでは x と y を一定の相互関係のもとで扱うべきである、と。しかし、それでどうなるというのか？私の証明は一般的なものであり、いかなる条件や相互関係にも左右されず、何ものによっても限定されることがないのである。すでに証明したとおり、横軸 DE または BC がどのような仕方で増加しようとも、またそれらがどんな名前と呼ばれようと（ x と呼ぼうが y と呼ぼうが）、あるいは絶対的に扱おうとも相互関係のもとで扱おうとも、それらの対数は常に DC に等しいのである。さらに、AD=1=下接線と置いたことは、単に計算の簡便さのためだけである。任意の量を 1 として置き換えることは、他のすべての量をその設定に従って比率的に扱う限り、全く安全に許される。以上で、私の考えでは難点の霧はすべて晴れたので、いよいよ本題である指数曲線の扱いに入ることとしよう。

指数的量は、いくつか異なる段階をもつが、そのうち最も低い段階（これまで専ら考察されてきたもの）は、指数が通常の変数、たとえば y^m, x^n, z^p などから成る場合である。ここで m, n, p は単に不定

指数的量は、いくつか異なる段階をもつが、そのうち最も低い段階（これまで専ら考察されてきたもの）は、指数が通常の変数、たとえば y^m, x^n, z^p などから成る場合である。ここで m, n, p は単に不定

量として置かれたのである。第2階級の指数量とは、指数そのものが指数量である場合、たとえば y^{m^n} が指数量であるような場合である。そして一般に、任意の階級の指数量は、その指数として、直前の階級の指数量をもつものである。同じことは、指数方程式や指数曲線についても理解すべきであり、それぞれ自らの階級に従って分類される。なお注意すべきこととして、もしある方程式が、複数の異なる階級の指数量を含んでいる場合には、その方程式は、より高い階級を構成する項に従って名称を与えられるということである。以上の事柄について、要点を述べると次のとおりである。

任意の対数曲線 AB をとり、その下接線を 1 とし、それと等しい最初の縦座標 AD をとる。曲線上の縦座標 BC は、どのような変化してもよい。それが他の曲線における縦座標であっても、あるいは別の曲線の横座標であっても構わない。ただし、その変化は微小増分によって進むものとする。このとき $BC = x, y, z$ だから $DC = lx, ly, lz$ 。また $Bn = dx, dy, dz$ 、 $Cc = dlx, dly, dlz, \dots = \frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}, \dots$ となる。以上により、つぎの一般法則が導かれる。どのような複合量であろうとも、その対数の微分は、その量の微分をその量自身で割ったものに等しい。たとえば、 $dl\sqrt{(xx+yy)} = (xdx+ydy):(xx+yy)$ である。

一次の指数形の量 m^n を微分しよう。そのため $m^n = t$ とおくと、 $nlm = lt$ となる。微分計算に従って微分すれば、 $lmdn + ndlm = dlt$ となる。ところで一般規則によれば、 $dln = dm:m$ 、 $dlt = dt:t$ であるから、 $lmdn + ndm:m = dt:t = (m^n = t) dt:m^n$ となる。したがって、

$dt = dm^n = m^n lmdn + nm^{n-1} dm$ が得られる。これが、一次の指数形量に対して成り立つ第1の特別規則を導くものである。 m と n の代わりに、不定量からどのように複合された量でも置くことができるからである。

二次指数関数 m^{n^p} を考える。これを t とおく。 $n^p l m = lt$ となる。両辺を通常の方法で微分すれば、 $n^p dln + lmdn^p = dlt$ を得る。ところで、第1特別規則によれば $dn^p = pn^{p-1} dn + n^p \ln dp$ であり、一般規則によれば、 $dln = dm:m$ 、 $dlt = dt:t$ である。したがって、二次指数関数に対する第2の特別規則が得られ、 $dm^{n^p} = n^p m^{n^p-1} dm + pn^{p-1} m^{n^p} lmdn + n^p m^{n^p} \ln dp$ となる。同じ方法で、より高次の指数関数についてのさらなる規則も見いだされる。それらからどのように合成された量でも、微分するのは決して難しくない。たとえば、 $dm^n p^q = p^q dm^n + m^n dp^q$ のような式においても、もし先に求めた dp^q, dm^n の値を代入すれば、求める微分が得られる。

これまでに述べてきたことは、指数関数を微分する一般的方法の概略としては十分である。では、二つばかりの例に、この方法を適用してみよう。もしその例について、名高いニウウェンティトが、われわれのものとは異なる解法を提示するか、あるいは少なくともわれわれの解法が真実から外れていることを示してくださるなら、そのとき彼はわれわれにとってまさに大いなるアポロ（＝真理の光を照らす者）となるであろうし、われわれは喜んで敗北を認めるつもりである。

次の指数方程式 $x^x = y$ で性質が表される曲線を作図せよ。またその接線を求めよ。対数をとると $x \ln x = \ln y$ を得る。そこで、対数線 AB を引き、その下接線を AD=1 とする。また DE (=BC) を x とすれば、 $DC = \ln x$ となる。よって $AD:BC = DC:DM$ となるように点 M を取れば、 $DM = \ln y$ となる。また $MN = y$ とすれば、MN に等しい線分 EF を、横軸 DE 上に立てると、その先端 F が、求める曲線 HGF の1点となる。点 F における接線を幾何学的に構成する。微分の特別規則を用いて、この曲線の微分を

求める。 $dy = x^x dx + x^x l x dx = (x^x \text{を} y \text{とおく}) y dx + y l x dx$ そこから、 $y + y l x : 1 = dy : dx = y$ が得られ、微分幾何の公式により、下接線 $= \frac{1}{1+lx}$ となる。したがって、AD+DC と AD の間の第3比例として EL を取れば、FL が求める接線となる。つまり、我々は接線を無限小ではなく、通常の幾何学によって表現したことになる。今やニウウエンティットに判断してもらいたい。いかなる正当な理由で、激しくライプニッツ氏を非難することができるのか。まるで自分のことを忘れ、幾何学において何か巨大な罪を犯したかのように責め立てているが、そのニウウエンティット流の方法への批判はごく正当なものであり、その方法は、 dx と dy 比、下接線と横接線の比を、通常の量で表現しておらず、有限に与えられる線によって構成することもできないからである。実際、ライプニッツ氏が通常のあるいは与えられうる量として考えているのは、代数的な量だけではなく、有限であるかぎり超越的な量も含まれるのである。円周の長さは代数式では表せない。それゆえに円周が通常のあるいは有限の量でないと言えるだろうか？あるいは、ただ一度コンパスを動かせば円周は描けるのに、それが与えうる量でないと言えるだろうか？ライプニッツ氏が与えうる量とは何かについてどう考えていたかは、ニウウエンティットが引用した *Acta Eruditorum* の同じ箇所を、1 ページめくるだけで見つけられたはずである。そこでは、鋭敏な著者が量を通常の有限量、第一の無限小（微分）、第二の無限小（微分の微分）などに区別している。これは明らかに、ライプニッツ氏が横接線という語で有限量を意味していたことの証拠である。さらにニウウエンティットは次の点でも誤っている。ある曲線が通常で方程式を表せない場合には、下接線と横接線の比を通常で表すことも全く不可能だと考えている点である。可能であることを理解してもらうため、ニウウエンティットには、一次サイクロイドだけでもよいから考えてみてもらいたい。この曲線は方程式としては超越的であるにもかかわらず、その下接線と横接線の比は純粋に代数的な関係をもつのである。その比は、生成円の横座標と、その円の縦射影との比として与えられることがよく知られているからである。

さて、私たちの議論しているこの曲線に話を戻ろう。この曲線のいくつかの注目すべき性質を挙げておくことは、決して無意味ではない。とりわけ、偉大なライプニッツ氏が、私が最初に彼に提示したこの曲線を、自身の応用にふさわしくないものとは全く考えなかったからである。むしろ、私がこの問題や他の関連するテーマについて見だし、彼に示したことをきっかけに、彼自身がさらに多くの重要な発見をし、それらを私にもまた知らせてくれたのである。

AG、DH の各縦座標、点 G における下接線、AD は、互いに、また下接線に対して、すべて対数的に等しい

また、点 H から対数曲線 HP に下ろした線を引き、さらに P を通り HD に平行で曲線を O で切る直線 PR を取ると、OR は曲線上のすべての縦線の中で最も短くなる。曲線上の点のうち、点 O が軸 DE に最も近い点である。

我々は、この種の図形を求積するための一般的方法をも有している。そしてライプニッツ氏自身も、彼の持つ並外れた才知によって同様の方法を見つけてはいたとはいえ、この方法が簡単に見つけられるものではないと率直に認めている。さて私は、この求積法は他のいかなるものよりも特に注目すべきものであり、しかもそれは表現に用いられる奇妙で興味深い級数のために、この卓越した幾何学者に大いに気に入られたのである。

もし AD または DH、あるいは AG の長さを 1 とするならば、図形 DAGOH の面積は、この級数 $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \dots$ の和に等しい。(第 2 巻 No.CXLVIII の証明を参照)

Ⅱ. 曲線 $x^y = a$ を考えると、その方程式は対数を用いて $ylx = la$ の形に変換される。これは前に述べた対数曲線の方法によって、その曲線の幾何学的作図が導かれる。さらにこの方程式を第 1 特則に従って微分すると $xlxdy = -dydx$ となり、これが曲線の下接線を決定する式である。

Ⅲ. 曲線 $x^x = a^y$ を考えると、その式は対数を用いて $xlx = yla$ の形にでき、これは対数曲線を用いた作図に役立つ。この式を第 1 特則によって微分すると $dx + lxdx = lady$ が得られ、ここから下接線が求められる。さらに注目すべき点として、この曲線の求積は級数展開を用いずとも可能である。実際、 $\int ydx = (2xxlx - xx):4la$ という式が成り立つため、求積が直接的に処理できるのである。

Ⅳ. $a^x = y$ が与えられるとすると、 $xla = ly$ となる。したがって微分すれば $yladx = dy$ が得られ、下接線は $1:la$ という一定値になる。ゆえに、この方程式 $a^x = y$ は、まさしく対数曲線そのものに属することが分かる。したがって私は、ニウウェンティットが望んでいたような、ただ一筆書きで示せるほど簡明で、平坦でまっすぐな方法を開いたのである。当今では誰もが知るところの対数曲線を通じて、指数方程式を扱う道を見出したのである。

Ⅴ. 複数の項をもつ指数方程式、例えば $x^x + x^c = x^y + y$ を考える。各項を第 1 特則に従って別々に微分すると、 $dx^x = x^x dx + x^x lxdx$, $dx^c = cx^{c-1} dx$, $dx^y = yx^{y-1} dx + x^y lxdy$ となり、整理すれば $x^x dx + x^x lxdx + cx^{c-1} dx - yx^{y-1} dx = x^y lxdy + dy$ となる。ここから $dy:dx$ を求めると、第四比例項が得られ、これは求める曲線の下接線である。項が多くとも構成が妨げられることはない。対数曲線を媒介とすれば、各項に対応する量を個別に割り当てられ、それらを合わせて求むべき量を作り出せるからである。

これまで挙げてきた例は、第一次の指数方程式において採用すべき手続きを十分に示しているであろう。より高次の指数方程式にこの方法をどのように適用すべきかも、さほど困難なく理解される。どの場合でも同じ操作の原理が守られるからである。ところで、この方法をめずらしく異例なものと見なし、簡単には認めようとしなかったあの高名なホイヘンス (Huygens) も、もし今生きていたならば、この方法を微分法そのものと同じく簡単に受け入れたであろう。ホイヘンスは、初めこそ微分法をそれほど高く評価していなかったが、後にはその卓越した効用を理解してからは、これを非常に高く評価し、その優秀さと正当さを自ら認め、公に称賛することになったからである。これは彼が Acta Eruditorum の 1693 年 P.475 に示したものから明らかである。そこで彼自身が率直に述べているのは、私が同年に提示した問題を契機として、微分計算の助けによって、ほとんど到達できなかったような幾何学の精妙な領域に至ったということである。ゆえに、これほど偉大な人物の率直な告白は、ニウウェンティットにも同じような率直さを示すよう促すべきである。あるいは、もし彼がホイヘンスの権威を用いたのであれば、我々の解析を揺るがすためではなく、むしろ受け入れるために用いるべきである。

No. XXXVI I

ヨハン・ベルヌーイ

不均質な透明媒質における光線の曲率、ならびに自分が Acta Eruditorum の 1696 年 P. 269 で提示した問題、最速降下線という、ある点から別の点へ重力の作用下で物体が最も短時間で到達する線形を求める問題、および、光線の波面を構成する問題の解決方法について。

これまでに、最大・最小のための方法が実に多く現われてきたので、その鋭敏さによっては到底解き得ないと思われるほど精妙な問題は、もはやこの分野にはほとんど残っていないかのように見える。そして、そうした方法の創始者であること、あるいは創始者の追従者であることを誇る人々は、それらの鋭敏さで到達できない問題など残っていない、と考えているのである。とはいえ、彼らが望むだけ師の言葉に誓いを立て続けるがよい。しかし、もし試みしてみる気があるなら分かるだろう。我々の問題は、彼らの方法の狭い限界の内には決して押し込められないのだ。彼らの方法というのは、与えられた複数の量の中から、最大値または最小値のひとつを求める場合にしか働かないようなものなのだから。しかし、我々の問題に見られるように、最大あるいは最小を選び出すべきその量そのものが、求めようとしているものと同じく未定ではっきり与えられていない場合には、まさにここに真の仕事・真の困難があるのだ。かの著名な人々、デカルト (Cartesius)、フェルマー (Fermatius)、そしてその他の者たちは、各自の方法の優秀さを守るために、まるで家の炉や祭壇を守るような激しきで争った。あるいは今その弟子・追従者たちも、率直に認めざるを得ない。彼らが伝えた方法しか知らない人々は、この問題では立ち往生してしまうのである。他人の発見を排斥することは、私の役目でもなければ、望みでもない。確かに彼らは多くのことを成し遂げ、彼ら自身が目標としていた目的を、見事に達成している。彼らの著作には、この種の最大・最小問題については全く見当たらないし、同様に、いわゆる通常の問題以上の、より高度な問題を解くために、彼らの方法が売り込まれていない。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1697 年 5 月号 P.206

私は万能の方法などと約束するつもりはない。そんなものは誰が探しても見つからないだろう。しかし私は、この問題だけでなく他の多くの問題にも有効な特殊な手法を持っており、それによってこの問題を幸いにも解き明かすことができた。そして、他の人々が他の解法を探しているあいだに、私は私の解法をすぐさま著名なるライプニッツ氏に提出することに決めた。もし彼自身も何か解法を見いだしたなら、あるとき公衆に向けて、私の解法と共に発表してもらうためである。私はその点について少しも疑っていなかった。あの極めて鋭敏な人物の才能を十分に知っていたからである。そして実際、今これを書いているまさにその時、彼がしばしば私を敬意をもって称えてくれる私信の中から知ったのだが、私の問題は、彼の予想を越えて非常に気に入ってもらえたらしく、(その問題が、彼の言葉によれば、エヴァを引き寄せた林檎のように、その美しさで彼を誘惑したため) 彼はすぐさま解法を得ることができたのである。他の人々がどのような成果を上げるかは、結果がいずれ示すだろう。この問題は確かに、幾何学者が解決のために時間を割くに値するものである。なぜなら、あれほどの偉大な人物が、たいへん忙しい身でありながらも、この問題に取り組む価値があると見だし、自分の一時間を見舞に費やしたのではなかった、と認めるほどであったからである。そして、もし彼らがこの問題を解けば、それによって、通常ではまず到達し得ないような最も秘奥の真理への入口を手にする事になり、この事実そのものが彼らにとって十分な報酬だろう、と言っていいだろう。

ホイヘンスが最初に発見したこと、通常のサイクロイドにおいて、物体がサイクロイド上のどの点から運動を始めても、降下時間が常に等しくなるという事実に対して、我々は驚嘆する。しかし、このまさに同一のサイクロイド、ホイヘンスの等時曲線が、我々の探し求めていた最速降下線そのものである、と私が言ったなら、あなたはおそらく完全に驚愕するのではないだろうか。そして私は、一つは間

接的な方法、もう一つは直接的な方法によって、この認識に二つの道によって到達したのである。前者をさらに推し進めることによって、私は、屈折率が連続的に変化する媒質中における光線の曲がり方と、我々のブラキストクロネ曲線との間に、驚くべき一致を見出した。さらにまた、そこにはある種の秘められたものが潜んでいると思われる諸点を観察したが、それらは光学において有益となるであろう。それゆえ、私がこの問題の提示において主張しておいたこと、この問題は単なる思弁にとどまらず、他の学問、たとえば光学において極めて大きな有用性をもつ、ということは真実である。しかし、我々が述べたことを事実そのものによって確認するために、さあ、ここに第一の解法を示そう。

フェルマーは、ド・ラ・シャンブル宛の書簡において（デカルト書簡集ラテン語版第3巻P.147、フェルマー数学全集P.156以降を参照）、より希薄な媒質からより密な媒質へと進む光線が、時間を考慮に入れるならば、垂線方向へそのように屈折することを定めた。光を発する点から照らされる点へと、光線が連続的に進むものと仮定すると、その光線は最短の道を進む、というのである。この原理から彼は、入射角の正弦が屈折角の正弦に対して、与えられた媒質の希薄さの比に直接比例し、あるいは密度の逆比に等しいこと、光線がそれぞれの媒質を進む速度の比そのものに等しいことを示した。このことを、その後、きわめて鋭敏なライプニッツ氏が学術誌 *Acta Eruditorum* の1682年P.185以降において、また間もなく著名なホイヘンスが「光について (Tractatus de Lumine) P.40」において、より簡潔に証明した。さらに彼らは、フェルマーが自らの幾何学的証明に満足し、かつクレルセリエの強い要求に押されて、あまりにも簡単に自分の権利を放棄してしまったように見える物理的、むしろ形而上学的と呼ぶべき原理そのものを、きわめて強力な論証によって確立したのである。媒質が一様に密であるのではなく、むしろ無限に多数の水平な薄層から成り、それらの層の間隙が、希薄さが一定の割合で増加または減少する透明な物質で満たされていると考えるならば、光線（これを我々は一つの小球として考えるが）が直線上を進むことはなく、ある曲線を描いて進むことは明らかである。このこと自体は、すでにホイヘンスも同じ「光論」において指摘しているが、彼はその曲線の本性そのものはまったく決定していなかった。ところがこの曲線は、その上を小球が、希薄さの度合いに応じて速度を連続的に増加または減少させながら進むとき、ある点から別の点へ、最短の時間で到達するような性質を持つのである。また、各点における屈折角の正弦が、それぞれ媒質の希薄さ、小球（光線）の速度に比例している以上、その曲線は、次のような性質を持つことも明らかである。その曲線の接線が鉛直線となす傾き角の正弦が、至るところで、速度の同一の比を保っている、という性質である。これらを前提とすれば、ほとんど何の困難もなく見て取れる。あのブラキストクロネ曲線こそが、重体が鉛直に落下して得る速度の比に従って媒質の希薄さが分布しているような媒質を、光線が通過するときに描くであろう曲線、そのものなのである。速度の増加が、光線の場合のように、媒質が多かれ少なかれ抵抗するというその性質に依存してようと、あるいは媒質を取り除いて、別の原因によって同一の法則に従う加速が生じると理解されようと、いずれの場合においても、その曲線が最短時間で通過されるものと仮定される以上、一方を他方の代わりに置いてはならないと、いったい何がそれを妨げるというのか。

加速度の法則をどのように定めようとも、一般に我々の問題を解くことができる。それは結局、希薄度が任意に変化する媒質の中において、光線の曲率を求める問題へと帰着するからである。そこで、図1において、水平線FGが境界の媒質FGDを考えよう。

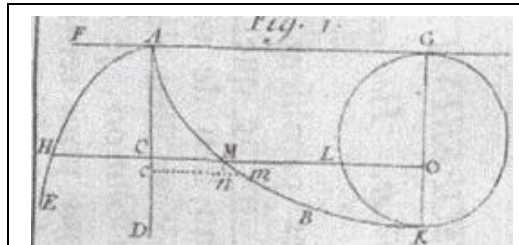


表 IX, No. XXXVII, 図 1

この水平線上の点 A を光線の出発点とし、垂直線 AD を、与えられた曲線 AHE の軸とする。この曲線の縦座標 HC は、高さ AC における媒質の希薄度、あるいは点 M における光線速度を定める。そして、求めるべき曲がった光線そのものが AMB である。AC を x 、CH を t 、CM を y とし、また Cc の微分を dx 、 nm の微分を dy 、 Mm の微分を dz とする。さらに、任意に取られたある定数を a とする。 Mm は全正弦とみなされ、 mn は屈折角、曲線の鉛直線に対する傾きの正弦とみなされる。したがって、先に述べた事柄によって、 mn は HC に対して一定の比にある。 $dy:t=dz:a$ である。このことから次の方程式が導かれる。 $ady=tdz$ 、 $aady^2=tt dz^2=tt dx^2+tt dy^2$ である。これを整理すると、求める曲線 AMB に対して、次の一般的な次の微分方程式が得られる。 $dy=tdx:\sqrt{(aa-tt)}$ 。したがって私は、一つのことによって二つの顕著な問題、一つは光学的なもの、もう一つは力学的なものを、私が他の人々に求めていた範囲を越えて、解決したのである。そして、たとえそれらが数学のきわめて異なる部門から取られているにせよ、実は同じ性質のものであることを示したのである。

それでは、特別な場合を取り上げよう。ガリレオによって最初に導入され、かつ証明された共通の仮説、落下する重体の速度が、通過した高さの平方根に比例するという仮説である。問題の核心はまさにこの点に存するからである。この仮定から、曲線 AHE は放物線となる。 $tt=ax, t=\sqrt{ax}$ となる。これらを一般方程式に代入すると、 $dy=dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ が得られる。ここから、ブラキストクロネ曲線が通常のサイクロイドであると結論する。もし直径 a の円 GLK が AG の上を回転し、その回転の開始点が A であるとすれば、円周上の点 K はサイクロイドを描く。このサイクロイドは、AC を x 、CM を y とおけば、微分方程式 $dy=dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ を満たすことがわかる。しかし、これは事実によらず、先験的かつ解析的に次のようにして導くこともできる。

$dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}=x dx:\sqrt{(ax-xx)}=$
 $adx:2\sqrt{(ax-xx)}-(adx-2x dx):2\sqrt{(ax-xx)}$ となり、さらに式変形すると
 $(adx-2x dx):2\sqrt{(ax-xx)}$ となる。これはある量の微分であり、その積分は $\sqrt{(ax-xx)}$ で LO のことである。また、 $adx:2\sqrt{(ax-xx)}$ は弧 GL の微分量である。微分方程式 $dy=dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ を積分すれば $y=CM=GL-LO$ となる。ゆえに $MO=CO-GL+LO$ ここで CO を円 GLK の半周と仮定すると、 $CO-GL=LK$ であるから、 $MO=LK+LO$ 両辺から共通部分 LO を取り除けば $ML=LK$ が得られる。これは、曲線 KMA がサイクロイドであることを示すものである。

まだ示すべきことが残っている。与えられた一点を出発点とし、なおかつ別の指定された点を通るような最速降下曲線、サイクロイドを、どのように描けばよいかということである。これを最も簡単に解く方法は次の通りである。図 2 のように、与えられた二点 A と B を直線 AB で結ぶ。次に、水平線 AL 上に、A を始点として任意のサイクロイドを描き、そのサイクロイドが直線 AB を R の点で横切るようにする。

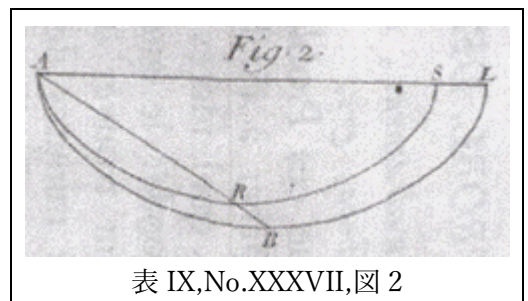


表 IX, No. XXXVII, 図 2

この準備ができれば、 $AR:AB$ の比に応じて、先ほど描いた任意サイクロイド ARS を生成した回転円の直径を比例的に拡大または縮小して新しい直径を求める。この新しい直径こそが、点 A から出発して点 B を通るべき求めるサイクロイド ABL を生成する円の直径となる。

結びに入る前に、私は再び自分の驚きを表さずにはいられない。心中で思い返すたびに、ヒュイゲンスの等時曲線と、私の最速降下曲線が、まったく予想外にも同一の曲線になるという事実があるからである。さらに注目に値すると私が考えるのは、この一致がガリレオの仮定のもとでのみ成り立つということである。したがって、そこから推測してよいのは、この一致は自然に適っている（自然法則に合致した現象である）ということである。なぜなら、自然は常に最も単純な方法で働くものであり、ここでもその例にもれず、一本の同じ曲線によって二つの異なる働きを果たしているからである。その二つとは、振動が常に同じ時間になる等時性、物体が最も速く下降する最速降下である。他のどのような仮定のもとでは、この二つの働きのために二本の異なる曲線を必要とするだろう。一方は等時振動のため、もう一方は最速降下のための曲線となるはずである。しかしガリレオの仮定の下では、自然はこの両者をサイクロイドという一つの曲線に兼ね備えさせているのである。例えば、もし落下する物体の速度が高さに対してガリレオの法則（平方根で比例）ではなく、高さの3乗根に比例すると仮定したとしよう。その場合、最速降下曲線は代数的曲線となるが、等時曲線は超越曲線になるであろう。反対に、もし物体の速度が高さにそのまま比例すると仮定すれば、どちらの曲線も代数的曲線になる。最速降下曲線は円弧となり、等時曲線は直線となる。

幾何学者にとって喜ばれるだろうと思うので、付録として、先ほど扱った問題から着想を得て執筆中に思い浮かんだ、同じく考察に値する問題の解法をここに付け加えておくことにする。問題は次の通りである（図3）。鉛直面内において、曲線 PB を求めよというものである。この曲線は同期曲線と呼んで、点 A から出発した重力が、A から B の各点へ向かう多数の隣接サイクロイド（AB）に沿って落下する場合、そのいずれの B の点にも同じ時間で到達するような B の軌跡を与えるものである。ここで AG を水平線、AP を縦線とする。水平線 AG の上に任意のサイクロイドを描き、そのサイクロイドから区間 AB を取り出す。そして、点 A から重力によって落下する物体が、この区間 AB を通過するのに必要な時間が、ある一定の垂直高さ AP を自由落下するのに必要な時間と等しいようにする。その自由落下時間が経過した瞬間に位置する点 B を集めていくと、求めるべき同期曲線 PB が得られる。

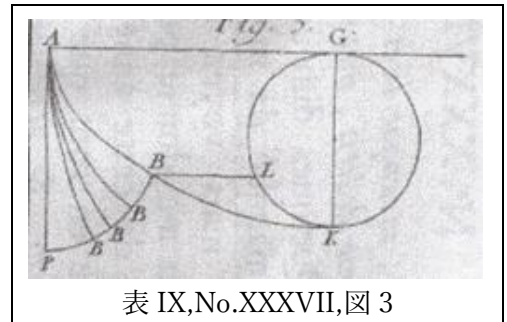


表 IX, No. XXXVII, 図 3

もし、光の半径について前に述べた事柄を注意深く考察するなら、この曲線は、ヒュイゲンス（Huygens）が著書「Traité de la Lumière（光について）」P.44 の図で BC という線で表し、波面と呼んでいる、まさにその曲線と同一のものであることが、明らかに分かるだろう。ヒュイゲンスが正しく述べているように、その波面は、光源の点から出るすべての光線を直角に横切るが、同様に、我々の曲線 PB も、共通の始点 A をもつすべてのサイクロイド AB に対して直角に交わるのである。この問題を上のようにして純粋な幾何学の問題へと還元したかたちで提示しようとしたとしたら、共通の始点をもつすべてのサイクロイドを直角に切る曲線を見いだせ、と求めたのだとすれば、これは幾何学者にとってきわめて大きな困難を伴う問題となったであろう。しかし一方、重力の落下運動という観点からこの問題を考察すると、私はこれを実に簡単に構成することができるのである。サイクロイド ABK の生成円を GLK とし、その直径を GK とする。このとき、円の弧 GL を、与えられた垂直距離 AP と直径 GK の相乗平均に等しい長さだけ取り出すものとする。そうすれば、水平線 AG に平行に LB を引けば、その LB はサイクロイド ABK を点 B において切るのである。もし誰かが自分の方法を別の問題に応用し

たいなら、普通の共通軸の上に位置を定めて描かれた、(代数曲線ではなく、それほど簡単ではない)
たとえば対数曲線のような超越曲線を、すべて直角に切るような線を求めてみるとよい。

No. XXXVII

等周問題について

ジャン・ベルヌーイ氏より、法学博士にして「学者たちの著作史」の著者であるバナージュ宛の書簡

ちょうど一年前、私は最速降下の問題を、それがまったく新しい問題であるとして、ライプツィヒの Acta Eruditorum に提起した。当時、すでにガリ

学者たちの著作史の
1697年6月号 P.452

レイがこの問題に取り組んでいたことを私は知らなかったのである。私は幾何学者たちに対し、この問題に取り組むための期間として6か月を与え、その期限が過ぎても、もし誰一人として自分の解法を提示する者が現れなければ、私自身の解決を公表することを約束した。ところが、あの偉大な幾何学者であるライプニッツ氏は、この問題の知らせを耳にするや否や、自らの研究に、ヨーロッパでもっとも優れた数学者たちすべての研究に値する問題であると判断した。そこで彼は、私に書簡を送るという名誉を与えてくださり、自分はこの問題を首尾よく解き終えたこと、それがあまりにも美しく、かつ非常に興味深いもので（とりわけ、それに取り組むためには、きわめて独特な工夫が必要であるという理由から）、この問題をさらに遠方の国々、とくにイタリアやフランスにまで広める時間を得るため、期限を1697年の復活祭まで延長してほしい、と私に懇願されたのである。

Acta Eruditorum は、国々には到着するのが非常に遅れるからである。

このようにあらゆる学問分野においてきわめて特別な才能を備えた人物に対して、人として当然払うべき最大の敬意を私は抱いている以上、その要請を拒むことは私にはできなかった。そこで私は、この期限延長の決定を幾何学者たちに知らせるため（No. XXXIII を参照）、年初に一枚の印刷物を公に配布することを思い立ったのである。Acta Eruditorum を定期的に受け取っていない者の中にも、この通知によって問題の提示を知り、極まりない幾何学の奥義へと踏み込む助けとなる、このきわめて有益な探究に、数時間を費やしてみようという気持ちになる者が、必ずや幾人かはいるに違いないと、私はまったく疑わなかったからである。

実際のところ、私の配布した印刷物は、最初の公表を以前には知らなかった数名の人々の手に渡った。しかし、判断する人は常にさまざまであるものだが、私のこの問題は不運にも、われわれの近隣に住むある数学者の前に示されることになった。彼はそれに対して、軽蔑の態度をもって次のように答えた。「この問題はドイツ人向けのものだ。だがオランダ人はこんなものには答えない」と。

これは、自分の乏しい理解力を超えるものを、高圧的な態度で軽んじる人々に共通する習わしにほかならない。ちょうど寓話に出てくる狐のように。無学な者は、自分には到達できないものを軽蔑する。

しかし一方で、より公平な判断を下す別の審査者たちもいた。彼らは確かに、私の問題の美しさを正しく認め、その障壁を突破しようとして全力を尽くしたのである。ところが、われわれの新しい解析法を欠いていたため、十分習熟していなかったため、彼らは、どれほど激しく力強い努力を重ねたにもかかわらず、ついには手を引かざるを得なかった。だからといって、彼らがこの並外れた問題に対して抱いていた敬意が、少しでも損なわれたわけではない。この問題は彼らに相当の苦勞を与えはしたが、それは決して無駄ではなかった。なぜなら、その努力は、新しい発見を行う喜びによって報われ、それらの発見は、この機会がなければおそらく決してなされなかったものであり、彼らは、自分たちの方法の欠点を見抜き、時を経て、それを補うべき改善策を見るに至ったからである。

先生へ、このようにして私の問題はオランダにおいて複数の人々の検討を経たにもかかわらず、ついに解決されないままに終わりました。それは、イングランドへと渡ることになりました。私はそこでこそ、より好ましい運命に恵まれるだろうと大いに期待していたのです。その国には、われわれの方法、あるいはそれと全く同様の方法を巧みに用いる、何人かの卓越した幾何学者たちが存在しているからです。実際のところ、あなたのご親切にも私に送ってくださったロンドン刊行の「フィロソフィカル・トランザクションズ、1月号」(Transactions Philosophiques, No.224, P.384)を見て、私は自分の判断が誤っていなかったことを確認することができました。その中に、最速降下曲線を構成する方法が見出され、それが私たちのものと完全に符合していたからです。この構成法の作者は、謙遜のために自分の名を記してはいませんが、いくつもの事情から見て、著名なニュートン氏であることは疑いようがありません。たとえ他の手がかりからそれを知らなかったとしても、この一例を見ただけで、その人物が誰であるかを見抜くには十分です。爪を見れば獅子と知れる、というわけです。この博学な人物は、私の問題に正当な解答を与えた者に対して、私が約束していた称賛に、まことに値する人物です。それでもなおたとえ私が与えようと考えていた称賛がどれほど大きなものであったとしても、それは、彼がすでに獲得している数々の栄誉に比べれば、取るに足らないものにすぎないということを、私は認めざるを得ません。なぜなら、彼は、比類なきその著作を公にすることによって、そこに示された驚くべき深遠さと鋭い洞察力によって、すでに十分すぎるほどの名声を確立しているからです。そして実際、この問題が私の心に浮かんだその瞬間から、この二人の卓越した大家、ライプニッツ氏とニュートン氏が、他の誰にも解けないとしても、この結び目を解きほぐすことのできる人物として、真っ先に私の念頭に浮かびました。

ただ一つ残念に思われるのは、ニュートン氏が我々と同じこと、求められた曲線を知るに至った方法そのものを公表することをしなかったという点です。公衆が最も多くの利益を得るのは、まさにその点からだからです。あるいは、もし彼が解析を隠したいと考えたのであれば、それ自体は決して悪いことではありませんし、今からでも遅くはないのですが、その構成法を、私の方法が与えてくれたような総合的な証明をしておくべきだったでしょう。その証明とは、古代人のやり方に従って、次のことを厳密に示すものです。一つの点から別の点へ引かれた曲線のうち、重い物体が最短時間で下降するものはただ一つしか存在せず、その曲線は共通のサイクロイド、あるいはある人々がそう呼ぶようにルーレットである、ということです。このことによって、ある第一級の数学者（ライプツィヒ学術誌 *Acta Eruditorum* の1697年5月号 P.221、著者は Tschirnhausen、を参照）が抱いていた考え、この条件を満たす曲線は複数存在する、という考えは、完全に否定されることになります。

しかし私は、二つの異なる方法を見いだしました。一つは間接的な方法、もう一つは、事物そのものの根拠から解を導く直接的な方法で、極大・極小を考察することによって、先ほど述べたあの総合的な証明へと私を導いたものです。私は、それらのうち間接的方法のみを公表しました。理由は一つに、それだけで、われわれの解の真理を疑おうとする者を納得させるに十分だと考えたからであり、もう一つは、それが同時に、光学における二つの有名な問題をも解決するからです。これらの問題については、かのホイヘンス氏が「光論 P.44」で言及してはいるものの、自らその決定に踏み込むことはなかったものです。二つの問題があり、光線の曲がりを求めること、光の波面の曲がり、同一の光源から出るすべての光線を直交的に切る曲線を求めることです。そして私は、まことに驚くべきこととして、次のことを示します。もし、光源の点から始まり、垂直方向に下降する透光媒質が、重い物体が同じ光源の点から落下して得る速度と同じ比率で、その希薄さが連続的に変化するとすれば、最速降下の曲線は、光線

の曲線と正確に一致する、両者はいずれもルーレット、サイクロイドとなるのです。さらに、私がシンクローネと呼び、簡単な構成法を与えている曲線、同一の出発点から、同一の水平基線上に描かれるすべてのサイクロイドについて、等しい時間で進まれる部分を定める曲線もまた、そのような媒質中で光源点から生じる光の波面の曲線と完全に一致します。なぜなら、この二つはいずれも、それらのサイクロイドに対して垂直であるからです。

また、これらの曲線の同一性は、ガリレオの仮説、落下によって得られる速度が、垂直高さの平方根に比例する場合に限って見られるものではなく、他のいかなる仮説のもとにおいても成り立つ、という点も、特に注意すべきである。したがって、屈折光学と力学という、数学のきわめて異なる二つの分野から取られたこれら二つの考察は、相互に、絶対に必要で本質的な結びつきをもっているのである。

このような理由からこそ、私は間接的な道だけを公にし、直接的方法については伏せておいたのです。(直接法については NoCIII を参照) これは、ライブニッツ氏自身が私に勧めてくれたことでもありました。彼は、その直接法が、いかにも単純であるとはいえ、きわめて重大な意味をもつものであることを見抜いていたのです。他人の仕事を踏み台にして自分を誇示することに慣れた人々がいて、そうした者たちが、そこからほんのわずかな新発見を巧みに引き出すだけで、それだけで十分に、所有権と発明の栄誉のすべてを自分のものとしてしまいかねないからです。しかし、私は正直な人々に対して何かをねたむようなことはしませんので、この方法をロピタル侯爵に伝えることを、少しもためらいませんでした。彼はライブニッツ氏と同様に、この方法を大いに称賛し、その中に何とも言いがたいほどの驚くべき、並外れたものを見いだしました。また私は、この方法を分かち与えることを、誰に対しても拒みはしません。手紙で一言、請い求めてくれさえすればよいのです。

ライブニッツ氏は、この問題の曲線を求める過程で、きわめて美しい性質に到達しましたが、それはこれまで考察されたことのないものでした。以下がその内容です。もし、重りがその曲線に沿って下降し始める上端の点から、一本の垂直な直線を引くと想定するならば、その垂直線と曲線とのあいだに挟まれた、水平な直線は、その曲線の最大幅の上に描かれ、しかも基線に接する円の、それに対応する弓形部分と、同一の比例関係にある。そして彼は、最近公表した著作の中で、この性質がサイクロイドに当てはまることを証明している。そのサイクロイドの生成円こそが、サイクロイドの外側の垂直基準線と曲線の間の水平距離に比例する円の対応する線分をもつ、同一の円なのである。私たちは、この新しい発見から大きな有用性を引き出すことができる。ディオストラトスの四分線が角や円の扇形を分割するのに適しているのと同様に、サイクロイドは、それと同じことができるだけでなく、円の弓形部分を、与えられた比に従って分割する、きわめて簡単な方法を教えてくれるからである。そしてこれは、私の考えでは、はるかに重要なことである。サイクロイドは四分線よりも優れている。サイクロイドはきわめて単純な連続運動によって描くことができるのに対し、四分線のほうは、多数の点を工夫して定めることによってしか作図できないからである。

本題に戻ると、ライブニッツ氏は、ガリレオに二つの重大な誤りがあることを指摘している。この分野において当時疑いなく最も鋭い洞察力をもっていたこの人物が、それにもかかわらず、われわれの新しい解析を欠いていたために、懸垂線の曲線は放物線であり(ガリレオ「運動と力学について」対話篇第2対話 P.131、1699年バタヴィア版)、最速降下の曲線は円であると推測してしまった(ガリレオ「インデックス」第3対話、第36命題・注解、P.209)、という点である。しかし実際には、懸垂線は、ライブニッツ氏が最初に示したように、対数によって定まる曲線であり、私が示したように、放物線の弧を直線に延ばしたものによって表される。また、最速降下曲線は、私が最初に見いだしたもので

あり、それはサイクロイドである。円弧を直線化することによって構成される曲線なのである。このように、ガリレオは、いずれの場合においても、真理に近いところまでは到達していたが、最終的な正解には至らなかった、というわけである。一方、ロピタル侯爵の解答について言えば、それは同じくライプニッツヒ學術誌 *Acta Eruditorum* の 1697 年 5 月号 P.217 に掲載されているが、私たちの解と完全に一致している。彼は解析を付け加えてはいないが、私信によって私に知らせてくれたところによれば、彼の方法は、かつて私が彼に伝えておいた私の原理に基づいているという。その原理とは、重さが一様でない場合に、紐や懸垂線の形、鎖の曲線を一般的に求めるための原理である。このようにして侯爵氏は、最速降下曲線を巧みに一種の懸垂線へと帰着させたが、これは確かに非常に興味深いことである。本人も、この問題はきわめて難しく感じられ、解決できたのは前回の期間の終わり頃になってからであったと認めている。ただし、それ以前に本格的に取り組めなかったのは、長い病気に妨げられていたためであったという。

なお私は、兄の解法について、もう少し述べておかなければならない。そこには私自身にとって特に関心を引く新しい命題が含まれているからであり、私はそのためにこそ、進んでこの話をしたいのである。彼は、私の提示した問題が、その微妙さゆえに、通常の極大・極小の方法によって解かれる他の問題よりもはるかに高い水準に属するものであることを否定してはいない。さらに、(彼自身が、ライプニッツ氏に促されて、この問題に取り組む労を避けまいと決意したと述べている以上) この問題が彼を長い間拘束し、多大な苦勞を与えたであろうことは、簡単に推し量られる。実際、彼はガリレイと同様に、かなり長いあいだ、我々の曲線は円であると信じていた。だが私は、これに驚かざるを得ない。この種の問題は、代数的問題が通常そうであるような、大きな労力や冗長で骨の折れる計算を必要とするものではないからである。少なくとも私は、この問題を自分に課したその時点で、同時にそれを解いていたと言うことができる。それは、ある人が思い込んでいるような偶然によるものではなく、あたかも他人から出題されたかのように、意図的・熟慮のうえで解いたのである。しかし、この問題を目にした最初の日に、すでにその解法を完全に掌握していたかであろうと、ライプニッツ氏もニュートン氏も言うであろう。

いずれにせよ、私の兄はついに真の解法を見いだした。それは、ライプニッツ氏の方法とまったく同一か、あるいはごくわずかに異なるだけの方法によるものであった。その方法については、ライプニッツ氏がかなり以前に、私に知らせてくれていたものである。もっとも、ライプニッツ氏のものの方が、私の兄が自分の推論を補強するために用いている数々の比喩的回り道を欠いていて、推論がより簡潔であると、私は感じている。こうして私の兄は、ドイツ・イングランド・フランスという三つの偉大な国が、それぞれ自国から一人ずつ送り出してきた人物たちに続く第四の研究者となった。これらの人々は、かくも美しい研究において私と並び立ち、皆が同じ一つの真理に到達したのである。このような驚くべき一致そのものが、それらの方法を詳しく検討する時間のない人々や、あるいは理解もしないままそれを否定しようとする人々に対して、我々の方法が正当であることの証拠として十分に役立つのである。

私の兄はまた、光線の屈折の曲線についても言及している。そして、同じ道筋をたどれば、それも同様に簡単に見出されるだろうと述べている。しかし私は、彼が、自分では別々のものだと考えていたこれら二つの曲線が、実は一つの同じ曲線にすぎないということに気づかなかったのを、不思議に思っている。これは、私が上で述べたとおりである。

これらの理論的考察をきっかけとして、私の兄は、はるかに崇高で、かつ困難な事柄の認識へと自由に到達できる道を、自ら切り開いたのだと我々に保証している。そして、その一例を示すために、今度は彼の番として、さらに二つの問題を提示し、とりわけ私に向けて、次のような言葉で語りかけている。

もし私の兄が応答しようとするならば、次のような一般の問題に挑戦するであろう。共通の底辺 BN の上に立てられた、すべての等周図形の中から、そのうちの一つ BFN を求めよ。ただしそれは、それ自身が最大の面積を含むものではないが、それによって、別の曲線 BZN によって囲まれる面積が最大となるようなものである。ここで、その曲線に引かれる縦線 PZ は、与えられた直線 PF 、あるいは弧 BF に対して、任意に指定された比、与えられた量 A に対して、直線 PF または曲線 BF にいかなる比例関係でも成り立つように定められているものとする。この問題を回避で

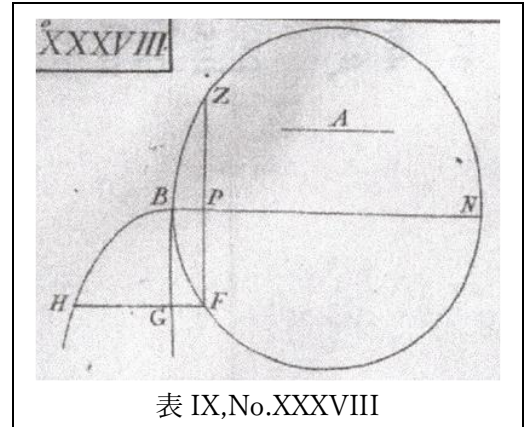


表 IX, No. XXXVIII

きないように、我々はさらに、これとより強い類縁関係をもつ別の問題を付け加える。それは、同一の始点をもち、同じ水平な底辺の上に置かれた無数のサイクロイドの中で、重体が共通の始点から与えられた垂線まで、最小の時間で到達するのは、どのサイクロイドかを問うものである。

そして、他人のために労苦を払い、しかも自分の時間を費やし、さらに自分の財産に損害を被った者が、何の報いも受け取らないというのは不公平であるから、私が保証人となっているある人物が名乗り出て、その解法を提出する兄弟に対して、当然受けるべき称賛に加えて、皇帝貨 50 枚の謝礼金を与えることを決定した。ただし条件として、この告示の発表から三か月以内に引き受けることを約束し、しかも一年が終わるまでに、たとえ求積法によるものであってもよいから、実際の解答を提出することが求められる。この期限が過ぎても誰も提出しないなら、私自身が解答を公表するからである、など。

これらの問題がどれほど困難に見えようとも、私はそれらを読んだその瞬間から、取り組みずにはいられなかった。しかし、その成果がいかなるものであったかをご覧いただきたい。浅瀬を探るために与えられている三か月どころか、解決を見いだすために与えられているこの一年の残り全体すら用いず、私は合計してわずか三分の時間しか費やさずに、この謎全体を試み、着手し、そして完全に究明してしまった。なぜなら、私は、問題で要求されている解よりも千倍も一般的な解法を与えるからである。 PZ が単に PF のあるべき乗に比例することを求めているにすぎないところを、私は、 PZ が PF と与えられた量 A とから、想像しうるどのような仕方で合成される場合にも、求める曲線 BFN を描くための一般規則を教えるのである。言い換えれば、軸 BG 上に、 PF に平行な方向に、任意の与えられた曲線 BH を想定し、その縦座標を GH とするならば、私はこの問題を次のように一般的に定式化する。「すべての等周曲線の中から、次の性質をもつ曲線 BFN の作図が求められている。延長された縦線 FP 上に、与えられた曲線 BH の対応する縦線 GH に等しい長さの線分 PZ を取るとき、そこから別の曲線 BZN が構成され、その曲線 BZN によって囲まれる面積 $NBZN$ が、他のいかなる等周曲線 BFN を用いて同様に構成されうるすべての場合の中で、最大となるようなものである。」では、これほどまでに一般的なものが、ほかにあるだろうか。私の兄の命題によれば、与えられる曲線 BH は放物線の類に属するもの

に限られてしまうのに対して、私のこの作図法は、曲線 BH がどのような形であっても、同じように簡単に適用できるからである。

次に、もう一つの問題、同じ出発点と同じ水平な基線をもつすべてのサイクロイドの中から、重い物体が、与えられた垂直線に最も速く到達するようなものはどれか、という問いである。これこそがまさに、例の気前のよい匿名の人物が、銀貨 50 エキュの賞金を約束しているである。そこから私は、彼にはこの問題の困難さがあまりにも恐ろしく大きく見えたため、この世にそれを乗り越えられる人間が存在するとは、どうしても信じられなかったのだ、という結論に至るのである。しかし、運命というものは、人をもてあそぶものだ。その移ろいやすい女神は、挑戦者にはきわめて陰しく、茨に満ちた道しか示さなかったのに、私にはきわめて好意的で、穏やかで、非常に短く、しかもきわめて簡単な道へと導いてくれたのである。しかもその道によって、私は探していた以上のものまで見出してしまった。垂直な直線の代わりに、位置が与えられた任意の斜めの直線を取った場合にも、どのサイクロイドを選ぶべきかを決定しているからである。要するに、これらすべては、私がすでに等時曲線について公表しておいた結果の、ただ一つの単純な系にすぎない。したがって、われわれの例の Non nemo は、自分がその問題を提示したのと同じ月の Acta Eruditorum 誌上で、すでにその問いに対する満足な解答を目にすることになり、驚くことであろう。私の方法はきわめて生産的であって、この点にとどまることなく、さらに先へと進み、最速降下の曲線（サイクロイド）の代わりに、どのような種類の曲線であっても、たとえば円や放物線といった曲線を置いた場合についても、同じ問題を解決してしまうのである。ところがこのことは、私の兄にとってはあまりにも絶望的に思われたため、彼はそれを解こうとすることさえ望まず、ただ問題として提示するだけで満足し、次のように述べている。「最大値・最小値に関する考察を推し進めたい者があれば、試みるがよい。我々としては、問題を提示しただけで十分である。」

なお、私はすでにライブニッツ氏に私の解答を送付し、彼をわれわれの裁定者として引き受けてくれるよう依頼してある。したがって、賞金を約束したその匿名の人物もまた、同様にその賞金をこの裁定者の手に委ねるのが、正当であり、かつ必要である。彼が誠実な人物であるならば（そうであることを私は望んでいるが）、拒むはずはない。それが済みしだい、ライブニッツ氏は私の解答を公表し、同時に、それらが正当なものか否かについての裁定を下すであろう。もっとも私は、あらかじめここに断っておくが、私をこのように急がせているのは、勝ちたいという欲ではなく、この金を充てるつもりでいる貧しい人々の利益だけである。これほどほとんど骨折りもなく、しかもこれを書いている時間を除けば、まったく時間を費やしもしなかった事柄のために金を受け取るなど、私には恥ずべきことだからである。たとえそれが私に多少の手間をかけさせたとしても、精神を報いる手段として金銭はふさわしくない。これらの美しい学問に対して人が抱く高貴な情熱は、いかなる金銭にもはるかに勝っており、そこで得られるごく小さな発見一つでさえ、あらゆる富にまさって価値があるからである。したがって、私が問題を提示する際に金銭の額を約束しなかったことを非難しようとするのは、ただ金に魂を売った人間だけであろう。私がこのことを言うのは、賞金を提供することで自らの気前のよさを示そうとしたその人物が、もし約束を撤回しようとするならば、それは私に害を与えるのではなく、貧しい人々に対して不正を働くことになるのだ、ということを彼に分からせるためである。敬具。

No. XXXIX 解決されるべき諸問題

フローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏が、この種の問題に対して解法の方法を持っていると自負する幾何学者たちに、いくつかの最大・最小（極値）問題を提示する。

学術誌 Journal des Sçavans

1697 年第 33 号、8 月 26 日号 P.394。

パリ版 P.636、オランダ版にも収録。

I、凸な曲面上に二点を与えられているとき、一方の点から他方の点へ至る最短の線を、幾何学的に作図する方法を求めよ。ただし、その曲面が幾何学的に与えられたものであると仮定する。球面・円錐面・円柱面の場合には、点の位置がどのようなであってもきわめて簡単である。しかし、コノイドや回転楕円体の場合には非常に難しくなる。そこで例として、放物線コノイドの曲面を取り上げる。この曲面上で、二点を結ぶ最短の線を引かなければならないが、二点は同一のメリディアン上にあるのではない。[もし同一のメリディアン上にあるならば、その問題はなお簡単であり、求める線は、単にその同じメリディアンの、二点の間の部分になるからである。そうではなく、異なるメリディアン上に位置している場合を考える。ここで私が言うメリディアンとは、コノイドの頂点から底面まで引かれた任意の放物線のことである。

II、(図 1) 与えられた長さをもつ軸 AB の上に、可能なすべての楕円 ACB, ACB, ACB, … を描き、それぞれの楕円から、等しい線分 CDB, CDB, CDB, … を切り取ったとする。このとき、点 C が点 B に最も近くなるのは、どの線分かを問う。線分 CB が最も短くなるような楕円 ACB を決定せよ、ということである。

III、(図 1) 同じ仮定のもとで、曲線 CCC の性質と、その接線を求めよ。

IV、(図 2) 位置が与えられた軸 BA の上に、同一の種類に属するすべての曲線、たとえば放物線 BC, BC, BC, … を描き、それぞれの曲線から、等しい弧 BC, BC, BC, … を切り取ったとする。このとき、点 B に最も近い点 C はどれかを求めよ。それらの弧のうちで、弦 BC が最も短くなるものを決定せよ、ということである。

V、(図 2) 同じ条件を仮定したままで、曲線 CCC の性質と、その接線を求めよ。

VI、(図 2) 位置が与えられた一本の直線 DD があり、それぞれの曲線 BC と点 D において交わるとする。このとき、すべての弧 BD の中で、最も短いものを求めよ。

(No.LI, Art.2 を参照)

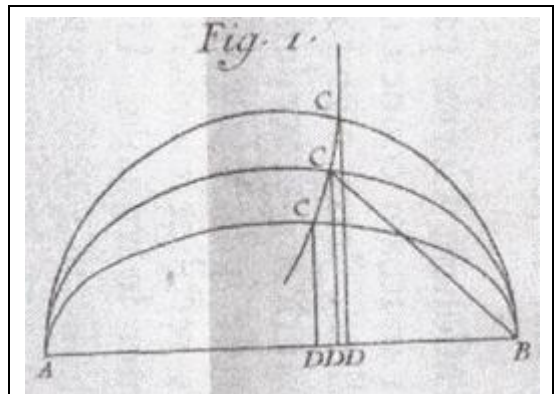


表 X, No. XXXIX, 図 1

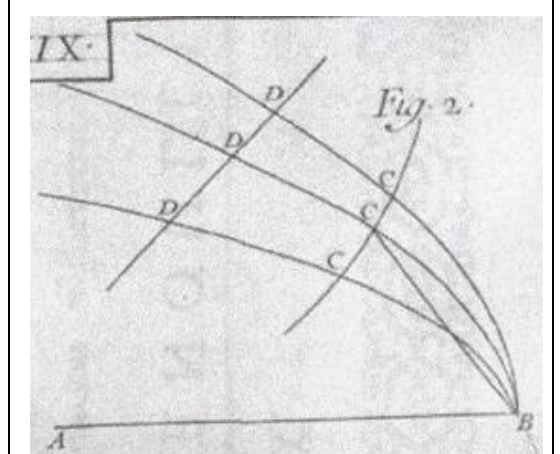


表 X, No. XXXIX, 図 2

No. XL

ベルヌーイ氏からの手紙

フローニンゲン大学教授より、ヴァリニョン氏 (Varignon) へ。1697 年 10 月 15 日付。

(ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の 1598 年 1 月号 P. 52 を参照。)

同じ周長をもつ図形の中で、最大の面積を囲むのはどれか。

今からほぼ 3 か月前、私はあなたに、先の 5 月にライプツィヒ学術誌において私の兄が提示した、いくつかの新しい問題についてお知らせしました。彼の言うところによれば、それらの問題は、私が以前に提起した「重い

学術誌 Journal des Sçavans

1697 年第 39 号、12 月 2 日号 P.458。

パリ版 P.737、オランダ版該当ページ。

物体の最速降下」の問題をきっかけとして考案されたものです。この問題は、ここ（オランダ）においても、また外国においても、かなり好意的に受け入れられました。その証拠として、当代でもっとも博識な幾何学者たちによって与えられた優れた解答があり、それらはいずれも私の解と驚くほどよく一致しています。

これらの新しい問題をあなたにお知らせした際、同時に申し上げたことを、あなたは覚えておられるでしょうか。私はそれらの解法を、Acta Eruditorum の 5 月号が私の手に入ったその同じ日にすでに見出しており、しかもそれらの解法は、これらの問題が要求している条件よりも、はるかに一般的なものであった、ということです。もし、私と兄とのあいだにある称賛すべき競争心が、彼に私個人を名指しして挑戦を投げかけさせる、そうした挑戦によって、いわば義務づけられていなかったなら、私はおそらく、これほど早くこの研究に取り組むことはなかったでしょう。さらに、私の兄が保証人となっているある匿名の人物までもが、私がこの挑戦を 3 か月以内に公に受諾し、かつ今年の終わりまでに求められている解答を提出することを条件として、50 インペリアル金貨あるいは白エキュを支払うという約束を付け加えている。そこで私は、これらの問題が私の知るところとなったその翌日には早くも、ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の編集担当者諸氏に対して、すでにその解答を見出したことを知らせ、その旨を公衆に告知してくれるよう依頼した。（彼らは実際にそれを行い、Acta Eruditorum の 1697 年 10 月号 P.485 に見られる。）また私は、ただちに自分の解答をライプニッツ氏に送り、それらを、そこに至った解析とともに、一種の預託物として彼に託した。この件に関しては、この比類なき幾何学者以上に適切な相手はいないと確信していたからである。私は彼に対し、私たちの裁定者になってくださるよう丁重に願い出た。兄がその判断にきわめて喜んで従うであろうことを、少しも疑っていなかったからである。ライプニッツ氏は、双方がその裁定に満足することを条件として、これに同意した。以上述べてきた事柄はすべて、学者著作史 (Histoire des Ouvrages des Savans) の 6 月号（前述 No. XXXVIII を参照）に収録されている。また、ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum に掲載された最速降下の問題に関するさまざまな解答について、私自身の所見も述べている。

しかし、期限がまもなく切れようとしており、約束をしたあの匿名の人物からはもはや何の音沙汰もないので、私は、もはや彼の返答を待つべきではないと判断した。彼が、定められた期限を何事もなくあったかのように静かにやり過ごし、その後になって私の遅延を口実に言いがかりをつけてくるおそれがあったからである。

これが私の解答です。これらは公に発表されるに値するものだと、私は確信しております。私の兄自身が、その問題を、巧妙さと難しさの両面において特に高く評価しているからです。兄はそれらの問題

を提示するにあたり、等周図形について、「同じ周長をもつすべての図形の中で、円が最大である」ということは、一般には正しいこととして信じられているが、証明なしに信じられている」（俗に信じられており、正しいが証明なしにという意味）と言っています。しかし彼は、パップスがすでに『数学集成』第5巻・命題10において、このことをきわめて明確に証明しているという点に気づいていませんでした。したがって、私はここで改めてそれを証明することはしません。ここではただ付け加える形で述べておくにとどめるが、兄が今回あたかも自分が初めてこの考察に到達したかのように私に求めている方法については、私はずっと以前からすでにライプニッツ氏に伝えてあった。その考察とは、最大・最小の理論を用い、鎖の重心が可能な限り最も低い位置に下がるという一点だけに着目することによって、懸垂線の曲線を求める方法である。この点については、ライプニッツ氏が証人であるだけで十分であり、私には自分の方法を公表しない特別な理由がある。

さて本題に入ろう。第一の問題は次のようなものである。与えられた軸 BN 上に構成される、すべて同じ周長をもつ曲線（等周曲線）の中から、曲線 BFN のようなものを求めよ、というものである。ただし、自分自身では最大の面積を囲まないが、その曲線に基づいて構成される別の曲線 BZN が囲む面積が最大となるようなものでなければならない。その際、縦座標 EP を延長して、新たな縦線 PZ が、元の縦線 PF または弧 BF の任意の倍率の関係になるようにする。PZ

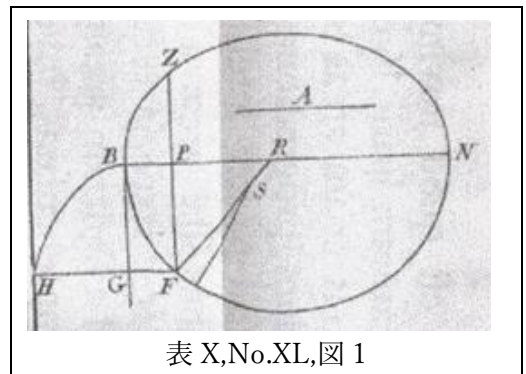


表 X, No. XL, 図 1

が、与えられた定数 A と PF（または弧 BF）との任意に指定された比例になるように定めるのである。この問題の意味は次のことである。同じ長さをもつ無数の曲線の中から、それぞれの縦線 PF や弧 BF をある与えられたベキに高め、それを別の縦線 PZ として表したとき、その結果として得られる面積 BZN が最大になるような元の曲線 BFN を決定せよ、ということである。

私はこの問題について複数の解法を持っているが、ここでは最も簡単なものだけを示すことにする。それで十分である。ベキの指数を n 、任意の定数を a 、PF（または BG） $=x$ 、BP（または GF） $=y$ とおく。GF y を $y = \int (x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}})$ と定める。そうすれば、点 F は、求める曲線 BFN 上の点となり、PZ を、適用線 PF の n 乗に比例させるとき、面積 BZN は、軸 BN 上に構成され、しかも BFN と同じ長さをもつ他のどの曲線によって作られる面積よりも最大となる。

以上から明らかなように、もし $n=1$ であれば、曲線 BFN は円の半円周となる。

$y = \int (x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}})$ は、この場合 $y = \int (x dx : \sqrt{aa - xx}) = a - \sqrt{aa - xx}$ となるからである。そしてこれはまさにそうなるべき結果である。この場合には曲線 BZN が BFN と同一になるからである。

$n=2$ とすると、PZ が PF の 2 乗に比例するとすると、曲線 BFN は、液体を含ませて強く絞った布が描く形と同じものになる。この曲線は、私の兄弟がまた、彼の弾性体に由来するものだとしている。

また、 $n = \frac{1}{2}$ ならば、つまり PZ が PF の平方根に比例するならば、BFN は通常のルーレット（サイクロイド）となる。したがって、ここにまた、あの有名な曲線に備わるきわめて美しい性質が一つ加わることになる。これは、われわれが先に示した最速降下の発見の後には、もはやこの曲線には何も新たに発見されるものは残っていない、と考えていた人々の予想に反するものである。しかし、これはまだ

すべてではない。私はさらに一步進んで断言したい。最初の余暇を得しだい、幾何学者たちにも満足してもらえるような一つの実例 (No.LVIII を参照) をもって、それを示してみせよう。この曲線は、これまで長年にわたり最も優れた人々によってあらゆる研究が尽くされ、厳密な検討が加えられてきたにもかかわらず、なおも彼らの見落としてきた、きわめて重要な性質を数多く秘めている、ということである。

なお一般的に注意しておきたいのは、 n が分数で分子が 1、分母が任意の偶数である場合には、曲線 BFN は常に円の求積によって作図することができるということである。しかし、分母が任意の奇数である場合には、そのとき曲線 BFN は完全に代数的な曲線 (No.CXIV を参照) となる。たとえば、 $n = \frac{1}{3}$ の場合、PZ が PF の 3 乗に比例する場合には、求める曲線の方程式として

$$y = 2a - \left(2a^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right) \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \text{ が得られる。}$$

先へ進む前に、ここでこの問題が要求する以上にはるかに一般的な解法を示しておくことは、決して不適切ではないであろう。PZ が PF のある定まったべきに比例するというだけでなく、今や PZ が、PF といくつかの与えられた量とから、任意の仕方で合成されているものと仮定するのである。たとえば、PF に平行な軸 BG の上に、任意に与えられた曲線 BH を描き、PZ を GH に等しく取って、面積 BZN が最大となることを求めるとしよう。私は次のように言う。曲線 BFN を作図するためには、GF を $\int (bdx : \sqrt{aa - bb})$ と取ればよい。ここで私は、 $b = \int (GHdx : x)$ ($GHdx$ を x で割ったものの積分、あるいは総和) としている (著者はこれを No.XLII で訂正している。彼は、次のように読まれることを望んでいる。私は GH という縦座標を b としている。そして弧 BF については、 $\dots$)。問題のもう一つの部分を成す弧 BF に関して言えば、次のことは明らかである。PZ あるいは GH が、弧 BF のある定まったべきに比例するだけでなく、さらにこの弧 PF およびいくつかの与えられた量とから、任意の仕方で合成されたものであったとしても、常に一つの微分方程式が得られ、その方程式が曲線 BFN の性質を決定する、ということである。しかもそれは、たとえ一次の微分方程式でなくとも、少なくともそれより高次のものになる。

私は、一般的に考察された我々の曲線について見いだした、きわめて美しい一つの性質を、黙って通り過ぎることはできない。それは次のことである。展開線あるいは接触円の半径 FS は、曲線とその基線とのあいだに含まれる部分 FR に対して、ちょうど b が FZ または GH に対するのと同じ比を保っているということである (No.XLII において、著者は次のように読むべきであると注意している。「 b が GT に対する比として」、これは H における接線に平行に BT を引いた場合のことである。あるいは、別の言い方をするならば、曲線 BH の副接線が、横座標 BG に対する比として、と読むべきである。)。私に提示された単純な場合、PZ または GH が x^n に等しいときには、FS と FR は常に一定の比を保つ。 $FS : FR = 1 : n$ である。また、同じ曲線において、 $\int x^m dx$ が最大となるときには、 $\int (dt : x^m)$ となる、ということにも注意すべきである。ここで私は dt を曲線の微小要素として扱っている。これが、 $m = \frac{1}{2}$ のときに、曲線 BFN が、先に述べたように、最速降下の曲線と同一でなければならない理由である。その曲線においては、 $\int (dt : \sqrt{x})$ が、その性質上、最小となるからである。

さて、先生、第一の問題についてはこれで十分でしょう（証明については、No.LXXV および、とりわけ No.CIII に見いだされるであろう）。次の問題はサイクロイドを決定することにあります。同じ起点から、同じ水平線上に描くことのできるあらゆるサイクロイドの中で、起点と、あらかじめ与えられた一本の垂直線との間に含まれるその曲線部分が、可能な限り最短の時間で通過されるという利点をもつサイクロイドを求めよ、というものです。言い換えれば、同じ起点から同じ垂直線までの区間について考えたとき、他のいかなるサイクロイドの対応する部分よりも、より短い時間で移動できるようなサイクロイドを決定せよ、という意味です。私の兄の言い方から察するに、たとえ私が第一の問題を解いていなかったとしても、このただ一つの問題の解答に対してこそ、例の正体不明の人物は私に 50 エキュの賞金を約束しているように思われます。まさにこの問題を私に提示する際に、彼は次のように述べているからです。「私が警戒しているところのある無名の人物が現れ、兄がこの問題を解いたならば、正当に受ける称賛に加えて、50 インペリアル金貨の謝礼を与えることを決定した。」と。したがって、彼はこの問題を難しいものだと判断したに違いありません。しかし、もし私がこの問いにただ単純に答えるだけでよいのなら、三語で済ませることもできるのです。この問題の解答は、私がここで言及している Acta Eruditorum の 5 月号 (No.XXXVII を参照) において、等時曲線について述べたことから、直ちに導かれる、ごく小さな系にすぎないことが明らかだからです。そこで私は、この問題の秘訣を明らかにするために次のように述べる。「円周が、起点と与えられた垂直線との間の距離の 2 倍に等しい円によって描かれるサイクロイドこそが、この問題の条件を満たすのである。」しかし、さらに一步踏み込んで考えてみよう。もし垂直線の代わりに、位置が与えられた任意の直線、あるいは直線に限らず曲線を仮定したとしても、この問題は少しも難しくならない。私の等時曲線の性質から明らかのように、求めるサイクロイドは、常にその与えられた位置の線と直角に交わるものになるからである。その生成円をただちに見いだすには、次のようにすればよい。まず、与えられた位置の直線が水平線と交わる点において、その水平線に接する円を、任意に一つ描く。次に、その円の弧のうち、与えられた直線によって、サイクロイドの起点側から切り取られる部分が、その円の直径に対する比と同じ比になるように、起点と交点との間に挟まれた水平線の部分を、ある第四項に対応させる。この第四項こそが、求めるサイクロイドを生成する円の直径である。したがって、この問題を私にとって難しいものとして提示しようとしたのなら、兄は垂直線の代わりに、位置が与えられた任意の直線を用いるべきだったのであり、この問題をその全範囲において示すことができたはずです。それにもかかわらず、彼の方法論そのものが、この点を彼に示唆しなかったことを、私は不思議に思う。

以上から分かるように、私は彼に対してすでに十分すぎるほど返答しているのであり、ここで話を終えてしまってもよいのである。しかし、この最後の問題について、私はさらに別の解法を見いだした。この解法は、サイクロイドに限らず、同様の性質をもち、同様の位置関係に置かれたすべての曲線にまで及ぶものである。そこで私は、それをここに伝えたいという気持ちになった。私の兄はこの問題を、ほとんど絶望的なものであるかのように語っており、実際に解こうと試みることさえせず、ただ問題として提示するだけで満足しているように見えるからである。彼はこう言っている。「最大値・最小値の研究を発展させようとする者が、これに挑戦するであろう。我々は、ただ問題を提示するだけで十分である。」彼は、この問題において、サイクロイドの代わりに用いる例として、円や放物線を挙げている。それに対して私は、この問題を次のように一般的に定式化し解いている。「AGB、AHD など、互いに相似で、同様の位置関係に置かれた既知の曲線とし、GC を位置が与えられた直線とする。このとき、

共通の起点 A から降下を始める重い物体が、どの曲線に沿って運動すれば、与えられた直線 GC に最短時間で到達するかを求めよ」という問題である。

解答。与えられた相似な曲線のうちの一つ、たとえば AGB を基準として選ぶ。この曲線 AGB 上の点 B における縦座標 BL を y 、同じく曲線に対応する量を z とする。次に、曲線 AGB 上の各点 B において、その点における接線 BR を引き、その長さを

$$BR = \frac{1}{2} \sqrt{y} \int (dz : \sqrt{y}) \text{ となるように取る。こうし}$$

て、これらすべての接線の端点 R が描く軌跡は、新しい曲線 AOR となる。この曲線 AOR が描かれたならば、直線 GC に平行な直線 AR を引く。この直線が曲線 AOR と交わる点を R とし、その点 R から直線 RB を引いて、

曲線 AGB に点 B で接するようにする。さらに、その点 B から直線 AB を引き、これが直線 GC と交わる点を D とする。そして線分 AD 上に、曲線 AGB と相似な曲線 AHD を描く。すると、この曲線 AHD が、点 A から出発して落下する物体が、直線 GC に最も短い時間で到達する経路である。

ある特別な場合には、この問題はきわめて簡単になる。たとえば、曲線 AGB, AHD などが円である場合、構成は、私の兄がかつてリボンの結び目にたとえた曲線の弧長によって、きわめて簡単に行える。この曲線は、以前われわれがライブニッツ氏の傍心等時曲線 (No. XIX にある曲線 AMONA) を構成する際に用いたものである。したがって、これら二つの問題は相互に依存している。一方の構成ができれば、他方の構成も同時に得られるのである。また、もし AGB, AHD などが放物線であるならば、この問題も同様に、ある曲線の弧長に帰着される。

私は、曲線 AGB, AHD などが相似である場合を仮定してきた。しかし実のところ、それらが相似でない場合に対する方法も、私は持っている。ただし、その方法をまだ十分に整えて明確な形にする時間がなく、しかもその構成は、互いに相似でない曲線の中で最も単純な例である AGB と AHD が、たとえ共通の軸の上に置かれた楕円である場合でさえ、非常に煩雑になってしまう。そのため、この件については別の機会に譲ることにする。しかし、ここまで述べたことで、私の兄にとっても、また賞金を約束した匿名の人物にとっても、十分以上の満足を与えるには足りるであろう。この回答は、彼らが私に求めていた内容を、疑いなく大きく超えているからである。こうして私は、十分すぎるほどに自分の義務を果たした。あとは、約束をした匿名の人物が、自分の責務を果たす番である。もし彼がそれを果たさないなら、彼が害を与えるのは私ではなく、むしろ貧しい人々であることを知るべきである。私の意図は常に、この金銭を貧者に分配させることにあったからである。それは一つには、これらの解答は私にとってほとんど労力を要しなかったため、自分の利益とするには値しないからであり、また一つには、私が金銭目当ての人間ではなく、名誉 (榮譽) だけで十分に行動する者であることを、彼に示すためでもある。

追伸。私はたった今、ロピタル侯爵から一通の手紙を受け取った。彼は、私の兄が出した第二の問題、同じ出発点を持ち、同じ水平線上に描かれるすべての曲線の中で、与えられた垂直線と交わるまでに最も短い時間で走破されるサイクロイドを決定せよ、という問題を彼もまた解いた、と私に知らせてきた。

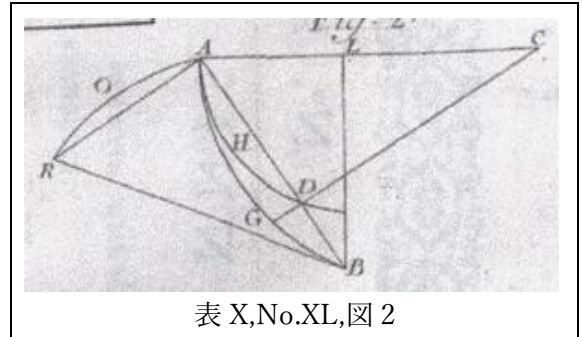


表 X, No. XL, 図 2

No. XL I

告知

1697 年 12 月 2 日付「Journal des Savans」で言及された諸問題について

バーゼル大学教授ベルヌーイ氏、問題の作者は、「等周問題に関する主要な問題の解答は現時点ではまだ完全に真理に合致していない」と主張している。そのため彼は、幾何学者たちがその解答を探すために、さらに一定の期間を与えることに同意する。そして、もし最終的に誰もそれを見いだせなかった場合には、彼は3つのことを約束する。

学術誌 Journal des Savans 1698 年第 7 号、2 月 17 日号 P.78。 パリ版 P.120、オランダ版にも掲載

1. この「ジュルナル」に掲載されている、兄による解答に至るまでに、彼が用いた解析を、正確に推し量って示すこと。

2. その解析がどのようなものであれ、それを公表しようとするならば、そこに含まれている間違っ
た推論を明らかにすること。

3. この問題のすべての部分にわたって、真の解答を与えること。

彼はさらに付け加えている。もし、科学の進歩に十分な関心をもち、これら各項目に対してそれぞれ賞金を提供しようという人物が現れるならば、自分は次のことを引き受ける、と。第1の項目を果たせなかった場合には、その賞金と同額を失うこと、第2の項目に失敗した場合には、その倍額を失うこと、第3の項目を果たせなかった場合には、その三倍額を失うことを、引き受ける。

No. XLII

回答

フローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏による、1698年2月17日付「Journal des Savans」第7号に掲載された告知への回答

私は、兄によるこの告知から、匿名の人物が、規則を守る気がほとんどないことをはっきりと見て取れる。おそらくそれは、自分の約束を果たさねばならなくなるのを恐れているからであろう。そうでなければ、彼は、この

学術誌 Journal des Sçavans

1698年第150号、4月21日号 P.172.

パリ版 P.270、オランダ版にも掲載

時代でも指折りの大幾何学者の一人であるライプニッツ氏の判断に委ねようという、私が彼に差し出した提案を受け入れていたはずである。私はこの目的のために、自分の解答を、いわば預かった物として、ライプニッツ氏のもとに送ってある。そして、もし誰もが同時に裁判官であり当事者でもあると見なされることを避けたいのであれば、賞金もまた同様に、彼の手には委ねられるべきである。あるいは、もしその有能な数学者を退けるというのであれば、その理由を明らかにし、別の人物を指名すればよい。私は、利害から自由で、かつこれらの分野に通じた人物であれば、誰の判断にも従う用意があるからである。しかし、それがなされないのであれば、どのような反論が出されようとも、私はこれ以上いっさい答えない。そして、これからどのような仕掛けがあるか、私がすでに十分に予想しているし、あらゆる取るに足りない言いがかりを私は一貫して軽蔑する。とはいえ、この告知に対して、なお一度だけ、私が答えておこうと思うことがある。以下がその内容である。

私の第二の解答については、まるで魚のように沈黙したままである。しかしこれはすでに、彼らがその解答に完全に満足していることを示している。私に対して、揚げ足取りをすることにこだわっている状況に照らせば、反論できる点があれば、沈黙しているはずがないからである。したがって私は、この沈黙を、正当に値する称賛として受け取る。それは、この問題を自ら解けないものと判断していた、私の気前のよい後援者が、この解答に対して私に期待させてくれた称賛にほかならない。私の第一の解法、等周図形に関する問題の解法について言えば、それは主要な問題だと言われているが、ライプツィヒ紀要における私の兄の表現によれば、彼がより困難だと見なしているのはむしろ別の問題の方であるが、私の解法は完全には真理に適合していない、と人は断言しようとしている。しかし、この「完全には」という言葉そのものが、少なくとも部分的には真理に適合していることを否定する勇気はない、ということを十分に示している。そして、もう少し誠意があったならば、実際には提示された問題の全範囲にわたって真理に適合していること、もしそこに何らかの誤りが紛れ込んでいるとしても、それは私自身がこの問題に与えた付加的な拡張部分においてのみである、ということを認めたはずである。それなのに、なぜこの解法を誤った推論として扱おうとするのか。むしろ、この誤りは方法の根本から生じたものではなく、何らかの付随的・偶発的な事情によるものだと推定すべきではなかったのか。実際のところ、私があまりにも急ぎすぎたために、これらの問題を知った翌日には、本来与えられていた長い期限があったにもかかわらず、その期限を利用することもできたのに、私は自分の解答をただちにライプニッツ氏に送り、後に1697年12月2日号のジャーナル (No.XL を参照) に掲載されたからである。急ぎすぎた結果、軽微な誤りが入り込んだ。しかしそれは、方法そのものにも、提示された問題の解答そのものにも存在するのではなく、私自身がこの問題に、当初の出題範囲を超えて与えた追加的な拡張部分に、この方法を適用した点にのみ生じた。したがって、この行き違いは、私の方法にも、要求

されていた解答にも、何らの損害も与えるものではない。それゆえ私はなお主張する。私の兄が提示した形そのままの問題、与えられた基線の上に構成された等周図形の中から、各点の縦線のある与えられたベキに上げたものの総和が最大となる曲線を決定せよ、という問題は、1697年12月2日号のジャーナルにおいて、完全に解決されている、しかも兄が要求した条件のすべてに従って解決されている、ということである。したがって、彼自身の暗黙の承認によって、私は彼のもう一つの問題も解決したことになる。そして、彼がその二つの問題のうち、どちらにの賞金を結びつけていようとも、その賞金は常に私に支払われるべきものである。しかし私はすでに言ったし、今また言おう。私は金目当ての人間ではないので、その賞金は貧しい人々に譲る。そして、人が私に要求していなかった余分な点について私をあげつらうこと、私が求められていた以上のことを与えなかった点を問題にすることは、彼らにこの施しを拒むための口実にすぎない。むしろ、彼らに対して負っているこの義務を否認するための口実にほかならない。

私はここで話を打ち切ってもよいのである。それ以上のことをする義務はなかったからだ。しかし、私の第一の解法に、私自身が自由にこの問題へ付け加えた余分な一般性を与えるために必要なものは、ほんのわずかなことであり、私の性急さから生じたすべての誤りを修復するには、わずか3語で十分なのである。それほどまでに誤りは軽微である。1697年12月2日号ジャーナルの462頁7行目(No.XL,P.134,16行目を参照)において、私が「bを、 $GHdx:x$ の積分と呼ぶ」と述べている箇所を、これを削除し、代わりに「bを、縦線GHと呼ぶ」と置き換えてください。さらに、その直後に続く文の冒頭「そこから明らかなように」という言葉も削除してください。それに続く内容は、私が当時そう思い込んでいたほどには、直前の記述と結びついていないからであり、私があまりに急ぎすぎたためである。同じページの26行目におい

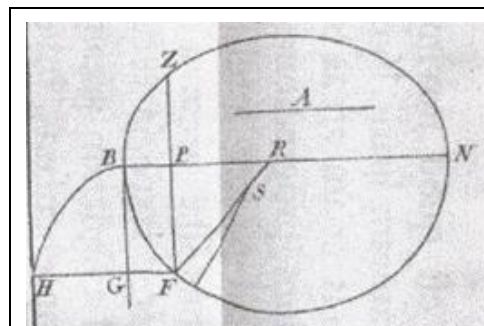


表 X, No. XL, 図 1

て、「bがPZ、GHに対する比であるように」という箇所の代わりに、「bがGTに対する比であるように。Hにおいて接線に平行なBTを引いて」としなさい。あるいは、単に「曲線BHの接線下部分が、横座標BGに対する比であるように」と書いてもよい。それ以外の部分はすべて正しい。私は、最も真理を見抜く目を持つ人物であっても、そこに最小の誤りすら指摘できないことを断言する。

私はここで一般的に、きわめて注目すべき性質を改めて述べておこう。これは、以前には兄の特別な場合についてしか触れていなかったものである。これによって、私の一般解が全体として何から成り立っているのか、またそれが兄の特別解と一致するかどうかを、兄自身が簡潔に判断できるであろう。次のことである。GH、あるいはPZが、単にPFのある既定のベキに比例するだけでなく、PFといくつかの与えられた量とから、どのような仕方であれ合成されたものである場合でも、常に同一の一つの曲線を見いだすことができ、その曲線については $\int PZdy$ が最大または最小となり、それと相反して $\int (dt:PZ)$ が最小または最大となる。なぜなら(これは実に驚くべきことだが)、混合線角BFPの正弦が、縦座標GH(PZ)と常に一定の比をなすとき、その曲線は両方の条件を同時に満たすからである。さて、私が1697年5月のActa Eruditorumにおいて示したように、この性質は、あらゆる種類の仮定のもとにおいても、最速降下曲線に当てはまる。(No.XXXVII,P.121を参照)したがって私は、ブラキストクロネ問題を一般的に解いた以上、兄がそれを提起する以前に、等周問題をもまた解いていたのだと、正当に言うことができる。

兄のもう一つの問題、与えられた垂直線によって切り取られたサイクロイドの部分、をできるだけ短い時間で通過するという問題についても、事情はまったく同じである。なぜなら私は、その解が私の同期曲線から直ちに導かれること、そしてそれが単にその特別な場合にすぎないことを示したからである。驚くべきことに、兄は、彼が想像しうるかぎり最も難しい問題のうち二つを、わざわざ私に提示しようとしたのに、ちょうどその二つが、私がすでに解いていた問題であった。しかも、その解が、兄がそれらを私に提示したのと同じ月の *Acta Eruditorum* において見いだされることになったのである。以上のことによって、兄が私に投げかけている二つの問いに対して、私はきわめて簡潔な答えを与えることができる。

1. 等周問題に関する第一の問いは、私の最短時間の曲線によって、それらと同時に解かれる。
2. 与えられた垂直線までの降下に関する第二の問いは、求められているサイクロイドによって、私の同期曲線から直ちに解かれる。

等周問題のもう一つの部分、PZ が弧 BF のある既定のベキに比例することが求められている場合について言えば（この部分が他の条件と結合的に課されているのか、選言的に課されているのかは、私には分からない。問題文で用いられている *vel* や *ve* という語は、私に対しては、どちらか一方の解を与えれば足りるとしか要求していないように見えるからであるが）、私は 1697 年 12 月 2 日付の *Journal des Sçavans* において、私の方法によれば、常に高次の微分方程式が得られ、曲線の性質が決定される、と述べた。そこで私は当時、この結果へ導く方法を見いだしたことに満足しており、計算を実際に行うことには、ほとんど心を煩わせなかった。しかしその後、考える時間を得てから、曲線を決定するためのこの方程式 $v = \int (ddy : (dt^2 - dy^2))$ を見いだした。ここでは dt を曲線の微小要素を一定と仮定している。なお私が v と呼ぶものは、単に t 、あるいは弧 BF のある既定のベキを意味するだけではなく、この弧 BF と与えられた量とから構成される任意の量を意味している。もし $v = t$ であれば、この曲線は対数曲線を用いて非常に簡単に作図できる。

さてなお付け加えて言えば、私の方法の中にあると兄が思い込んだ誤った推論こそが、彼の注意書きに含まれる三つの論説のうち、最初の二つを生じさせた原因であり、しかも彼はその点についてやや早合点しすぎていた。これら二つの論説のうち第一のものにおいて彼は、等周問題に関する彼自身の問題の解に、私を導いた解析を、正確に言い当てようと試みている。兄が、私が流体の圧力によって形づくられる曲線の方法を用いたと考えていることを、私はよく分かっている。私がかつて帆の計算のために考察した、水平および垂直という二つの側方圧の合成から成る方法を用いたと、彼は思っているのである。私が彼の考えをぴたりと言い当てていないかどうかを、彼が誠実に答えてほしい。しかし、彼は誤っている。その方法（それ自体は間接的なものであるが）を巧みに用いれば、確かに要求されている解に導くことはできるにせよ、私はそれとは別に、他の方法をいくつも持っており、直接的な方法の一つ備えていて、すべて同一の解を与えたからである。さらに付け加えるならば、これほど見事な一致（複数の方法で同一解が得られること）は、その正しさを示す唯一の証拠ではない。もし必要であれば、私はその正しさを、古代人のやり方にならった総合的な証明によっても、なお証明することができる。とりわけ、円が等周図形の中で最大であることを示すためにパプスを与えた証明にならってである。したがって私は、兄が自分の注意書きの第一条項について提示している懸賞を撤回するように、兄に対して兄弟として忠告する。なぜなら、彼は必ず負けるからである。それを彼に知らせるのは、私の義務である。

第二の記事について言えば、この説明を見たならば、彼が自ら進んでそれを撤回するだけの率直さを持っていることを、私は期待している。第3の記事については、論ずることは何もない。彼が長いあいだ約束している解答を公表した時に、その是非を判断することにしよう。

最後に、匿名の人物の気分に合わせて言うておくが（彼は名乗ろうとしないのだから、私はそう呼ぶほかない）、この人物は、科学の進歩に関心を持つとしても、それは金が儲かる場合に限られるのであるが、私はここに次のことを引き受ける。もし今年の終わりまでに彼が、幾何学的に（つまり厳密な幾何学的方法で）次の問題を決定できたなら、私は彼の提示した約束金額の四倍を失う覚悟である。問題とはこうである。同一の長さをもつ水平な軸が与えられ、その上に垂直な平面内で描くことのできるすべての半楕円のうち、可動体はその軸の一端から運動を開始すると仮定したとき、最も短い時間で通過される半楕円はどれかを決定せよ。私は、兄が彼を助けることを認める。さらに私は、1697年8月26日号の Journal (No.XXXIX を参照) で私が提示した、残り6つの問題を、この問題に付け加える。それらについては、ロピタル侯爵が、私を与えた個別的な例の場合については、最後の5つを解いているが、私は一般的な解法を求める。とりわけ、第4および第5の問題で扱われている、互いに相似でない曲線の場合については、なおさらである。以上が、兄の Avis に対して、私が返すべきだと考えたすべての返答である。

No. XLII

告知

バーゼル大学数学教授ヨハン・ベルヌーイ氏による、1698年4月21日号の Journal に掲載された兄の回答に対する所見について

兄の解法に対する私の返答を公表する前に、彼の最後の解法をもう一度最初から読み直し、そのあらゆる点を注意深く検討し、その後で、すべて問題なく整合しているのかどうかを私たちに知らせてほしいと、私は兄にお願いする。そのうえで、私が自分の解法を出してしまった後には、急いで書いたからという口実は、もはや聞き入れられない、と私は兄に宣言しておく。

学術誌 Journal des Sçavans

1698年第200号、5月26日号 P.240。

パリ版 P.377、オランダ版該当ページ

No. XLIV

回答

フローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏より、1698 年 5 月 26 日付の学術誌に掲載された意見への回答

私は、兄の問題に対して自分が与えた解答を、改めて蒸し返す必要はまったくない。それについて考えるだけでも十分であり、私の時間は、新たな発見をすることにこそ、はるかによく使われるであろう。ここで問題なのはただ一つ、兄が

最終的に、私がその方法を有していることを認めさえすればそれで十分なのである。彼が、私の去る 4 月 21 日付の返答を、早まった返答として思われても、この方法の正当性にとって、何のプラスにもマイナスにもならない。したがって、このような回り道をいくらごまかしても、それはすべて無駄である。そして、これまで私がいくら正式に呼びかけを行ってきたにもかかわらず、匿名の者が、第三者の判断に服することを拒み続けている限り、誰の目にも、それが彼にとって敗訴同然の立場であることは明らかであろう。とはいえ、これら一切の言いがかりを根元から断ち切るために、私は次のことを主張する。

学術誌 Journal des Sçavans
1698 年第 24 号、6 月 23 日号。
パリ版 P.284、オランダ版 P.446

1. 私は、縦座標をある与えられたベキによって定義される諸曲線に関する問題、最大となる曲線を求める問題を、自分の最速降下曲線によって、正確かつ正当に解決した。

2. 同一の起点から、同一の水平な基線の上に描かれたすべてのサイクロイドのうちで、ある直線と直角に交わるものが、その同じ直線に到達するまでを、可動体が最も速く降下する曲線である、ということ。ここで運動は、サイクロイド共通の起点から始まる。

これこそが、私の相手方が私に求めてきた全てである。正しく答えるためには、まさにこの二つの命題に対してだけ答えればよい。イエスか、ノーか、それで十分である。そして、私自身がこれら二つの問題に付け加えた、余分な拡張部分に飛びつくことは、問題を取り違えるか、あるいは意図的に取り違えさせようとするに他ならない。ここで問題になっているのは、その余分な部分では全くないからである。もっとも、その余分な部分も、やはり完全に真理にかなってはいないのだが。さて、この新たな意見表明の中で、私が 4 月 21 日の返答において、例の匿名の者に提示した諸問題については、一切言及されていないので、私は次のように結論する。彼は、私が提示した賭けの、せめて 4 分の 1 ですら、危険を冒す勇気がない、ということである。言い換えれば、私が彼に自由に賭けることを許した内容の、ほんの一部すら引き受ける気がないのだ。私はなおも、これが公表された日から数えて 5 週間の猶予を彼に与える。その間に、この挑戦を受けるつもりがあるかどうかを、はっきり表明するがよい。これらの問題は、私がすでに解いてみせた以上、人間の知性の及ぶ範囲にある。もし彼が勇気を備え、かつ自分でそう見せたがっているほど有能であるならば、この挑戦を受け、後退するべきではない。

No. XLV

書簡より抜粋

1698 年 6 月 26 日付、バーゼルのベルヌーイ氏の書簡より、A. ヴァリニョン氏 (Varignon) へ
1697 年 12 月 2 日付、Journal に掲載された、彼自身の諸問題の解法についての検討を含む。

この書簡は、1698年2月17日付の Journal に掲載されたベルヌーイ氏の意見が公表された時点ですでに書かれていたものであったため、4月21日のもう一つの解法については、そこに何も変更を加えることが適当とは判断されなかった。その解法については、第一の解法に反すると彼が言っていることもあり、別途あらためて答えることにして、ここでは保留したのである。

学術誌 Journal des Sçavans

1698年第30号、8月4日号 P.355。

パリ版 P.560、オランダ版該当ページ

私がライプツィヒの学術誌において、兄にいくつかの幾何学の問題を提示したとき、それは主として、いつか彼がそれらの解法を私たちに与えてくれるだろう、という期待と希望からであった。私たちは、つい最近われわれ自身が最初の道筋を示してあげたばかりのこの学問において腕を磨く人々の榮譽に、われわれもまた十分に与えることができると私は考えていたからである。それに加えて、彼がその企てに成功し、私の友人の一人が付けたささやかな賞を獲得してくれれば、という個人的な理由も、私は持っていたのである。私が申し上げたいのは、あなたがご親切にも私に送ってくださった Journal の冊子の中で、私の諸問題に対する解答を読んだときに私がどれほどの喜びを覚えたか、そしてそれ以上に、解答が私自身のものと最初からいくぶん一致していることに気づき、彼がこの課題を有能な人物として見事に果たしたに違いないと私が信じるに至った、その気持ちをご理解いただくためなのです。しかし、その喜びは長くは続きませんでした。すぐに、私の期待が裏切られたのを見て抱いた失望へと変わったのです。あらゆる状況を注意深く検討した結果、私の第一にして主要な問題に対する解答が、きわめて欠陥が多く、しかもあらゆる意味において誤っていることを見いだしたからです。

もっとも、ある一つの場合に限っては、偶然にも正しい真理に到達させてくれたのですが。この種の告白が引き起こしかねない驚きを避けるために、次のことを考えておく必要があります。真なる仮定の上で正しく推論すれば、必ず真なる結論に到達すること、偽なる仮定の上で正しく推論すれば、必ず偽なる結論に到達すること（背理法の証明が示している通り）。しかし、偽なる仮定の上で誤った推論を行う場合には、ときとして真なる結論に到達してしまうことがあります。言い換えれば、一つの誤りがもう一つの誤りを打ち消してしまうことがあるというわけです。まさに私が思うに、私の兄に起こったのはこのことなのです。あらゆる状況から見て、彼は最初に誤った原理の中へと飛び込み、一つの詭弁を用いて解答を引き出しましたが、まったく驚くべき幸運によって、完全ではないにせよ、部分的には真であり続けている、という次第です。私はここではあくまで推測によって語っているにすぎません（もし確実に判断しようとするなら、彼がこの解答の解析、あるいは少なくとも証明を与えてくれていればよかったのですが。それは、私が最速降下の問題について彼のために行ったのと同じことですよ）。それでもなお、これらの推測はきわめて強固なものだと私は確信しています。私が想像するところの彼の手順をあなたに説明すれば、彼がそれとは別のやり方を用いたとは、不可能だとあなたも認めてくださるに違いないからです。

しかし、たとえその解答そのものに何一つ非難すべき点がなかったとしても、私はなお、彼がそこに付けられた賞を主張できるとは思いません。なぜなら彼は、私の意図に従ってその問題を解いたわけでもなく、また完全にすべての部分において解決したわけでもないからです。あなたもきっと覚えておられるでしょう。私がこれらの問題を提出したのは、私の兄の問題をきっかけとしてであり、問題については、私が純粋幾何学の原理によって解答を与えていたのです。したがって、私の意図が、読者たちを同じ方法によって問題を解くように促すことにあったのは、明らかだと言えるでしょう。しかし、私がこれから示すように、私の兄はこの研究において、本来なら仮定するのではなく証明すべきであった、

外来的で機械的な原理しか用いていなかった、という可能性がきわめて高いのです。したがって、彼が私の意図に従って行動したなどとは、決して言えないのです。私はさらに次のことを付け加えます。ある問題の賞を目指す者は、提示された問いのすべての点を満たす、完全な解答を与える義務がある、ということです。私は、前年に私の兄がそのプログラムの中で提示した問題に対して、まさにそのように行いました。私はそれらをすべて、しかも各問題のあらゆる部分に至るまで解決することに努め、私の兄が、異なる曲線を同一のものと取り違えていたかもしれない箇所まで、指摘したのです。そして、今まさに彼が私の問題について示している解答については、そのようなことは言えないのです。たとえ他の点をすべて認めたとしても、彼は弧 BF に関する部分を解いていないからであり、正確に言えば、その部分を誤って解いているからです。その点については、後ほど述べます。

さて、本題に入り、私の兄がどのような解析を行ったのかを見てみることにしましょう。彼は、その問題を知ったのと同じ日に解答を見つけたと言っています。1697年6月の「学者たちの著作史

(Histoire des Ouvrages des Savans)」第2項 (No.XXXVIII,P.130を参照)において、彼が自らその解答を予告している箇所では、その同じ日というのを、なんとわずか三分間にまで限定しているのです。このわずかな時間という事実は、彼がその解答を、何らかの外来的、あるいは間接的な原理によってのみ探し求めたのではないか、しかも、自然と目に飛び込んでくるような類の原理であったのではないかと、私にただちに疑念を抱かせました。なぜなら、純粋幾何学から導き出される解法というものは、経験から知っている通り、それほどまでに精緻で入念な思考を要するため、このように一挙に見つかるはずがないからです。私はまた、次のような力学的原理ほど、人の精神に自然に思い浮かぶものはない、ということにも気づきました。重い物体は、その重心が可能なかぎり最も低くなるまで下降する、という原理です。たとえば、両端 B と N によって支えられ、底辺 BN まで液体で満たされた布切れ BTN は、その液体の重心が、他のどんな形の場合よりも低くなるような形を取るでしょう。あるいは同様に、その全長のあらゆる点に異なる重りを付けた一本の紐 BTN もまた、それらの重りの重心が、他のどんな形の場合よりも低くなるような形を取るはずです。私の考えでは、私の兄がこの場面で用いたのは、まさにこの原理なのです。以下に、その適用のしかたを示します。彼は、底辺 BN まである種の液体で満たされた布 BTN を仮定する。その液体は、場所によって比重が異なるものと考え、各細い縦片 PF の重さが、GH を BG で割ったものに比例するように想定する。BP=y, PF=x, BF=l, GH (または PZ) = p とすると、小さな台形 PC の重さは $pdy:x$ である (ここでは、印刷の都合のため、ライプニッツ氏にならって「:」で割り算を表す。この書き方を公にしたい)。その台形の、底辺 BN に関する運動力は $\frac{1}{2}pdy$ となり、すべての力の総和は $\int \frac{1}{2}pdy$ である。この総和が、液体の重心と底辺 BN との距離を決定するものであり、しかも仮定によれば、この距離は可能なかぎり最大であるべきなので、彼は次の結論に至る。 $\int \frac{1}{2}pdy$ あるいはその2倍である $\int pdy$ 、言い換えれば台形 QZ の総和、面積 BZN が最大である、ということである。これこそが、問

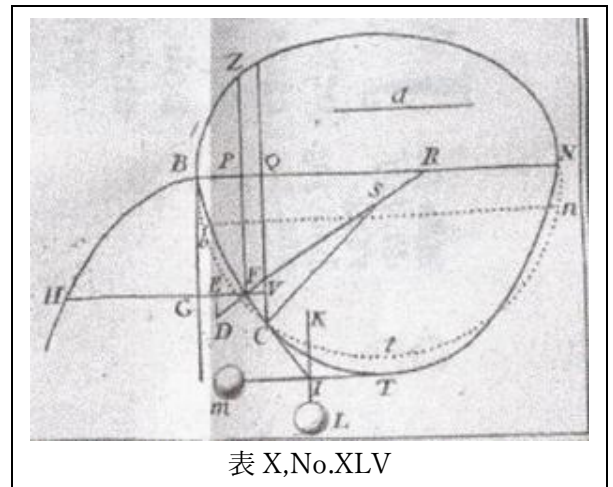


表 X, No. XLV

題が求めていることだ、と彼は結論づけるのである。そこで彼は、この問題を解決するためには、布の曲がり具合を求めさえすればよいと考えるのである。しかもそれは、私がかつて帆の問題に用いた方法に従えばよい、というわけだ。そのやり方は次の通りである。私の流体圧力の理論によれば、小部分 PC の重さが $pd y : x$ であるとき、布の部分 FC を、その法線 FD の方向に、 $FD = p d t : x$ という力で押す。この力は、運動の伝達の理論によって、水平方向 $FE = p d x : x$ と、鉛直方向 $ED = p d y : x$ の二つに分解することができる。布の部分 FT に作用しているすべての鉛直方向の小さな力を、ひとつの点 L に集め、また、すべての水平方向の小さな力を、ひとつの点 M に集めるとしよう。これら二つの点 (L と M) は、それぞれ FI と TI という二本の糸を引き、その糸は布に F と T で接している。このとき、点 L と M を支えるために F と T に必要な力は、布 FT 全体を支えるために必要な力と同じでなければならない。ところが、力 T は、布のどの位置にもう一方の点 F を置いても、常に同じ大きさに保たれている。したがって、L を支えるために使われる力の部分は $\int (p d x : x)$ に等しく、これは BF 部分の布に作用する水平方向の力の総和である。同様に、布 FT に作用する水平方向の力の総和 M も $\int -(p d x : x)$ に等しい。そして、点 T が単独で負担する力の総和は一定である。以上のことを前提として、あなたのあの美しい定理 (私はそれを多くの場面で、たいへん有効に使っています) に従えば、次のように考えることができる。点 L 鉛直力の合力は、それを支えている張力 T の一部分、 $\int -(p d x : x)$ に対して、張力 T のもう一方の成分 $\int +(p d x : x)$ に対する比は、角 FIT (または CFV) の正弦と角 FIK (または FCV) の正弦との比に等しい。それは、線分 CV と FV の比、つまり dx と dy の比に等しい。この比例関係は、私の兄が求める曲線のために与えた等式 $dy = dx \int (p d x : x) : \sqrt{1 - \left(\int p d x : x \right)^2}$ と正確に一致する。あるいは $b = \int (p d x : x)$ と置けば $dy = b d x : \sqrt{1 - b b}$ となり、特に $p = x^m$ の場合には $dy = x^m d x : \sqrt{1 - x^{2m}}$ となる。これは、これらの値を代入すれば、比例式の各項が完全に一致することから明らかである。

同様の推論によって、 $\int (d t : x^m)$ が最大値または最小値をとるような曲線 BTN を見つけられると考えることができる。この曲線を、各点 F において重さが x^{m+1} に反比例する小さな重りを取り付けた一本の弦で表されているものと仮定する。弦の部分 FC の重さは $d t : x^{m+1}$ となり、この重さが直線 BN に対して及ぼす力も、 $d t : x^m$ である。そして、これらすべての力の総和 $\int (d t : x^m)$ は、すべての重りの重心が直線 BN から離れている距離を表す。ゆえに、それは仮定どおり最大値をとることになり、求められている条件である。計算は前とまったく同じである。ただしこの場合には、点 M が存在しないという点だけに注意すればよい。一定である張力 T (これを $1:m$ としてもよい) は、すべてが点 L、 $\int -(d t : x^{m+1})$ を支えるために使われている。その結果、次の比例関係が成り立つ $\int -(d t : x^{m+1}) : \frac{1}{m} = dx : dy$ 。ここから再び、先に得られた等式 $dy = x^m d x : \sqrt{1 - x^{2m}}$ が導かれる。これは、私の兄が見いだした結果と同じである。

ご覧のとおり、彼が私の問題に対して示した解法へと至った解析は、おそらくこのようなものだったのでしょう。しかし、少し注意して見れば、そこには二つの重大な欠陥があることが簡単に分かります。第一に彼は、何の根拠もなく次のようなことを仮定しています。複数の等周長図形があり、内部あるいは周囲に沿って一定の割合で重さが分布しているとき、重さの重心は他のどの図形よりも布に同じ重さを載せた場合の形において、軸から最も遠くなると仮定しているのです。もし常に同じ量の重さ

が、しなやかな物質に対して順次作用するのであれば、その重心が可能な限り最も低い位置に来るような配置を取らねばならないと、私は認める。しかし前述の仮定においては、異なる等周図形の間で重さの総量は同一ではない。あるいは、たとえ同じ量の重さが存在するとしても、流体的な物質に順次異なる形を取らせるようなこれらの重さが、自らの力だけで、仮定されているような比例関係や配置を獲得したり保持したりすることは不可能である。たとえば、二つの等周図形 BTN と BbtnN に対して、後者は、等周図形が互いに等しい面積を持たない以上、その差分である全体の空間 BbnN だけ、BTN よりも大きな領域 BbtnN を含んでいる。ここで、図形 BTN の代わりに、底辺 BN まで通常のある液体で満たされた布を考える。しかも、その液体は、各細流 PF の重さが、その長さ PF に比例するようなものであるとする。これは、自然界において唯一考える場合である。次に、この液体が自由に布に作用して、それに BbtnN という形を取らせるとしよう。そうすると明らかに、その後液体は bn の方向にしか進まないのであり、したがって、領域 btn の重心は、領域 BTN の重心よりも確かに低くなる。しかし、その上にさらに BbnN の部分を付け加えたときに、空間 BbtnN 全体の重心が、なおも BTN の重心より低くなるかどうかは、少しも自明ではない。私はさらに、それは誤りであるとさえ主張する。それは、等周図形の中で、重心が軸から最も遠くなる図形は、液体で満たされた布の形ではなく、別の図形である。そして私は、その図形を、あるアナグラムの中に包み込んで示しておく。これは、もし私の兄が、次の問題について自分こそが真の方法を持っていると読者に納得させたいのであれば、彼にもまたそれを探す時間を与えるためである。 $a^{12}b^2c^3e^9g^2bi^7l^6m^3n^6o^4p^7qr^2s^2t^7v^4$ 。この問題の意味は、角の正接の正弦を持ち、立方に適用されたものが比例関係をなすような図形である。これによって指し示されているのは、方程式 $dy = x^3 dx : \sqrt{a^6 - x^6}$ をもつ曲線である。

しかし、全体としての面積の重心が、布の図形において最も低くならないとしても、少なくとも次のことは結論できる。液体の質量によって満たされているその部分の重心は、任意の他の等周図形の頂点から切り取ることで、それと等しい部分の重心よりも、より低くならねばならない、ということである。そして実際、私は自分の解析によって、それがその通りであることを見いだしている。これは、その解析の良さと正確さを疑いなく示す印である。そして、1694 年のライプツィヒ紀要 (Actes de Leipzig) P.276 において、私が弾性曲線の重心について述べたことは、この限定のもとで理解されなければならない。

私の兄の先の解析に見られるもう一つの誤りは、これに劣らず重大である。彼が重さによる中心の距離を、それらの力の総和によって表している点にある。しかし誰もが知っているように、この距離は、力の総和を重さの総和で割ることによって決定されるのであり、重さの総量が常に同一である場合にのみ距離は力の総和だけに比例する。ところが本件では、私が今まさに述べたとおり、重さの総量は一定ではない。

学術誌 Journal des Sçavans

同書第 31 号、8 月 11 日号 P.361。

パリ版 P.570、オランダ版該当ページ

以上のように、同一の推論の中に、十分に明白な二つの誤りが存在する。同時に、それら二つの誤りは、一方が他方を非常に都合よく打ち消してしまうために、ある場合には真の解答に到達してしまうことがある。とはいえ、それは純粋な偶然の結果にすぎず、成功したという栄誉を主張する権利を与えるものではない。それはちょうど、「小石は石である」ということを、次のような推論で証明しようとする者に、いかなる正当性も与えないのと同じである。「すべての人間は石である、すべての小石は人間である、したがって、すべての小石は石である」。その証拠として、次のような問題を挙げることができる。そこでは、二つの誤りのうち一つが消失するため、残ったもう一つの誤りが、必然的に誤った結

論へと我々を導く。たとえば、無限に多くの等周曲線 $BTN, BtN, \dots$ （それらはすべて、その周囲に沿って荷重が加えられており、各部分 FC の重さが、それに対応する底辺 PQ の部分に比例しているとする）の中で、これらの重さの重心が、軸から最も遠くなる曲線を求めよ、という問題を考えよう。この場合は放物線になるという結果が得られる。これは、私がすでに 1691 年 6 月の『ライプツィヒ紀要』P.288 で述べたとおりである。しかし、求めるべき曲線は円でなければならない。なぜなら、ここでは重さの総和が、 PQ の総和、底辺 BN に比例し、したがってすべての等周曲線において同一だからである。それゆえ、重さの重心から底辺までの距離は、真にそれらの力の総和に比例するので $\frac{1}{2} \int x dy$ に比例する。この量が最大になるのは円のみであることが知られている。

しかし、これらすべてを考慮したうえでも、私の兄の解は、一般的に言って誤っていることは確かである。とりわけ、弧 BC に関する解は、あらゆる場合において誤りである。このことは、私がすでに抱いている確信を完全に裏づけるものである。彼をその解へと導いた解析は、私がここに報告したものと異なるはずがなく、しかも、彼の解をあまりにも正確に導いてしまった解析なのである。誰もが知っているように、異なる道筋によって同一の真理に到達することは、十分ありふれたことである。なぜなら、真理はただ一つであり、しかも常に単純だからである。しかし、虚偽は数限りなく存在するため、これほどもっともらしく、しかも見かけ上これほど明瞭な二つの推論によって、同一の誤りに到達するということは、道徳的に見てほとんど不可能である。そして、この考察こそが、本誌 (Journal) 昨年 2 月号に掲載された三つの記事の最初のものにおいて、私が、兄の解析を推測してみせる、という試みに踏み切った理由である。(No.XLI, P.137 を参照) 私がそれをうまく言い当てているかどうかは、あなたご自身がご判断なさるがよい。

さらに言えば、あれほど欠陥の多い解析が、数々の矛盾を含んでいないとしたら、むしろ驚くべきことであろう。実際、それは一つならず複数の矛盾に陥っている。第一に、私は次のことを指摘する。

$\int x^m dy$ が最大となる曲線を布とし、 $\int (dt : x^m)$ が最小となる曲線を紐とするのではなく、この対応を逆にして、前者を紐として、後者を布として考えるならば、まったく異なる解が得られてしまうであろう。また私は、私の兄が最初の方法として布を選んだ理由も理解できる。それは疑いなく、もし彼が別のやり方をしていたなら、彼が見いだした解が、 $m=1$ の場合、曲線は円でなければならないという条件に適合しなかったであろうことを、彼が見抜いていたからである。私はここで、この解析に従えば、求める曲線の量 $\int (dt : x^m)$ は、最小ではなく、むしろ最大になるはずだ、という点については論じないことにする。私がただ指摘したいのは、曲線がもしそれを、不均一に透明な媒質を通過する光線として考え、その希薄さが高さ BG において GH に比例すると仮定すれば、やはり見いだすことができる、という点である。しかしその曲線が、紐の考察から得られる曲線と一致するのは、 GH が BG の単純なベキに比例する場合に限られる。これがたぶん理由であろう。私の兄は、 $\int p dy$ が最大となる曲線については、 GH と GB 、あるいは p と x のあらゆる比の場合に対して一般的に与えたにもかかわらず、 $\int (dt : p)$ について同じことをせず、 $\int (dt : x^m)$ が最小となる曲線が何であるかを、ただ単に述べるだけにとどめたのである。もっとも、この慎重さはやや過剰であり、彼はこの後者の仮定に基づいて見いだしたことを、すべて大胆に与えてもよかったはずである。それに基づく解析は、曲線を紐とみなす解析よりも、はるかに自明だからである。しかし、この方法も、 $\int t^m dy$ が最大または最小となる曲線を見いだすという点では、他の方法より特に適しているわけではないことは、認めなければならない。なぜな

ら、同じ高さ BG に対応する異なる等周図形において、それぞれの長さ BF が異なり得ることは簡単に理解されるからである。それらに対応し、媒質の希薄さを表す GH も、同じ高さ BG において互いに異なっていなければならないことになる。明らかに不合理である。要するに、これらのことはあまりにも明白であるため、私の兄がそれらすべてを十分に見抜き、理解していなかったはずはない。しかし、それをどうやって是正するというのか！彼はすでに、自分が真の解を見いだしたのだと、至るところで性急に公表してしまっていたのであり、もはやそれを撤回することは不可能であった。時間は切迫し、期限はまさに満了しようとしており、しかも彼は、それより良い解を見いだしていなかった。したがって、論理性の欠如や、そこに含まれるあらゆる矛盾にもかかわらず、手元にあったその解を公表せざるを得なかったのである。

さらに二つの問題がある。おそらくいつか、その解説が与えられるだろう。

$$a^{44}b^3c^{23}d^{30}e^{65}f^3g^4h^2i^{53}l^{21}m^{32}n^{32}o^{17}p^{19}q^8r^{30}s^{39}t^{42}v^{54}x、$$

$$a^{45}b^3c^{14}d^{10}e^{50}f^3g^7h^2i^{40}l^7m^{15}n^{32}o^7p^{13}q^4r^{12}s^{33}t^{40}v^{30}x^4。$$

注、これら二つの問題の意味は、次のとおりである。

同一の種類に属する無数の曲線の中で、重力のもとにおいて、与えられた垂線へ最も速い下降を与えるのは、次の性質をもつ曲線である。速度が高さの平方根の比に比例すると仮定すれば、下降全体の時間は、曲線の各微小要素に対応する微小時間が、それらの要素を曲線に沿って取った長さの 2 乗の比に比例するような、ある種の微小要素の総和の 2 倍となり、速度が高さの立方根の比に比例する場合には、その総和の 3 倍となり、速度が高さの平方根と一次の中間に比例する場合には、その総和の 1.5 倍となる。これが二つの超越曲線の交点によってどのように決定されるかは明らかである。いかなる特別な曲線の場合であっても、求めるものは、一つの超越曲線だけを用い、しかも代数的な操作によって常に見いだされるのであると、私は主張する。

同一の種類に属する無数の曲線の中で、等しい弧を切り取る曲線における接線は、次のようにして求められる。与えられた横座標上の点を通して、無数に考えられる曲線のうちの一つを引き、さらにその接線および縦の適用線を引く。すると次の比例が成り立つ。「この接線が、曲線の横座標の微小要素と、適用線の微小要素とに対応する第 3 比例数の総和を超える量」が、その接線そのものに対する比と、下接線が第四比例数になる比とが等しい。この下接線は、接線と、横座標および曲線の縦座標との両方から引かれた接線とによって、軸上に切り取られる部分を表す。

No. XLVI

回答についての告知

1698 年 6 月 23 日付の Journal に掲載されたもの

私は、兄が等周問題に対する真の方法を持っているとは、これまで一度も信じたことがない。今となつては、彼が自分の解答をもう一度検討し直すことさえ渋っているのを見て、疑いが強まった。そもそも、すぐに済むはずのことを、なぜ我々に拒むのか。それは彼自身が自分の方法を信用していないからに他ならないのではないか。もし彼の言うとおりに、この一切の神秘を試み、着手し、そして完全に解き明かすのに、わずか3分しか費やさなかったのなら、彼が見出したものを再検討するのにも、それ以上の時間は要らないはずである。仮にその倍の時間をかけたとしても、6分間この検討に使ったからといって、彼の新しい発見の数がそれほど減るということがあるだろうか。それがどれほどの手間になるにせよ、私はさらにその半分以上を免除してもよい。ただし、弧 BF に関する部分を手直しするか、少なくとも、彼の等式 $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ に印刷上の誤りがないかどうかを我々に告げてほしいだけである。彼自身も、これは私が求めた事柄の一部であることを彼が隠していようと承知しているはずだ。したがって、もし私の主張どおり彼の解答が誤っているならば、彼は必然的にそれを修正する義務がある。または、自ら主張を放棄するしかない。それでは、彼自身からは分析も証明も示されていない以上、いったい何を根拠に読者が判断せよというのだろうか（おそらく彼にはそれを示す勇気がないのだ）。私は、この論争において、ライプニッツ氏の裁定を拒むどころか、さらにロピタル侯爵やニュートン氏そして当代随一の幾何学者たちすべての裁定を、心から受け入れる用意がある。ただし条件として、私が自分の番で発言し、兄がこのジャーナルで提示した二つの解答に対する私の返答をすべて終えるまで、判断を差し控えていただきたい。

同書 パリ版 P.364 オランダ版 P.575

兄が読者の注意をそらそうとして持ち出してきた新しい問題については、私は何も言わない。私自身の問題に対してまだ満足のいく回答を得ていない以上、それに応じる義務はないと思うからであり、また、それらは本来、彼自身の匿名の人物に向けられたものにすぎないように見えるからである。その人物が、いつかその解答を我々に与えてくれるかどうかは分からない。しかし、彼にはそれができる人物であることは確かであり、ひょっとすると、すでに解いてしまっているのかもしれない。少なくとも、賢明であるならば、このあたりで話を終え、それ以上彼を刺激しないのがよいだろう。

No. XLVII 一通の手紙からの抜粋

1698 年 8 月 22 日付、フローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏からの書簡。

同月 4 日および 11 日付のジャーナルに掲載された、バーゼル大学教授である彼の兄の書簡に対する回答として記されたもの。

ここでは日付がある程度重要になり得るため、M.V.氏 (Mr. Varignon) は、この書簡をすでに去る 9 月 2 日に受け取っていたこと、そして、雑誌の休刊期間のために、それより早く掲載することができなかったことを、あらかじめ断っておく必要があると考えている。

学術誌 Journal des Sçavans

1698 年第 40 号、12 月 8 日号

パリ版 P.477、オランダ版 P.759

人に気を使おうとしているのに、かえってその人を侮辱してしまうというのは、まことに意外なことである。私は、相手はただの匿名の人物にすぎないと思っていた。そこで、兄から不満を持たれることのないよう、考える限りの配慮を尽くし、兄弟の間にあるべき結びつきと友愛を保とうと努めてきた。しかし、残念ながら私は誤っていた。昨日受け取った彼の書簡の抜粋によって、私がこれほどの配慮と気遣いを示してきたにもかかわらず、兄はそのすべてをものともせず、この匿名の人物のために全力で肩入れし、しかも私に反対の立場を取っていることが明らかになったのである。しかもその態度は、あまりにも熱烈で激しいため、私が期待していたあの称賛に値する健全な競争心などではなく、彼を動かしているのは盲目的な嫉妬にほかならないことが、誰の目にも明らかである。もはや決着はついた。彼の想像力は、サバト（悪魔の集会）に肉体のまま行っていると信じ込むあのいわゆる魔術師たち以上に、強烈で激しいものとなり、それが彼を惑わせてしまったのだ。彼は自分の空虚な推測の奔流に身を任せて流されており、要するに、もはや理性に耳を貸しているようには見えないし、私がどれほど論拠を挙げて説明しようとも、それを理解できる状態にすらないように思われる。したがって私は、彼をその信念のままに委ねることにする。私は読者に対して、彼の攻撃がいかに不合理であることを示すことだけに満足しよう。

私の兄は、私の解析をまだ見ていないと認めている。それにもかかわらず、彼はそれを非難する、なんとも奇妙な非難のしかただ！彼はまず自分で一つの解析をでっちあげ、それを私のものと偽って私に帰してしまう。その架空の解析について延々と議論を展開し、そこから不合理や矛盾、さらには何とも言えない愚劣な論理を導き出す。それだけで事は済んだことになると、彼は思い込みに取りつかれ、すべてを私のせいにする。それらは私のいわゆる解析の帰結だというのだ。彼は手紙の全体を通して、それを私のものとして断定的に語り、しかも信じがたいほどの確信をもって述べている。なんという向こう見ずさ！なんという厚顔無恥さだ！私のものではない解析を、私自身が否認し、しかも自ら退けているその解析を、無理やり私に帰そうとするとは。彼はこれ以上、いったい何を望んでいるのか。これで彼の攻撃の力はすべて打ち砕かれた。私は彼が避難しようとしているその解析が、私のものであることを、断固として否定するからである。私には、私のほうが彼よりも優れた予言者であったように思われる。15 号雑誌 P.176 (No.XLII,P.140 を参照) において、私は彼の推測をあまりにも見事に言い当てていたからだ。それなのに、どうして彼はその箇所を読まなかったのだろうか？そこでは私は、私の方法が直接的で幾何学的であり、しかも彼自身が求めているそのようなものであることを、はっきりと述べている。さらに、流体の方法も、巧みに用いられれば（そして私の兄が用いているようなやり方では

なく)、同じ正しく真の解決へと導くのだとも述べている。実際のところ、もし彼が先入観なしに私がその箇所で述べていることをすべて読んでいたなら、彼はあの一切のたわごとを書き連ねる労を、自ら省略していたであろう。それらは私にはまったく響かないし、私に向けられたものでもなければ、大トルコ皇帝に向けられたものと同程度にしか私には関係がない。私は、彼の粗野な言辞のすべてを喜んで黙殺する。彼が正気に立ち返りさえすれば、必ずやそれを後悔するに違いないと確信しているからだ。だからこそ私は、私がやむを得ず答えざるをえない点にだけ、立ち止まることにする。

この学問において、われわれに何か新しい道筋を開いてやったのだと主張するくらいなら、むしろ黙っているほうがましであろう。私の考えでは、そうした道筋は互いに合い入れないものなのである。もしわれわれが勘定をつけようとするなら、いったい誰に残りが出るのか私には分からない。私はただ、兄に対して、彼が現在その手紙の全体を通して、まるで大家のように用いている「鎖線」の最初の理論を、いったい誰から負っているのかを思い出してほしいと願うだけである。それを知っている人々は、何をどう考えるべきか分かるだろう。この種の非難は、あまりにも虚栄の匂いが強すぎる。

兄は P.355 (No.XLV,P.143 を参照) で、当初は私の解と自分の解とのあいだに何らかの一致が見られることを喜んでいたが、やがて、注意深くすべての事情を検討した結果、自分の最初で主要な問題の解がきわめて不完全であることを見だし、期待が裏切られたために悲嘆へと変わった、と述べている。

もし彼が、私による彼の第一の問題の解と自分の解とのあいだに、何らかの一致を見いだして、悲しみよりもむしろ喜びを感じたのだとすれば、なぜ私が彼の最後の問題を彼自身が課した条件をはるかに超えて、彼自身が絶望的だと考えていた場合にまで及ぶ形で解いたことについては、私に正当な評価を与えないのだろうか。なぜ彼は、そのことについて喜びを表さないのか。いったい何が、彼をこれほどまでに沈黙させているのか。それは、あまりの喜びのあまり、舌が縛られてしまったからなのだろうか。

兄が P.356 (No.XLV,P.143 を参照) で、自分の意図として最初には表明していなかった条件、読者に対して、純粋な幾何学の原理によって自分の問題を解くよう招いたのだという条件を、あとから持ち出してくるのは実に滑稽である。なぜ彼はその条件を最初から付け加えておかなかったのか。おそらく、後になって言いがかりをつける材料を得るためだったのだろう。もしその問題が正当に解決されているのなら、いったい彼にとってどの方法が用いられたかが何の問題になろうか。彼が要求したのは解であって方法ではなかった。もっとも、私に直接的で純粋に幾何学的な方法がないわけではない。それは彼がいつか目にするようになるだろう。今は、正直な人々が常に詐欺的な策略として忌み嫌うであろう。もしこのようなやり方が許されるのなら、私は簡単にニュートン氏によって与えられた私の最速降下線の解が正当なものではないことを証明してみせよう。そこには証明も解析も存在せず、おそらくは機械学的な原理から導き出されたものだからである。もし好き勝手な推論や不正確な論法を許すなら、私だっていくらでも作り話の解析をでっちあげて、兄の論法を使えば、あのニュートンでさえ「二つの誤りがたまたま打ち消し合っただけで真理に達した」ということを証明してみせられる。しかし私は誠実でありたいから、そんな卑劣な議論は誰に対しても向けない。

同じページの末尾 (No.XLV,P.144 を参照) で、私の兄は、私のすべての問題をすべての部分において解決したと自慢しており、私が同一の曲線を異なる曲線として扱って誤っていたかもしれない箇所まで指摘している。私は彼に、その箇所を示してほしい。私が誤っていたかもしれない箇所ではなく、実際に私が誤っていた箇所を示してほしい。さらに言えば、彼は私のすべての問題を解決したと、あまり

誇れる立場にはない。なぜなら、1697 年の「ライプツィヒ學術誌」P.216 で、彼自身が、私のある問題 (No.XXX,P.98 に提示された問題であり、その内容は次のような曲線を求めよというものである。与えられた 1 点から任意の直線を引き、その直線がその曲線を 2 点で切るとき、その二つの線分の一方の下にできる立体と、他方の線分の平方とが、常に与えられた一定の値になるような曲線を見つけよ、という問題である。) に対する自分の解答が明白な矛盾を含んでいることを率直に認めているからである。これを解決と呼べるだろうか。もし彼に他の解法がないのなら、彼が望むなら、私は正当な解法を与えよう。しかも幾何学的曲線による解法である。あるいは、1 年以上前に私が伝え、彼も非常に良いと認めたその解法を、ライプニッツ氏に尋ねてもらってもよい。

P.358 (No.XLV,P.145 を参照) で、私の兄は「流体の圧力は垂直方向に作用する」という理論を、誤って自分の功績だと主張している。しかしその理論は、マリオット、ウォリス、ニュートン、その他この問題について著述した人々によって、はるか以前から知られていた。にもかかわらず、彼はしばしば事後にやって来るのである。実際、彼は「円が等周図形の中で最大の面積をもつ」ことを最初に証明したのは自分だと信じていたが、パッポスがすでにそれを非常に幾何学的に証明していることを知らなかったのである。彼はまた、螺旋における展開曲線を表すための定理についても、自分がその最初の発明者であると考えており、それらの定理は私には知られていなかったのだと信じ込んでいた。しかし、ロピタル侯爵がすでにそれらを公にしてからずっと後のことであった。

同じ書簡の別の箇所 P.362 (No.XLV,P.146 を参照) で、私の兄は「自分の議論のようにもっともらしく、しかも一見もっともらしい二つの推論によって、同一の誤りに到達することは、道徳的に不可能である」と主張している。しかし、なぜ私が二つの誤った推論によって、同一の真理に到達したということは、同じように道徳的に不可能でないのだろうか。それは、前者の方が彼の憶測を補強するのに都合がよいからにすぎない。

同前の書誌。四つ折版。 学者雑誌 12 月 15 日号 P.481 1765 年パリ版およびオランダ版

私は、以下に述べられているところに、次のような詭弁と同じ種類の誤謬を見て取る。「すべての小石は石である。ゆえに、すべての石は小石である。」それは、彼が、 $\int x^m dy$ が最大となる曲線を布として、また $\int (dt : x^m)$ が最小となる曲線を紐として表現する代わりに、その扱いを入れ替えて、前者を紐として、後者を布として考えてもよい、と言っている点においてである。 $\int (dt : x^m)$ が最小ならば $\int x^m dy$ は最大になるということは確かに真である。しかしその逆はまったく成り立たない。なぜなら、私が直接的および間接的な解析によって見いだしたところによれば、 $\int x^m dy$ がより大きくなる曲線が存在するにもかかわらず、そのために $\int (dt : x^m)$ がより小さくなるわけではないからである。私の兄のこの詭弁は、彼が自分の等周問題には複数の解が存在するということに気づかなかったことに由来している。そして彼が同じ暗礁にぶつかるのはこれが二度目である。彼が傍心曲線について、解はただ一つしかないと思い込んでいたときにも、ライプニッツ氏がまさに同じ誤りをすでに指摘していたからである。このような事情から、私は P.174 (No.XLII,P.139 を参照) であらかじめ次のことを一般的に述べておくという注意を払った。ある同一の曲線について、 $\int GH dy$ はより大きくもなりえる、またより小さくもなりえるし、それに対応して $\int (dt : GH)$ もまた逆に、より小さくもなり、より大きくもなり得る、ということである。これによって私は、私のブラキストクロン曲線 (重力のみで滑り落ちる粒子が最短時間で到達する曲線) は常に等周条件を満たしているが、等周条件を満たす他の曲線も存在し、それらはブラキストクロン曲線ではない、ということを示したのである。

P.363 (No.XLV,P.146 を参照) の冒頭で、私の兄は、 $m=1$ とした場合、 $\int xdy$ が最大となる曲線が円であることは知られているが、 $\int (dt:x)$ が最小となる曲線は必ずしも円ではない、と考えているように見える。しかし私は、彼の言う布や紐といった比喻には一切頼らず、古代の人々のやり方にならった幾何学的証明によって、実際に円が $\int (dt:x)$ を最小にするという性質を持つことを示すことができる。したがって私は、この研究において私が取ったはずだと彼が言う「選択の理由」というものが、いったい何を意味しているのか理解できない。問題となっているのは、どちらの見方をしても同一の曲線だからである。 $\int xdy$ が最大の場合でも、 $\int (dt:x)$ が最小の場合でも、同じ一つの曲線にほかならないからである。私は、彼が布だの紐だのについて言っていることがまったく理解できない。そして良心にかけて言うが、 $\int (dt:GH)$ の最大と $\int GHdy$ の最小、ブラキストクロン問題と等時曲線問題との間にあるこの美しい対応関係を発見したとき、彼があれば騒ぎ立てている布切れや紐のことなど、まったく眼中になかった。したがって彼は、私が行ったこの唯一の発見だけからでも、私が真理に到達したのは偶然でもなく、二つの虚偽を仮定した結果でもないということ、むしろ私がその真の方法を所有しているからこそであるということを認めるべきである。そして、もし私の最初の著作に軽微な誤りが忍び込んでいたとしても、それは私が第2の著作でいとも簡単に訂正した程度のものであり、せいぜい性急さから生じた過失にすぎず、方法そのものには何の傷もつけるものではない。もし私が最初の著作ではこの性質をBGの単なるべきの場合についてしか提示しなかったとすれば、それは私の兄の問題に答えることだけが目的であって、私の発見をそれ以上押し進めるつもりはなかったからである。彼が、私が P.174

(No.XLII,P.140 を参照) でこの性質を一般的なものとして与えている箇所をきちんと読んでさえくれば、彼は自分の不当な推測に基づく判断を差し控えることができたはずであり、またそのような判断を保留にすることもできたはずである。

以上が、私が兄の手紙の中に、急いで読み取ることでできたすべてである。さて、その直後に続く注記、少し触れてみる。彼は最初に、私が「このすべての謎を究めるために、試み、着手し、そして完全に理解し終えるまでに、わずか3分しか使わなかった」などと自慢していると私を非難している。彼は少しでも次の事実について考えてみたほうがいい。1697年5月にライプツィヒの学術誌 *Acta Eruditorum* に掲載されたこれらの問題が、私の知るところとなったのは、同じ月の終わり頃であったこと、そして私が「学者の業績史」(No.XXXVIII を参照) の編者に宛てて書いたかなり長い手紙が、その翌月6月号に掲載されていること、さらに、その編集者が、その中に挿入すべき図版を彫刻する必要があるために、私の手紙の掲載を遅らせたこと、そしてもしそれがなければ、私の手紙は同じ5月のうちに掲載されていたであろうこと、これはその編集者自身が私に書き送ってきたことである。それならば、私にいったいどれほどの時間が残されていたというのか、これらの問題について考えるために。もし兄がこれらすべてを考慮するなら、私の言葉の中に、彼が思っているほど露骨な自慢があるわけではないことが、きっと分かるであろう。少なくとも、私がそれに彼の与えた3か月もの時間を費やしたなどということからは、ほど遠いということが分かるはずである。しかし、方法を発明することと、それを実際に適用すること、あるいはその計算を実行することとは、まったく別の事柄である。方法を見つけ出すこと自体は、時として簡単であっても、その計算過程はきわめて困難で、しかも冗長になることがある。私は自分の方法については何度も、しかも繰り返し検討し直した。そこで問題になるのは誤った推論が含まれていないかどうかを調べることだからであると、私は兄に言っている。しかし、解法そのものや解析計算を再検討することは、計算ミスがないか確かめるという意味では学童の仕事にすぎな

いのであって、私はそこに神経を使う必要はない。自分の方法を完全に信頼しているからである。さらに私は、誰の目にも明らかなように、彼が要求した内容において、弧 BF に関する部分は、結合的条件ではなく選択条件にすぎないと主張する。しかし、彼は自分の解法をよく検討すべきである。もしかすると、もしそれが私のものと異なっているなら（私はまだそうだとは思っていないが）誤っているのは彼のほうかもしれない。彼は誤りがない訳ではないのだから。彼はこの意見書の冒頭では、すべてを認めている。彼にとって悩みの種となっているのは、ただこの等式 $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$ だけである。もしも、彼の「弧 BF（あるいは t ）の単純べき」に関する解が、次の等式 $a^m y = t^{m+1}$ に帰着するのだとしたら、曲線を非常に簡単に作図できる形になるのだが、彼はその解が完全に誤っていることを知るべきである。ともかく、ついに彼がライプニッツ氏の仲裁を受け入れる気になったことを、私は大いに喜んでいる。また、ロピタル侯爵の仲裁にも、そしてニュートン氏の仲裁にも、私は満足している。もし彼がこの解決策をもっと早く受け入れていれば、これほど多くの無益な論争を避けることができたであろう。私はかなり以前から、自分のすべての解答（No.LXXV を参照）を解析および直接的・間接的な方法とともに、ライプニッツ氏に託して保管してもらっている。そして彼はそれらを大いに認め賞賛してくれた。彼はそこに、誤りを修正することによって偶然にも真理に行き着くような、そうした類いの誤りなどまったく見出さなかったのである。したがって私は兄に対し、彼の方法・解答・解析のすべてをただちにライプニッツ氏へ送るよう求める。そしてライプニッツ氏がそれらをすべて一括して公表し、とりわけ我々の裁定者諸氏が、突き合わせ・検討・判断できるようにするためである。それではこの件については、ひとまずここで打ち切りとし、我々の解答と方法が公表されるまで、兄には沈黙してもらおう。さらに私は、彼が自分のもの（解答・方法・解析）をライプニッツ氏に提出し、それらが私のものと同時に、同じ場所で公表されないかぎり、彼からは今後いかなるものも受け取らない。また正義のためにも、彼の正体不明の友人が、あの賞金を我々の裁定者の一人に預けるべきである。もし彼が善良で名誉ある人物であるなら、そうするはずである。私はすでに述べたし、今あらためて言うが、私自身はその賞金を一切要求しない。貧しい人々はそれを要求している。

私が兄に提示した新しい問題について、兄はこう言っている。「その匿名の人物なら、それらを解く力量がある」と。そして私に対して、（もし私が賢明であるなら）ここでやめておき、それ以上その人物を追い詰めないようにと忠告している。私はこの忠告について兄に感謝している。しかしこう言わせてもらうなら、その匿名の人物が誰であれ、本当に彼がそれほど有能であり、しかもすでにそれらの解を見つけているのだと兄が保証しているのが事実なら、これほど彼にとって有利な挑戦を受けなかったその人物は、決して賢明とは言えない。

追伸：10月4日付の手紙、10月14日から20日の間に受領

私は、重心が軸から最も遠い等周曲線の中のその図形と、液体を満たした布の図形とが同一の図形である、などとは一度も主張したことがない。それなのに、なぜ私の兄が空に向かって叫ぶかのように騒ぎ立て、両者が異なることを証明しようとそこまで必死になるのか、私には理解できない。しかも、その前者の図形を見つけるのに、私にはそれほど長い時間も必要ではなかった。その図形を、（兄の例にならって）次の問題の下に隠しておく。

$$a^8 b c^2 d^3 e^8 i^7 l^2 m o^2 p^2 q^3 r^5 s^7 t^6 v^9 x^3 y$$

そして、この論争の決着がつき、兄が自分の答えを提示した後で、私はこの暗号の解読法を明かすことにする。(この問題の意味は、求める曲線によって囲まれる面積を r と呼ぶならば、 dt を等しく取ったとき、 dy は $xfrdx$ に等しい。) この目的のためには、(兄がこの争いをわざと長引かせたいのでなければ)、それをライプニッツ氏ただ一人の裁定に委ねるのが最もよいように私には思われる。あるいは、もしこの偉大な人物が、いかに公平無私であろうとも、兄には疑わしく思えるのであれば、他の誰かに委ねてもよい。彼からあらゆる言い訳や、あらゆる結託の疑いを取り除くために、私は彼にとって非常に有利な二つの条件を引き受ける。第一、たとえライプニッツ氏が私に不利な裁定を下したとしても、私はその決定に従うこと。第二、もし彼が私に有利な判断を下し、しかも兄がそれに満足しない場合には、私は兄に対し、ロピタル侯爵およびニュートン氏の裁定に上訴することを認める、私は彼らを忌避するどころか、むしろそれを歓迎する。これら二つの条件は、もし兄がすでに自分の主張に不安を抱いていないのであれば、必ず受け入れるはずのものである。私が自分の上訴する権利を放棄し、それを全面的に兄に譲るというのは、これ以上ないほどの譲歩ではないだろうか。(No.LXVI を参照)

No. XLVII

抜粋

ド・ライル氏 (Philippe de La Hire) の「力学論」より
命題 CXX

逆さにしたサイクロイドの中を落下する物体は、どの高さから落ちて、同じ時間でその頂点に到達する。

力学論、パリ刊行、1695 年、
十二折判、P.421

半分の逆サイクロイド FED を考える。AF をその底辺とし、D を逆さまの頂点とする。それは半円 ABD によって描かれたものである。私は次のことを主張する。サイクロイド FE の曲線に沿って落下する物体は、どの点 E から落ち始めたとしても、同じ時間で点 D に到達する。

半円 ABD のすべての点 B から、弦 BD を引き、また同じ各点 B から、底辺 AF に平行な直線 KGBE を引くと、サイクロイドと点 E で交わり、そのすぐ上の最も近い弦と点 G で交わり、直径 AD と点 K で交わる。するとサイクロイドの性質により、その曲線 FED は、それに接する BG のような弦の部分と等しい部分から構成されており、しかも生成円の弧 BB が十分に小さいときには、それらは曲線と区別がつかない。

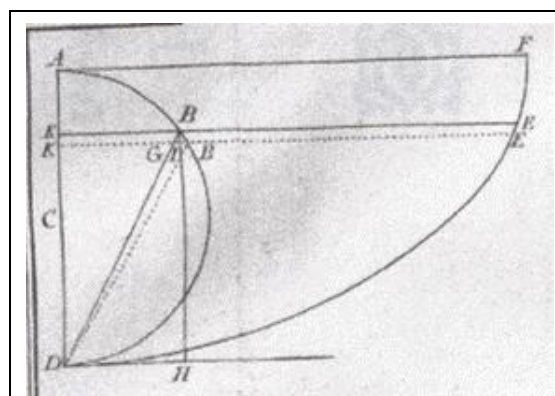


表 X, No. XLVIII

しかし、前の命題で証明されたことによれば、物体が傾斜面 BG に沿って落下するとき要する時間は、AD に平行で BE の間に含まれる BI を進むのに要する時間と、それらの線分 BG と BI の長さの比に等しい比をなす。しかも、物体が点 B においてどのような速さをもっている、である。そして、点 G における速度は点 H における速度と同じであるから、次のことが成り立つ。物体が、BG のような各弦の部分を、それぞれの BG の落下によって順次得られる速度で通過するのに要する時間の総和は、物体が各垂線 BH を通過するのに要する時間の総和と、それらすべての BG の部分の総和（サイクロイドの部分 EED に等しい）と、それらすべての垂線 BH の総和（BH または KD に等しい）との比に等しい。

また、サイクロイドの性質により、曲線部分 EED は、対応する円 ABD の弦 BD の 2 倍である。したがって、サイクロイドの部分 EED に沿って落下するのに要する時間は、垂線 BH に沿って落下するのに要する時間に対して、 $2BD: BH$ の比に等しい。

最後に、同じ命題によって、弦 BD に沿って落下するのに要する時間は、垂線 BH に沿って落下するのに要する時間に対して、 $BD: BH$ の比に等しい。したがって、EED に沿って落下する時間は BH に沿って落下する時間に対して $2BD: BH$ の比に等しく、また BH に沿って落下する時間は BD に沿って落下する時間に対して $BH: BD$ の比に等しいから、比の合成によって、EED に沿って落下する時間は BD に沿って落下する時間に対して $2BD$ 、それと等しい曲線 EED に対する BD の比に等しい。ところが、命題 100 によって、弦 BD に沿って落下する時間はすべて互いに等しい。したがって、それらの弦に対応するサイクロイドのすべての部分 EED に沿って、その頂点 D に至るまでの落下時間も、互いにすべて等しくなる。なぜなら、それらはすべて弦の時間のちょうど 2 倍だからである。

ホイヘンス・ド・ズュリケム氏 (Hugens De Zulichem) は、このサイクロイドの性質によって、もともと不等であった振り子の運動を、時計に用いるにあたって正確なものに改良した。彼は、振り子の支点のところに二つのサイクロイドの部分を取り付けた。その結果、長さの異なる振動であっても、それらは等時的、同じ時間で起こるようになった。もし振り子のおもりを点とみなすなら、それは、支点に取り付けられたそれらのサイクロイドと相似なサイクロイドを描くからである。ただし、そのサイクロイドを生成する円の直径が、振り子の長さの半分に等しい場合である。

No. XLIX ヨハン・ベルヌーイ

互いに一定の比をもつ放物線弧に関する代数的研究
および、サイクロイドにおける落下運動の等時性の証明、等々

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1698 年 6 月号 P.261

われわれはすでに、放物線曲線の弧の伸長と、双曲線の面積の求積とのあいだに、相互の関連が存在することを知っている。また、漸近線に挟まれた双曲線の諸領域が、幾何級数の進行に従って並ぶとき、それらの面積が互いに等しいことも知っている。そしてこのことは、それらの面積が直線的な台形によって不足する、その双曲線の各部分についても同様に理解されるべきである。それらの直線的な台形もまた、互いに等しいからである。したがって、漸近線に挟まれた、ある与えられた双曲線領域に対して、同様の別の領域を、与えられた比において見出すことは、難しいことではない。

したがって、もし放物線の弧の部分が、これらの面積と同じ比をもっているならば、われわれの求めているものはまさに達成されたことになる。放物線上の任意の与えられた点から、別に与えられた弧に対して、与えられた比をもつような弧を、直ちに切り取ることが簡単にできるのである。しかし実際には、放物線の弧の部分は、一般には双曲線の求積によって直線化されるとは言われているものの、それらは、漸近線に挟まれたあの面積に比例することはできず、むしろ、共役軸によって挟まれた別の面積に比例するのである。ところがこれらの面積は、先に述べた漸近線間の面積のように、互いに等しくなることはなく、ただ二つの場合に限って、しかも軸のこちら側と向こう側に対称に取られたときにのみ等しくなる。その結果として、与えられた放物線の弧に対して、それと等しいが形の異なる別の弧を切り取ることは不可能となる。なぜなら、もしそれが可能であるならば、それは放物線の弧長の直線化そのもの、さらには双曲線の求積までも導いてしまうからである。このことからまた、たとえ $1:1$ ではない比率が与えられていたとしても、放物線上の任意に選んだ点から、求める弧を切り取ることはできず、むしろその点そのものを、作図によって初めて決定しなければならない、ということが起こるのである。そこで私は、 $1:1$ ではない場合において放物線弧を比較する方法を見出すために、まず簡単に気づいたのは、共役軸上のあの双曲線の面積を、あらかじめその与えられた比で取る必要がある、ということであった。しかし、まさにこの点こそが、ある程度の労力と工夫を要するように思われた。それにもかかわらず、私はこの道を、ただ代数のみを導きとして（ここでは微分法やその他の無限小法は、まったく何の役にも立たないので）、ついに目的を達したことを、これから示そう。そして、私が行った計算の主要な要点を示すことにする。

放物線 CAN を考える。その軸を AX、半径数を AD とする。その上に与えられた弧 BC があり、それに対して、比が $n:1$ となるような別の弧 MN を定めるとする。法線 RA δ を引き、点 A を中心とし、半軸 AD を用いて、直角双曲線 IDZ を描く。すると周知の通り、AD と任意の放物線弧 BC によって作られる長方形は、対応する双曲線の領域、共役軸の平行線 HR, IS に挟まれた双曲線台形 HRSI の面積に等しい。放物線弧 BC, MN は、それぞれに対応する双曲線台形 RI, αZ に比例する。したがって問題は、与えられた RI に対して、比が $n:1$ となるような別の αZ を定めることに帰着する。これを次のように行う。

漸近線 AG,AT を引き、それらに平行な線 DE,HF,IG を引く。さらに、AF と AG の比において、AK,AL,AQ,AT が連続比例となるように取るものとする。すると、KV,LW,QY,TZ という平行線を引けば、双曲線台形 KW,LY,QZ は、互いに等しく、また双曲線台形 FI と同等しいことが明らかである。さ

らに、弦 IH,VW,WY,YZ を引けば、双曲線の部分 VW,WY,YZ も互いに等しく、かつ双曲線部分 IH にも等しい。したがって、AK,AL,...のような連続比例の数を $n+1$ 個取れば、V と Z の間の双曲線部分の数は n 個となり、それゆえ、双曲線部分 $VW+WY+\dots$ の和は、部分 HI に対して、ちょうど $n:n:1$ の比をなす。さて次に、最初の連続比例量 AK を適当な大きさに取って、共役軸に向かって下ろした縦線 $V\alpha, W\zeta, \dots$ によって作られる直線的台形の総和、多角形 $\alpha VWYZ \delta$ が、直線台形 RI に対して $n:1$ の比になるようにすれば、(これは実際に可能で

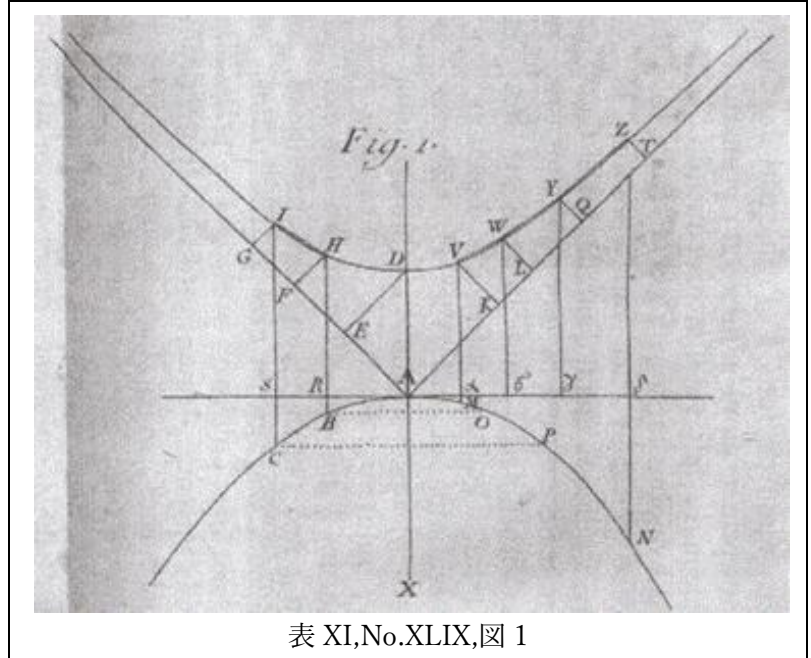


表 XI, No. XLIX, 図 1

ある。直線台形 $\alpha W, \zeta Y, \dots$ が互いに等しくなくてもよく、あるものが大きく、あるものが小さければ、その補償によって、全体として RI を n 回正確に含めばよいからである。) もしこれがそうになっているならば、双曲線の面積 $VZ \delta \alpha$ 、双曲線台形 $\alpha W + \zeta Y + \dots$ の総和もまた、双曲線台形 RI に対して $n:1$ の比になることは明白である。なぜなら全体:全体=取り去ったもの:取り去ったもの、多角形 $\alpha VWYZ \delta$:直線台形 RI=線分 $VW+WY+YZ$:線分 HI、いずれも $n:1$ だからである。したがって、残り:残り、双曲線台形 αZ :双曲線台形 RI= $n:1$ 、であり、放物線弧 MN:放物線弧 BC も $n:1$ の比をもつ。したがって、目指すべきことは点 K を決定することである。既知の量として $DE (AE) = a$ 、 $AF = b$ 、 $AG = c$ とおき、未知の量として $AK = x$ とおく。すると $AL = cx:b$ 、 $AQ = ccx:bb$ 、 $AT = c^3x:b^3$ 、...となる。さらに $\alpha V = x\sqrt{\frac{1}{2}} + aa\sqrt{\frac{1}{2}}:x$ 、 $\zeta W = cx\sqrt{\frac{1}{2}}:b + aab\sqrt{\frac{1}{2}}:cx$ 、 $\gamma Y = ccx\sqrt{\frac{1}{2}}:bb + aabb\sqrt{\frac{1}{2}}:ccx$ 、...などが得られる。また、 $A\alpha = x\sqrt{\frac{1}{2}} - aa\sqrt{\frac{1}{2}}:x$ 、 $A\zeta = cx\sqrt{\frac{1}{2}}:b - aab\sqrt{\frac{1}{2}}:cx$ 、 $A\gamma = ccx\sqrt{\frac{1}{2}}:b^2 - aabb\sqrt{\frac{1}{2}}:ccx$ 、...である。従って

$$\begin{aligned} & \alpha V + \zeta W, \zeta W + \gamma Y, \dots, \\ & \frac{cx+bx}{b}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{aac+aab}{cx}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{ccx+bcx}{bb}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{aabc+aabb}{ccx}\sqrt{\frac{1}{2}}, \dots \\ & \text{それぞれ下記を掛けあわせると、} \\ & A\zeta - A\alpha(\alpha\zeta), A\gamma - A\zeta(\zeta\gamma), \\ & \frac{ax-bx}{b}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{aac-aab}{cx}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{ccx-bcx}{bb}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{aabc-aabb}{ccx}\sqrt{\frac{1}{2}} \dots \end{aligned}$$

次の値が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{ac-bb}{2bb}xx + \frac{aacc-aabb}{bc} + \frac{cc-bb}{2ccxx}a^4, \quad \frac{c^4-bbcc}{2b^4}xx + \frac{aacc-aabb}{bc} + \frac{bbcc-b^4}{2c^4xx}a^4, \\ & \quad (\alpha V + \zeta W) \times \alpha \zeta \quad (\zeta W + \gamma Y) \times \zeta \gamma \\ & \quad \text{二つの台形 } \alpha W \quad \text{二つの台形 } \zeta Y \\ & \frac{a^6-bbc^4}{2b^6}xx + \frac{aacc-aabb}{bc} + \frac{b^4cc-b^6}{2c^6xx}a^4, \dots \\ & \quad (\gamma Y + \delta Z) \times \gamma \delta \\ & \quad \text{二つの台形 } \gamma Z, \dots \end{aligned}$$

さらに、 $\frac{c^{2n}-bbc^{2n-2}}{2b^{2n}}xx + \frac{aacc-aabb}{bc} + \frac{b^{2n-2}cc-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4$ = 最後の微小台形の面積の2倍。

以上すべてを総和にまとめる（これは簡単である。すべての初項、およびすべての末項はそれぞれ項数 n の等比級数をなし、中間の項はすべて等しいからである）。したがって、等比級数の和の通常の方式を用いればよい。その結果 $\frac{c^{2n}-bbc^{2n-2}}{2b^{2n}}xx + \frac{aacc-aabb}{bc} + \frac{b^{2n-2}cc-b^{2n}}{2c^{2n}xx}a^4$ = 台形の総和の2倍=多角形 $\alpha VWYZ\delta$ の2倍となる。一方、RH+SI に RS を掛ければ、台形 RI の2倍が得られ、 $(cc-bb):2+(aacc-aabb):bc+(cc-bb)a^4:2bbcc$ に等しい。上で述べたように、台形 RI と多角形 $\alpha VWYZ\delta$ の比は 1:n である。 $(ncc-nbb):2+(naacc-naabb):bc+(ncc-nbb)a^4:2bbcc$ は $(c^{2n}-b^{2n})xx:2b^{2n}+(naacc-naabb):bc+(c^{2n}-b^{2n})a^4:2c^{2n}xx$ に等しくなければならない。これらを整理すると、次の2次方程式が得られる。

$$c^{2n}x^4:(cc-bb)=(nc^{2n}b^{2n}+na^4c^{2n-2}b^{2n-2})xx:(c^{2n}-b^{2n})-a^4b^{2n}(cc-bb)。$$

従って、この方程式の解である x を AK として取り、 $b^n:c^n=AK:AT$ となるようにして AT を定めると、そこから引いた垂線 KV、TZ によって点 V と Z が決まる。その点 V、Z から軸に平行な直線 VM、ZN を引けば、放物線から所望の弧 MN が切り取られる。そしてその弧 MN は、与えられた弧 BC に対して、求める比 $n:1$ を満たす。

（証明終わり）

ここで注目すべきことが起こった。私は最初から非常に骨の折れる計算になるだろうと覚悟していたのだが、実際には願いや期待をはるかに上回ってうまく進んだのである。台形 $\alpha W, \zeta Y$ などが、無限に和をとることのできる3つの数列を構成していたからである。もしこれらが等比的な形とは異なり、しかも無限に和をとることのできないものとして現れていたなら（それは未知量として AK 以外の任意のものを選んでいて場合、きわめて簡単に起こりえたことであるが）、この問題は、不定の数 n に対して一つの一般方程式によって解くことなど決してできなかったであろう。その場合には、各々の数値ごとに、しかも整数や有理数の場合に限り、そのつど新たに個別の方程式を求めねばならず、それらは状況に応じて多少複雑さの異なるものになっていたに違いない。しかしこの不便は、これらの等比数列のおかげで都合よく取り除かれた。一般方程式において、数 n には整数だけでなく、分数であっても無理数であっても、どんな値でも代入することができる。しかもその方程式は、いかなる場合でも二次を超えることがない。ゆえにこの問題はあらゆる場合において平易である。ただし私は、与えられた b と c から、べき b^n と c^n もまた与えられているものと仮定する。もし n が無理数であるならば、それらの比は、対数を用いなければ求めることができない。

私は先に、放物線の弧長を用いずには、互いに等しいが形の異なる二つの弧を見つけることはできない、と述べた。さらに今、次のことを言う。もし与えられた不等比が $1:n$ であるならば、大きい弧は必ず小さい弧を自分の範囲の中に包み込まねばならない。大きい方の弧の一方の端点 M は、小さい方の弧の端点 B よりも頂点 A に近く、もう一方の端点 N は、小さい方の弧のもう一方の端点 C よりも同じ頂点 A から遠くならなければならない。言い換えれば、点 B と C から軸 AX に下ろした法線を BO, CP とすると、弧 OP は必ず全体として弧 MN の内側に収まるのである。もし、これと異なることを教える別の方法を自分は持っていると思う者がいて、より小さい弧 BC や OP が、その全部であれ一部であれ、より大きい弧の外側に出るような方法を示せると思う者がいるならば、その者は、この事実だけから、自分の方法が完全に誤っているか、さもなければ、これまで無駄に探し求められてきた双曲線の求積を自ら発見したのだと知るべきである。(No.XXVIII.図 3, P.92、No.XXX.P.98-99、No.XXXIV.P.101-102、No.XXXV.P.113 を参照)

最後に付け加えておくが、ここで私が用いたのと同じ原理に基づいて、次の問題も解くことができる。2 個、3 個、あるいはそれ以上の離れた放物線弧が与えられたとき、それらすべてを合わせたものと等しい一つの連続した放物線弧を求めよ、という問題である。また次のことも特筆すべきである。あらゆる放物線の弧長を拒む、その長さを直線として厳密に表すことはできないにもかかわらず、与えられた放物線弧より長い弧、あるいは短い弧を見いだすことができ、その超過分または不足分の弧長は解析的に計算できるのである。この種の他の多くのことについては、ここでは省略する。(次節を参照)

この話題をここで切り上げようとしていた時、私は D.L.H. (ド・ラ・イール、前の項を参照) の *Tractatus Mechanicus* (1695 年パリ刊行) を手に取った。それを開いて偶然にも第 120 命題に行き当たったが、そこでは著者が、ホイヘンスが最初に発見したサイクロイドの等時性を証明しようとしている。その証明の後半部分だけを読んだところ、彼が次のような結論に至っているのを見た。サイクロイドを下る時間は、生成円の鉛直直径を下る時間のちょうど 2 倍である、と。しかしこれは私には明白に誤りだと分かっていた (ホイヘンス自身がすでに、サイクロイドを下る時間と直径を下る時間との比は、円の半周長とその直径との比に等しいことを証明しているからである)。そこで私は、この重大な誤りがどこから生じたのかを探究したいという衝動に駆られた。

そこで私は、この誤りの原因を突き止めるために、先に述べたその証明を読み始めた (そもそも私はこの命題の真理についてはずっと以前から確信していたので、もしこの問題が起こらなければ、おそらくその証明など決して読まなかったであろうが)。しかしそれ以上読み進める必要はなかった。なぜなら、その冒頭において直ちに、草むらに隠れているのではなく、むしろ露骨に姿を現している蛇を見つけてしまったからである。彼は次のような結論を下している。どれほど多く、またどのような比であっても、 $a:b=c:d=m:n=p:q$ 、 $r:s=t:u$ が成り立つならば、すべての第 1 項の総和 $a+m+r$ とすべての第 2 項の総和 $b+n+s$ との比は、すべての第 3 項の総和 $c+p+t$ とすべての第 4 項の総和 $d+q+u$ との比に等しくなる、というのである。この主張が本当に正しいかどうかは、他の人々に判断してもらおう。少なくとも私はこう言う。もし先の主張が真であるならば、円も双曲線も、あらゆる図形がすべて求積可能となり、あらゆる曲線の長さが求められることになってしまうであろう。さらにそれは、任意の曲線を通る降下時間を、言うよりも早く求められるという、驚くべき近道を我々に与えることになる。著者の推論によれば常に、曲線を下る時間と、その鉛直高さを下る時間との比は、その曲線の長さ、その高さそのものとの比に等しいことになるからである。

以上の議論から明らかなように、このきわめて優れた発見については、命題そのものだけを簡潔に提示し、その証明はホイヘンスの証明に委ねておく方が、はるかに賢明であったであろう。もしホイヘンスの証明が、正当ではあるものの、多数の命題が寄せ集められ、錯綜しているために読者の気に入らなかったのだとすれば、より簡潔な形で与えようとしたその意図自体は称賛に値する。だが、その簡潔性は、本当に正しい形で与えられていなければならない。この点については、彼が目標から大きく外れてしまったので、ここでは私が代わってその役目を果たそう。軸を鉛直に立て、頂点を下向きにしたサイクロイドにおいて、曲線上のどの点から物体を落としても、頂点の最下点に到達するまでの降下時間は互いに等しいということを、きわめて簡潔かつ明晰に証明しよう。サイクロイド FDC を考え、その軸を AD、生成円を ABD とする。私は、任意の部分弧 GMD に沿って降下する時間は、半分のサイクロイド全体 FED に沿って降下する時間と等しいと主張する。そこで DG を無限小の部分 Mm に分割し、同様に DF も同数の微小部分 Ee に分割する。すると DF 上の 1 区分と DG 上の 1 区分の比は DF と DG の比に等しくなる。これらの中から DF と DG

The diagram, labeled 'Fig. 2', illustrates a cycloid FDC. The axis of the cycloid is the vertical line segment AD. A circle ABD is shown, which is the generating circle of the cycloid. The circle's center is A, and it is tangent to the horizontal line CF at point A. The cycloid's vertex is D. Points G, L, A, H, T, N, B, E, C are marked on the upper part of the cycloid curve. Points M and m are marked on a lower part of the curve. Lines connect A to G, L, B, and D. A horizontal line segment GH is drawn. A vertical line segment HT is drawn from H to the curve at point T. A vertical line segment ND is drawn from N to the vertex D. A horizontal line segment MN is drawn. A dashed line segment BE is shown. The diagram is used to prove that the time of descent from any point on the cycloid to the vertex D is the same.

表 XI, No. XLIX, 図 2

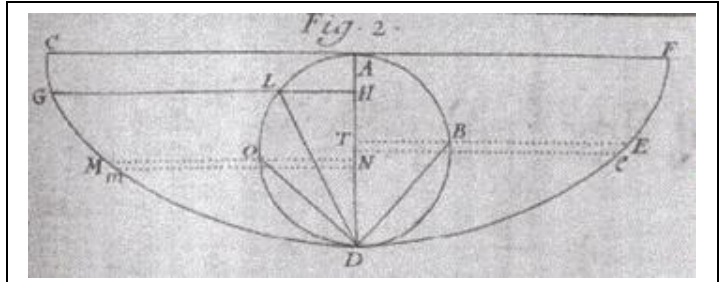


表 XI, No. XLIX, 図 2

を比例的に分割する対応部分 Mm と Ee を取り、それらの分点をそれぞれ M,E とし、そこから ET,MN ならびに DB,DO,DL を引く。仮定より DF と DE、また DG と DM は比例している。したがって、サイクロイドの性質により、それらの半分である DA と DB、さらに DL と DO も比例し、それらの平方、 $DA^2:DB^2=DL^2:DO^2$ も比例する。これは高さ $AT:DT=HN:DN$ に対応し、ゆえに $\sqrt{AT}:\sqrt{HN}$ 、(重力下の落下運動の法則により) 点 E における速度と点 M における速度の比は $\sqrt{DT}:\sqrt{DN}$ となる。また $DB:DO=DE:DM=Ee:Mm$ であるから、速度の比が $Ee:Mm$ に等しい。したがって、Ee に沿う時間と Mm に沿う時間は等しいことがわかる。このことは他のすべての対応区間についても同様である。よって DF 全体に沿う時間は DG 全体に沿う時間に等しく、従って DF と DG に沿う降下は等時的である。(証明終わり)

No. L

ヨハン・ベルヌーイ

曲線の整長に役立つ普遍定理

放物線の新しい性質

3 次曲線の弧長に関する基本的な測定法、など

私は 1695 年の Acta Eruditorum P.374 (No.XXVI を参照) において、任意に与えられた曲線から別の曲線を構成するための一般的方法を提示した。それら二つの曲線の和または差が円弧によって測定可能になるような方法であり、これは包絡線に関するあの一般定理から導かれたものである。その定理はその後、同年 11 月号の同誌において、ライプニッツおよびチルンハウスのさらなる研究への道を開いた (No.XXVIII, No.XXIX を参照)。それ以来私は、よって、これが直線だけで実現できるのではないか、与えられた曲線に対し

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1698 年 10 月号 P.462

に長さの測れる別の曲線が見出せるのではないかと考え続けてきた。そしてそれは決して空しい期待ではなかった。これらの考えがつい最近ふたび私の念頭に浮かんだとき、次の重要な定理が自然と現れてきたからである。「任意の与えられた曲線について、その座標を x および y とするとき、次の座標 $x dy^3; dx^3$ および $3x dy^2: 2dx^2 - \frac{1}{2} \int (dy^2: dx)$ をもつ別の曲線を構成すれば、元の曲線と新たに得られた曲線の二つを合わせたものは、直線によって正確に測定可能となる。実際、与えられた曲線において、ある直線を、その曲線の横座標 x に対して、接線の長さの立方が副接線の長さの立方に対する比と等しくなるように取ると、その直線の長さは、二つの曲線の弧長の和に等しくなる。記号で書けば、与えられた曲線の微小要素を dt 、その全長を D 、生成された曲線の全長を G とすると、 $D+G = x dt^3: dx^3$ 。また注意すべきこととして、もし与えられた曲線が軸に対して凹であり、かつ dx を一定としたとき、 $3x ddy > dx dy$ が成り立つならば、この直線は二つの曲線の弧長の差にも等しくなる。」

ここに至るまで、いかなる経路で、またいかなる解析によってこの結果に到達したかを示す必要はない。その計算はあまりにも長大になってしまうからである。しかし、もし誰かがこの主張された内容の真理性を確かめたいと思うならば、それは最も適切に、合成的な方法によって行うことができる。構成によって与えられたこの直線を微分し、そこから得られるものを、生成曲線の微小要素と生成された曲線の微小要素との総和と比較すればよい。そうすれば、両者において等しさが成立することが見出されるであろう。ここから次のことが言える。与えられた曲線が代数曲線であろうと、あるいは一次の超越曲線であろうと、ただ $dy^2: dx$ が積分可能であるならば、そこから生成される曲線は常に代数曲線となる。 dx と dy の比は代数的に与えられるからである。さらにここから、これまで知られておらず、本世紀のまれなる発見の一つに数えられてよい事実が導かれる。任意の次数の放物線は、それ単独でも、あるいは別の次数の放物線と組み合わせても、完全に曲線の長さが分かるということである。単独で長さが分かるのは、放物線の指数 $= (1+2p): p$ という形で与えられる場合であり（ここで p は任意の整数を表す）、また他の放物線と組み合わせた場合には、一般にあらゆる場合において曲線の長さが分かることとなる。次数が n である放物線が与えられているとしよう。私は、この放物線が、指数が $(2n-1):(3n-2)$ である別の放物線と組み合わせられると、両者を合わせた弧長の長さ分かれると主張する。このことは、 n が分数であろうと、整数であろうと、無理数であろうと、有理数であろうと、正であろうと、負であろうと、どのような数であっても成り立つ。したがって、通常のアルキメデスの放物線（指数 $n=1/2$ ）に対しては、指数が $3/4$ である放物線が対応する。適用線の 4 乗（ y^4 ）が、横軸距離の 3 乗（ x^3 ）に比例する放物線である。しかし、この弧長の決定法については、私が別の個別的な方法によっても到達したものであり、古来あらゆる時代から称賛され続けてきたこの曲線に属する性質のうち、決して取るに足らぬものではないので、ここでより詳しく述べることにする。

（図 1） AB を通常放物線とする。点 B から法線 BI を引き、それが軸 AI と I で交わるものとする。さらに BI に垂直な IM を引き、それが直径 BM と M で交わるものとする。 IK を法線に等しく取る。次に、パラメータが放物線 AB の $3\frac{13}{81}$ 倍である 3 次・4 次放物線 AG を描く。そのとき、 $AH =$ （パラメータ、2 倍の IK と BK に対する第 3 比例）となるように AH を取り、 HG を対応する縦座標として立てる。すると、放物線部分 AG と AB から成る曲線 GAB の全長は、直線 IM に等しい。

さらに、これらの結果を、私が最初に発見した「与えられた比における放物線弧の分割」に関する研究と比較し、かつそれが去る6月（前節を参照）に公表されたものと照らし合わせるならば、そこでは同時に、私の方法を用いれば、通常の放物線の任意の与えられた弧に対して、同じ放物線上に別の弧を見出し、その二つの弧の差が分かるようになることを示唆しておいたのであるが、3次・4次放物線 AG の弧を、通常の放物線のある弧またはいくつかの弧と比較する方法も、簡単に明らかになるであろう。そこから、私の判断では決して軽んずべきでない新たな発見が生じるであろう。それは、もしそれが可能であるならば、放物線の長さを純粋な直線のみで測定するための、きわめて輝かしい導きを灯すものである。私は、弧 AG が、放物線 AB のある弧またはいくつかの弧と、代数的な比を持ちうることを見通しているからである。さて、もし誰かが、弧 AG が、単なるいくつかの弧と比較されるのではなく、放物線 AB そのものの弧と比較可能であることを示すならば、その者は実に大きな価値ある仕事を成し遂げるであろう。そのときには、長い間むなしく求められてきた放物線の弧長の長さと双曲線の求積とを、確実に得ることになるからである。実際、その場合には、ただそのときに初めて、発見された比に従って直線 IM を分割すればよく、そうして分割された結果、その一方の部分は弧 AG に、他方の部分は弧 AB に等しくなるのである。しかし、双曲線の求積が不可能であることが、ほとんど証明済みの事実として認められていること自体が、3次・4次放物線の弧が、通常の放物線の弧のうちのいくつかとは比較可能であるが、すべてとは比較可能ではない、ということの動かぬ証拠である。これはたしかに異例なことであるが、事実なのである。

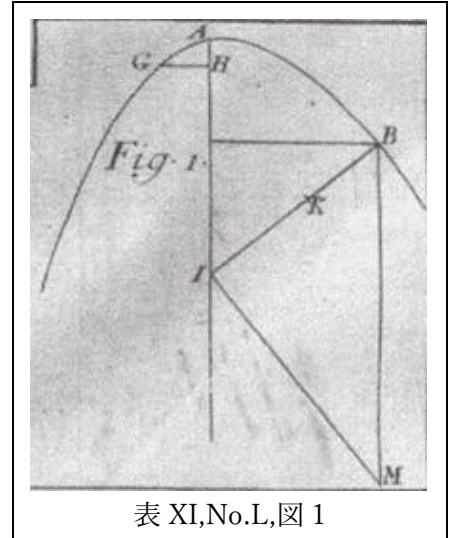


表 XI, No. I, 図 1

さらに進んで、生成曲線と生成された曲線とが同一の曲線になるように、指数 n をどのように取るべきかを探求するならば、 n を $(2n-1):(3n-2)$ に等しく置かなければならない。これを解くと $n = \frac{1}{3}$ が得られる。これは基本的な3次放物線であり、この曲線は自分自身と比較して曲線の長さ分かり、その中には差が曲線の長さ分かり二つの弧を指定することができる。ここにおいて我々は、ほとんど偶然のように、それ自体は本来曲線の長さ分かりこの最も有名な曲線に属する、きわめて優美な一つの性質に行き当たった。この発見は、かのエウラ (Heurat) によるもの、あるいはウォリス (WALLIS) が主張するところではネイル (Neile) によってなされ、初めて3次放物線が曲線の長さが測定されたあの有名な発見と比べても、その高貴さにおいて決して劣るどころか、発見の困難さという観点から評価するならば、はるか遠くそれを凌駕している。微小量法が世に広く知られるようになってからは、その発見はもはや卑近なものとなり、新しさを失ってしまったからである。それらの方法の中には、この2次的な3次放物線の長さが測定を、簡単な思考によって与えられることはない。しかし、このわれわれの基本曲線は、これまでその測定を求めてきたすべての幾何学者たちの汗と労苦をことごとく退けてきた後、ついに我々に対して、二つの弧の差の大きさを直線によって、代数的に決定できる形で与えられることになった。私は、ここに示したこの方法以外に、この事実の認識に到達する別の道があったとは思えない。私が自分の方法を隠したまま、同じ問題を他人に課題として提示することによって、つまらぬ虚栄心のための懸賞を望んだなら、私にはまことに絶好の機会があったであろう。しかし私は、私自身の利益よりも公共の利益を重んじ、この発見を何の躊躇もなく公表することを選んだ。以前に述べたよう

に、通常の円錐放物線についても私は同じことを行った。もっとも、後者の方は、双曲線に注意を向けるだけで自然に得られるものなので、今回の新しい結果に比べれば、私はほと

んど価値を認めていない。そこで、図2に示す基本3次放物線ABCを考え、その上に与えられた弧をBCとする。点B,Cから軸へそれぞれ垂線BF,CGを下ろす。さらに、AFの140倍と放物線のパラメータとの第3比例に等しくなるようにAIを取り、また $AG:AF=AI:AH$ 、となるように点Hを定める。点I,Hから下ろした垂線IE,HDは、放物線の弧DEを切り取り、この弧を弧BCから取り除くことで、求める弧の差が得られる。この弧の差を直線量として求めるには、次の作図を行う。点C,Bにおける接線CP,BKを引き、それら

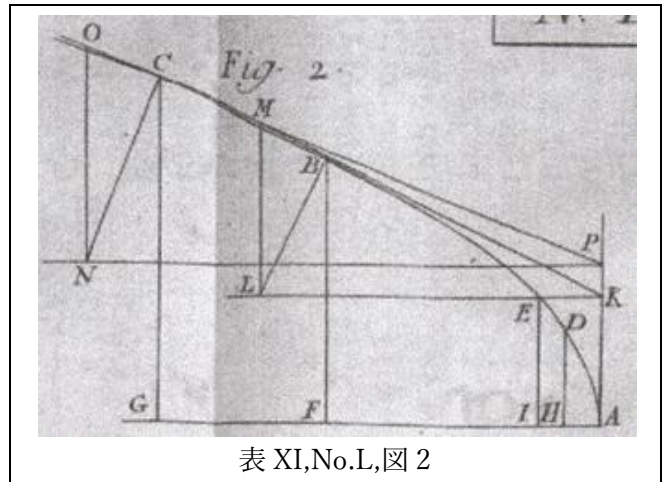


表 XI, No. L, 図 2

を頂点Aから軸へ下ろした法線APと交わらせて、交点をそれぞれP,Kとする。そこから軸に平行な直線PN,KLを引き、それらが放物線の法線CN,BLと交わる点をそれぞれN,Lとする。次に、点N,Lから垂線NO,LMを立て、それらを延長した接線と交わらせて点O,Mを得る。このとき、直線OPと直線MKの差は、放物線の弧CBと弧EDの差に等しい。

No. L I

第 I 節

ヤコブ・ベルヌーイ

無限個のサイクロイドに関する問題に対する無限小量を用いない幾何学的証明。

さらに、1697年5月に彼自身が提示した、この問題に類する諸問題の作図も付されている。

1696年の終わり頃、私の「最速降下曲線の問題」の解法、それがサイクロイドであることは、今やすべての人に知られているが、ライプツィヒで出版準備していたとき、私の心に、これと素材の点では確かに類似しているが、最大・最小の方法の適用という点ではまったく異なる、もう一つの問題

が浮かんた。それは、無限に存在するサイクロイドの中で、重い物体がある与えられた位置の直線に、最も速く到達するのはどのサイクロイドであるか、という問題である。そして、サイクロイドの相似性を考察することから、この問題の解へ至る道が直ちに開けるのが私には見えていた。さらにそこから、同じ操作法が、他のあらゆる相似な曲線についても同様に成立することに気づいた。それは、最速降下だけに限らず、曲線に関する他の非常に多くの問題にも適用できるのである。たとえば、無限にある相似曲線の中から、共通の始点とある与えられた位置の直線との間に切り取られる長さ、あるいは弧、あるいは面積、あるいは弧を回転して得られる回転面、あるいはその空間回転によって生じる立体が最小となる曲線はどれか、といった問題である。こうした問題は、実用的であるばかりか、きわめて美しいものでもあるので、私はこれを公開問題として提出し、他の人々にもこの考察に取り組んでもらい、私とともに解の探究に参加してもらおうと決めた。そこで私は、フレトリスがその告示文の中

(No.XXXIIIを参照)で、最速降下曲線の問題にいくつかの補助的な問題を付け加えていたのなら

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1697年5月号 P.223

い、私自身の主要問題である「等周図形の問題」を提示する際に、これに対応させて、この第2の補助的問題を付け加えた。しかしその提示は、わずか2語で、しかもごく単純な場合（垂直直線の場合）に限定し、しかも言及した曲線はサイクロイド、円、放物線だけにとどめ、相似曲線という語も意図的に伏せておいた。それは、一つの問題を解ける者は、すべての問題についても同様に解けると確信していたからでもあり、また同時に、解法の根本原理をあまりに露骨に与えてしまわないためでもあった。しかし事実として、兄だけでなく、高名なる人物ロピタル侯爵もまたこの問題の奥義を見事に洞察し、この問題のみならず、その機会に兄が1697年8月にフランスの学術誌に提出した他の諸問題についても、解答を示し、それを最近のActa Eruditorumの1月号（No.XXXIXを参照）に公表したのである。そこで私は、同じことを繰り返す（＝すでに行われたことを再び述べる）ことも避けたいし、かといって、正当に全体を自分のものとすることもできたにもかかわらず、まったく何の発見も示さないということにもしたくないので、あの高名なる人物と私の兄とによってまだ手を付けられていない部分だけを、簡潔に取り上げることにする。そしてまず第一に、私がサイクロイドについて提出した問題の総合的証明を、無限小の助けを借りずに、この種の計算法を知らない人々、あるいはそれを認めない人々のために示すつもりである。それは、次の二つの一般に知られた補題のみを前提として行う。I、円弧は、その正弦に対して、より大きい弧ほど、より大きい比を持つ。II、接線は、その対応する弧よりも常に長い。

命題、もし同じ水平な基線ARの上に二つのサイクロイドAFCとABPが描かれており、そのうち一方AFCが、与えられた垂線ZBを点Cにおいて直角に横切っているとする。そして共通の出発点Aから、二つの重りをそれぞれの曲線に沿って落下させるならば、AFCに沿って降下する重りの方が、より短い時間でその垂線に到達する。

証明、二つのサイクロイドの軸をZC,RPとし、それらの生成半円をZLC,RTPとする。そのうちZLCは半径GLによって二つの象限に分けられているとする。またAR,AZ,AHを連続比例に取り、さらに図のとおり、直線HF（垂直線）、FDS,CI,BE（底辺に平行な線）を引き、加えてZDIと、それに平行なFMを引く。するとARとAZ、AZとAH、RPとZC、RTEとZLDは、互いに相似なサイクロイドの部分となり、比例関係にある。ゆえに……

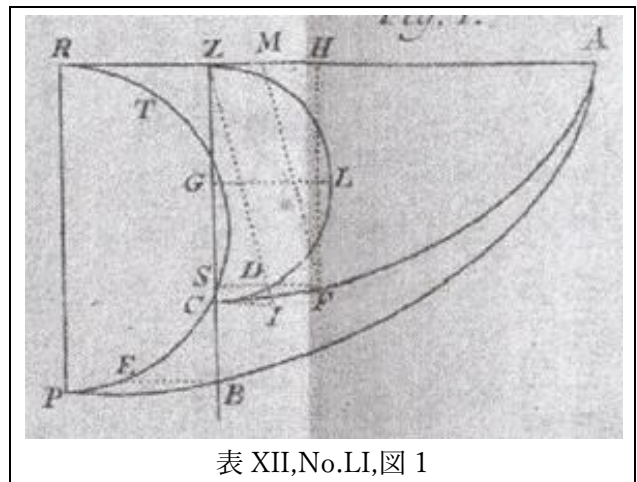


表 XII, No. LI, 図 1

1. **仮定**、 $AR > AZ$ とする。すると $LD:GS < (\text{補題 I より}) LZ:GZ$ 、よって比の入れ替えにより $LD:LZ < GS:GZ$ 、さらに合成して $DLZ:LZ < SZ:GZ$ 。その結果の各項を2倍すると $DLZ:CLZ < SZ:CZ = SD:CI < (\text{補題 II より}) SD:CD$ 。したがって逆比・置換により $CLZ:CD > DLZ:SD$ 、さらに変換して $CLZ:DLZ < DLZ:(DLZ - SD)$ 。これはサイクロイドの性質から $AZ:AM < AM:AH$ を意味する。よって $\sqrt{AZ}:\sqrt{AH} (= \sqrt{RP}:\sqrt{CZ}) < AM (= DLZ) : AH = ETR:AZ = ETR:CLZ$ 。ゆえに $ETR:\sqrt{RP} > CLZ:\sqrt{CZ}$ 。これらの量は、線ABを通る降下時間と線ACを通る降下時間と同様の関係にある。このことは、ホイヘンスが「振り子論」において証明しており、また近頃では著名なるロピタル

侯も同じ事実を採用している。したがって、AB を通る時間は AC を通る時間よりも大きい。(証明終わり)

2. 仮定、もし $AR < AZ$ ならば、 $ZM = FD = CD > DS = HM$ である。したがって、この場合には $AH > AZ$ となるので、 AM は AZ と AH の算術平均よりも大きく、幾何平均よりも大きい。ゆえに、ただちに各項そのものにおいて $AZ:AM < AM:AH$ が成り立つ。このことから、前と同様に他の結果が導かれる。

ところで私は一般に、次のことを観察していた。無数に存在する相似曲線の中から、ある目的の関数を最もよく達成する曲線を求めるようなあらゆる問題において、その解が二つの曲線の交点によって決定される場合、その2曲線のうち一方は、私が関数の線と呼ぶもの、あるときは力学的、あるときは代数的な曲線であり、他方は常に代数的な曲線である、ということである。そして、この代数的曲線の役割は、常に直線によって果たすことができる。その場合、もう一方の曲線は、多くの場合関数の線とは異なるものであるが、それでもなおその描写は関数の線の記述に依存している。さらに最後に、これら二つの曲線はいずれも、与えられた相似曲線族のある曲線に対して、その縦座標が互いに平行になったり、接線となったり、垂直線となったり、あるいはその他の何らかの仕方で対応づけられるように配置することができる。以下に例を挙げる。

I、点 A を通り、かつ中心を水平線 AB 上にもつ円の中から、点 A から与えられた垂直線へ降下するとき、その降下が最も速くなるような円を一つ作る。

作図、半円 AQB が与えられており、それは二つの四分円 ANC, BNC に分割されているものとする。その円周上に任意の点 Q を取る。点 Q から直線 QP, QB を引く。そのうち QP は半径 NC に平行であり、QB は NC の T において交わる。そして関数曲線 ASX を次のように定める。この線の縦座標 PS が、AQ に沿った降下時間を表すようにするのである。そのために、円の直径 AB の上にレムニスケート曲線の 4 分の 1 ARB を立てる（ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の 1694 年 P.337 および 1695 年 P.143 を参照、No.XIX の曲線 AMONA）。その結節点は A であり、そこから曲線に向かって引かれる直線 AR は、AB と 2PQ との間の平均比例になるように取る。そして PS を、円の左四分円に対しては弧 AR に等しく、右 4 分円に対しては弧 ARB+BR に等しく取る。次に代数曲線 AVX を作る。その縦座標 PV の 4 乗が、直線 AR・AB・および 2NT に比例するようにする。この曲線は先の曲線とある点 X で交わるだろう。その点 X から AB に下ろした垂線 XM を取れば、AM が AB に対する比は、物体が放たれる点から与えられた垂線までの距離が、求める円の直径に対する比と等しくなる。

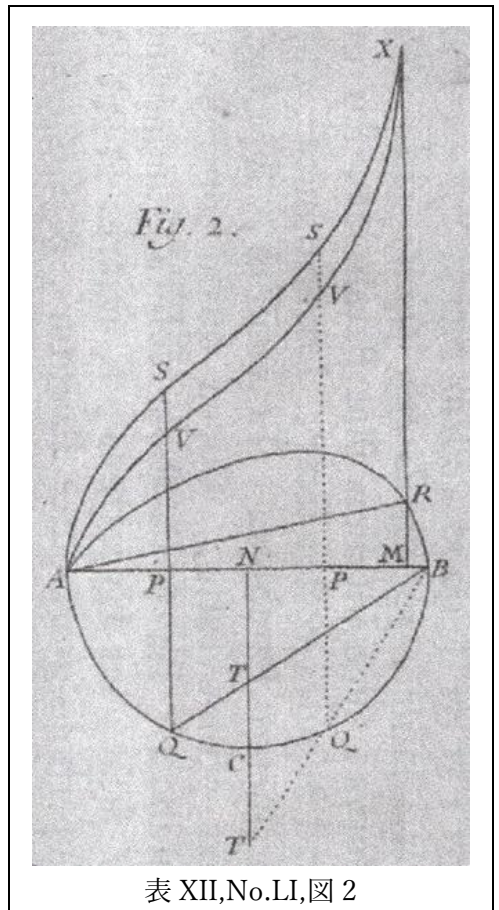


表 XII, No. LI, 図 2

Ⅱ、前と同じ条件を仮定して、点 A と与えられた垂直線との間に挟まれた円弧が最小となるような円を作る。

作図、関数の線、正弦線 ASX を作る。その線上で常に $PS = \text{弧 } AQ$ となるように取る。次に代数曲線 AVX を、 $PV = NT$ となるように描く。これら二つの曲線はある点 X で交わる。その交点 X から AB に

垂線 XM を下ろせば、先と同様に、AM:AB は、「点 A から与えられた垂直線までの距離:求める円の直径」に等しくなる。ただし、この問題は、ある意味では、関数の線のみによって、より簡単に作図できることに注意すること。この関数線の縦座標を、与えられた曲線の接線へ射影すればよい。これについては、下にある「6つの兄弟問題の解答」における一般構成を見ること。

Ⅲ、無数の相似な曲線で、すべて点 A および共通の軸 AC のまわりに同様に配置されたものの中で、そのうち一つ AB が与えられているとする。それらの中から、点 D において与えられた直線 DE と所定の姿勢で交わる別の曲線 AD を見出せ。その点 D から軸へ垂線 DM を下したとき、

- (1) 平面領域 ADM
- (2) その曲線を軸のまわりに回転して得られる曲面
- (3) その領域を軸のまわりに回転して得られる立体
- (1) (2) (3) いずれかの条件で、最大または最小となるようにする。

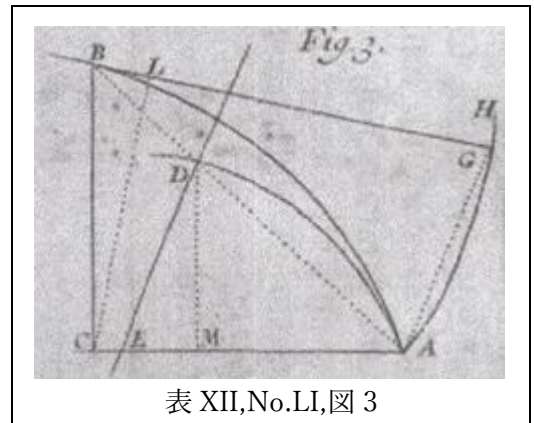


表 XII, No. LI, 図 3

作図、与えられた曲線 AB 上に任意の点 B を取る。点 B において接線 BG を引き、軸に垂直な線 BC を下ろし、さらにそこから接線 BG に垂直な線 CL を引く。

第 1 問題（平面領域 ABC）の関数値は $\frac{1}{2} 2CL$ によって与えられる。

第 2 問題（曲線 AB を回転して得られる回転楕円体の表面積）の関数値は半径 BC の半円周によって与えられる。

第 3 問題（領域 ABC を回転して得られる立体の体積）の関数値は、その半円周と CL の $\frac{1}{3}$ を底辺とする長方形によって与えられる。

これらの商に等しい長さを、常に接線 BG 上に切り取る。その切り取った点 G は、直線 AG が与えられた直線 DE と平行になるような曲線 AGH 上にある。点 G から与えられた曲線 AB に接線 GB を引き、接点を B とする。そして AB を結ぶ直線が与えられた直線 DE と D で交わるように取れ。こうして得られた曲線 AD は AB に相似である。これが求める曲線である。

第 II 節

1697 年 8 月 26 日の「フランス学術通信」(No. XXXIX を参照)
に提出された「6つの兄弟問題」の解答。

問題 I、与えられた円錐面、または回転楕円面、たとえば放物回転面の表面上において、与えられた 2 点の間に、その表面上で引き得るすべての線の中で最も短い線を、幾何学的に作図。

同書 P.226

解答、まず「幾何学的に」という語に含まれる曖昧さに注意しなければならない。この曖昧さこそが、疑いなく、ロピタル侯爵が 1 月号の Acta (学報) に掲載した自らの解答において、この問題を完全に無視した原因であった。もしこの「幾何学的に」という語が、曲線上のすべての点を、通常の数、代数量のみを用いて無限に求め尽くすような構成を要求するのであれば、この問題は、円錐や円柱そのものにおいても、その他の円錐面・回転楕円面においてと同様に、少しも簡単ではなく、むしろ不可能である。しかしもし、その構成において、超越量、つまり求積量（面積として得られる量）を使用するこ

とが許される幾何学的構成を認めるならば、偉大なるライプニッツ博士自身も賛同しているところであり、それらは幾何量と呼ばれるに値して少しも劣らないのであるが、その場合、この問題は、円錐や円柱においても、他のすべての円錐面・回転楕円面においても、同様にきわめて簡単な問題となる。任意の曲線 ABC を考え、その接線だけが与えられているものとする。

その底辺 $CD = a$ とし、底辺に平行なある適当な縦線 $BG = c$ とし、さらにもう一つの、まだ定まっていない縦線 $MN = x$ とし、点 M における接線 $ME = t$ (これは x によって与えられるものとする) とする。さて曲線 ABC を軸 AD のまわりに回転させると、回転面 ABCFDA ができる。その極は A、子午線は ABC、赤道は CF、そしてそれに平行で点 M を通るものが MH である。つぎに、赤道の弧を $CF = \int (actdx : xx\sqrt{xx - cc})$ と取る。点 F を通って子午線 AHF を引くと、これは点 M を通る平行線 MH と、ある点 H において交わる。この H は、ある曲線 BH 上の点であって、その曲線 BH は、この回転面上で、同じ二点の間に引かれ得るすべての曲線の中で、常に最短である。また曲線 BH の長さは $\int (tdx : \sqrt{xx - cc})$ である。

円錐への構成法の適用、直角三角形 ACD を脚 AD のまわりに回転させて円錐 ACFD を作るものとする。この三角形を別に直線 GD 上に置き、中心 C、半径 CA で円の四分円弧 KIG を描き、

より小さい半径 CD で円 PRQ を描く。次に円錐の側面 AC 上に任意の点 B を取り、線分 AB を CS 上へ移し、CK に平行な直線 SL を引き、CD に平行な直線 KL と交わる点を L とする。そして点 L を通り、漸近線 CD, CK をもつ双曲線 LO を描く。こうして得られた双曲線上の任意の点 O から二本の直線 OI, OT を引き、それぞれ漸近線に平行とする。そのうち OI は 4 分円 KIG を I で切り、OT は円錐の側面 AC を T で切る。次

に、小円 PRQ の円周、円錐の底円 CF に等しい弧を 4 分円弧 KI の両側に切り取る (時には一周以上に及ぶ)。最後に、円錐側面で点 F を通る母線上に $AH = CT$ となるよう点 H を取る。すると H が求める曲線 BH 上の点となる。この曲線の長さは $BH = \sqrt{CT^2 - CS^2}$ であり、したがってこの曲線はいかなる円錐曲線 (放物線・楕円・双曲線) でもない。なぜならそれらはどれも弧長を正確に求めることができないからである。この曲線全体は、蛇が円錐を巻きつくように円錐の表面を取り巻き、曲線の最上点 B から両側に等距離の二本の円錐母線をその漸近線としてもつ。また、ある場合には一つだけの漸近線をもつこともある。それは曲線が円錐の表面を何度も正確に一周する場合であり、側面 AC が底半径 DC の 2 倍のとき 1 周、4 倍のとき 2 周、6 倍のとき 3 周、……、と周回数が増加する。さらに、曲線

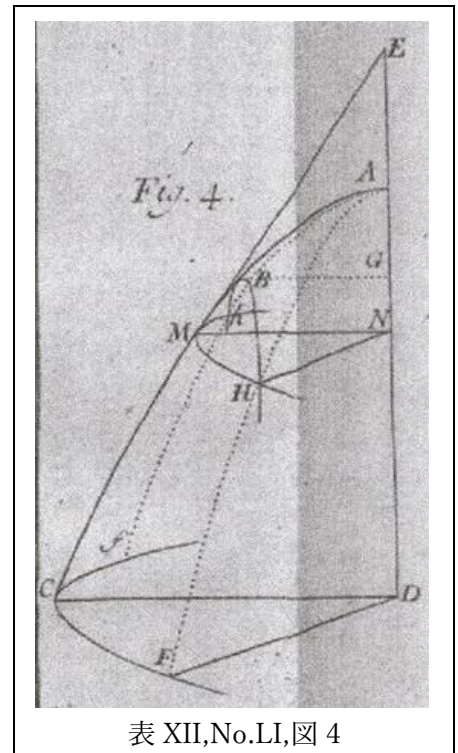


表 XII, No. LI, 図 4

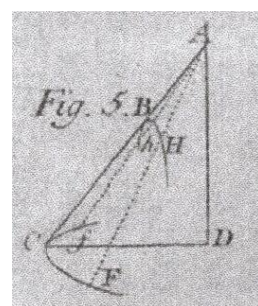


表 XII, No. LI, 図 5

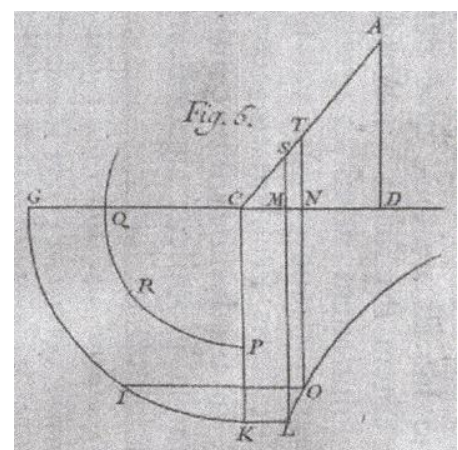


表 XII, No. LI, 図 6

の最上点 B を、円錐の側面上のどこに取るか、つまり頂点により近く取るか、より遠く取るか、あるいは別の側面を取るか、を調整することによって、この曲線が任意の二つの与えられた点を通るように簡単に構成することができる。

注、この構成法では、互いに大きさの異なる二つの円 KG と PQ から、等しい弧 KI と PR を切り取ることを要求している。これは、ある角を与えられた比で分割することを前提としている。ところが、この作業は一般には超越量を用いなければ実行できない。したがって、私が述べた通り、この曲線は幾何学的（代数的）には記述不可能であることが明らかである。円柱面の場合には、曲線上の点は弧の連続的 2 等分によって見つけることができるが、曲線のすべての点を一般的に求めるには、弧の与えられた比での分割、あるいは弧の長さの正確な測定が必要になる。

以上で第 1 の問題について述べるべきことは十分である。その他の点については、先に賞賛したあの偉大なる人物、ロピタル侯爵が、去る 1 月に完全かつ優雅な解答を与えてくれた。しかし私は、この問題は兄によって、もう少し一般的な形で提起することもできたはずだと考えるので、以下の形に整えて提示し、そして解決する。

問題Ⅱ・Ⅲ、軸 ET 上に、無数の曲線 BL, BF が載っているものとする。それらの縦座標 ML, MF が、常に互いに一定の比を保つような曲線であるとする。そして、これらの曲線から切り取られる領域 BLM と BCD が、互いにも、また与えられたある面積にも等しくなるような、別の曲線 CL があるとする。そこで、曲線 CL の性質とは？その曲線の接線の引き方はどのように定まるか？その曲線上で、任意に与えられた点に最も近い点はどこか？

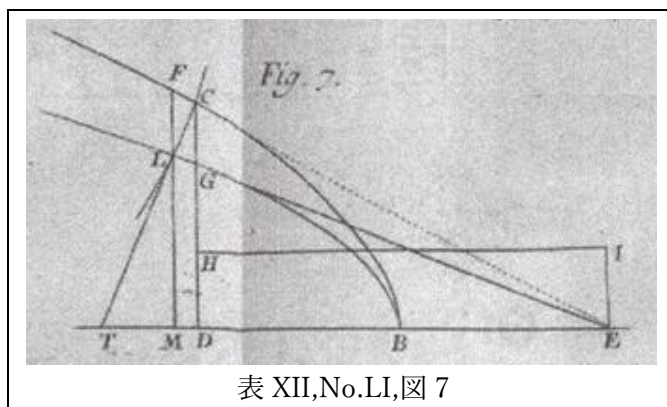


表 XII, No. LI, 図 7

解答、無数に存在する曲線のうちの一つ BL が与えられているとする。また曲線 CL 上の任意の点 C が与えられているとする。その点 C から軸へ下ろした垂線 CD を引き、それが与えられた曲線 BL と G において交わるとする。その点 G において接線 GE を引く。そして DE の上に、面積 BCD に等しい長方形 EH を作る。さらに $CH:HD = DE:DT$ となるように点 H を取る。そのとき、C と T を結んだ直線 CT は、点 C において曲線 CL に接するだろう。

注、接線を引く方法が分かれば、曲線の本性は隠れようがない。この問題は、1695 年 12 月（ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の P.543）により一般的な形で構想されたベオーニアン問題の場合へと還元することができ、対数曲線によって作図可能である。1696 年 7 月（ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の P. 332）により、曲線 CL 上で点 B に最も近い点がどれであるかについては、ある非常に卓越した人物が一般的に示しており、それはどんな与えられた他の点に対しても、簡単に適用することができる。

問題Ⅳ・Ⅴ、同一の図において、BC と BL を、無限に存在する相似曲線、同一種の曲線であるとする。これらから曲線 CL が、弧 BC および弧 BL に等しい弧を切り取るものとする。求めるのは曲線 CL の性質、点 C におけるその接線、および与えられた任意の点に最も近い曲線上の点。

解答、兄は放物線について例を挙げている。これに対して、しばしば称賛されるロピタル侯爵は次のように満足な答えを与えている。点 C を通って放物線 BC を引き、その接線を CE とすると、比例関係

$CE - BC : BC = BD : BT$ が成り立つようにするのである。さらに私は付け加えるが、この比例において BD を BE に置き換えるならば、この作図法は一般にすべての相似な曲線に拡張される。その結果、比の合成によって、常に $BE : BC = ET : BT$ が成り立つ。同様に、もし曲線 CL が、相似な曲線群から等しい面積 BCD, BLM を切り取るような曲線であると仮定すると、 $\Delta CDE : BCD = ET : BT$ という関係が得られる。これらの定理は観察されるに値する。曲線 CL の性質、およびその上で、ある与えられた点に最も近い点については、前節と同じことが成立する。

問題Ⅵ、同一の点 A のまわりに、同じ相似形で配置された無数の相似曲線 BH, DL があるとする。それらを、位置が与えられている 2 直線 AH, ED が横切り、そのうちの一つ AH は点 A を通過するものとする。この二直線によって切り取られる曲線の弧の最大値または最小値を求めよ。

解答、相似曲線の一つ BH が、位置の与えられた直線 AH を H で切っているとする。また、もう一つの位置の与えられた直線 ED に平行な直線 AG を、点 A を通って引く。曲線 HB を、点 H を出発点として展開し、糸をほどくようにたどらせ、その展開によって生じる曲線 HG が直線 AG を G で切るとする。このとき、糸が点 G を描いているときの糸の位置 GB は、点 B における曲線の接線となる。 A と B を結んで AB を引き、直線 ED と D で交わせ、さらに D を通って、 BH に相似な曲線の部分 DL を描くと、その弧 DL が、直線 AH, ED によって切り取られるすべての弧の中で最大または最小となる。

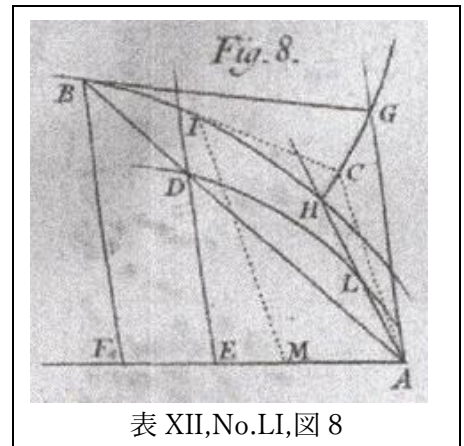


表 XII, No. LI, 図 8

系、ここから、これまで私の知る限りでは考察されたことのない、進化曲線のきわめて重要な用途が明らかになる。任意の曲線 HB があり、その進化によって曲線 HG が描かれ、そのときのほどかれる糸が BG であるとする。さらに、点 H と G からそれぞれ直線 HA, GA を引き、それらが任意の点 A で交わるものとし、また、点 B を通ってそれらに平行な無限直線 BF を引くとき、その進化の元の曲線 BH は、同じ点 A のまわりに同様に配置され、かつ直線 AH と BF によって切り取られるすべての曲線の中で、最大または最小のものとなる。さらにそれだけではなく、もし進化曲線 HG 上の任意の別の点 C を取ると、その点を描いているときのほどかれた糸 IC が元の曲線 BH において点 I で接しており、また点 I から、 CA に平行な直線 IM を引くとき、そのときの弧 BI は、直線 IM と BF によって切り取られるすべての弧の中で最大または最小となる。

第Ⅲ節

兄の問題の解が、Acta Eruditorum の 1697 年 5 月号 P. 211 (No. XXXVII. P123-124 を参照) に提示されている。

無数の対数曲線を直角に横切る曲線についての問題

与えられた位置に規則正しく並ぶ無数の直線すべてに接する曲線を求める問題は、すでに 1694 年 10 月 (ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の P.391) に解決

同書 P.231

して与えた。ここでの問題は、それらすべてを直角に横切るような曲線についてである。しかしこの問題は、接線法の逆問題 (微分方程式の問題) に依存しており、一般解をまったく許さない。そして、与えられた直線の配置の違いによって、驚くほど多様な様相を呈する。また、曲線の次数や種類は、この

問題の簡単さ・困難さを示す指標ではない。なぜなら、代数曲線ではしばしば困難で、逆に超越曲線では簡単であることも珍しくないからである。

代数曲線でも超越曲線でも、解が簡単に得られる実例を挙げる

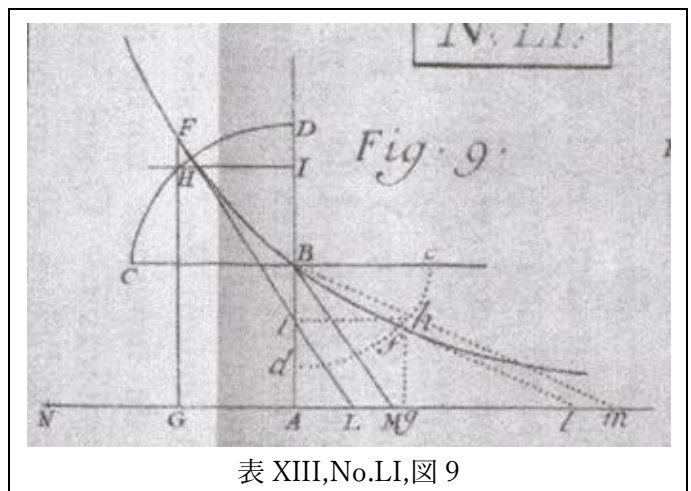
例Ⅰ、もし同じ軸上に、パラメータが等しく、頂点だけが異なる無数の放物線が置かれているか、あるいは無数の放物線のうちのひとつが、その平面上で押し動かされ、その各点が軸に平行な直線を描くように動かされているとすると、それらの放物線は、運動している一つの放物線を、常に直角に横切る曲線是对数曲線であり、そのサブタンジェントは放物線の半パラメータに等しい。また逆に、そのような方法で対数曲線を軸に沿って動かすと、それを常に直角に切る曲線は放物線である。同様に、3次放物線を軸に沿って動かせば、それを直角に切る曲線は双曲線であり、より高次の放物線は、より高次の双曲線によって順次直角に切られ、そして逆も成り立つ、等々。

例Ⅱ、もし同一のパラメータをもつ無数の放物線が、互いに平行な軸をもち、しかもその頂点がそれらの軸に垂直な一直線上に並んでいるならば、あるいは、放物線がその各点が軸に垂直な直線を描くように運動するならば、そのように運動する放物線群を常に直交して切る曲線は、第2種3次放物線であり、その準線長は、元の放物線のパラメータに対して9:16の比をもつ。もし他の放物面も同様に運動すれば、それらもまた別の放物面によって同様に直交的に切られ、またその逆も成り立つ、等々。

例Ⅲ、もし同一の次数（その指数を m とする）をもつ無数の放物面、ただしその準線長は互いに異なり、同一の軸と同一の頂点のまわりに配置されているならば、それらすべてを常に直交して横切る曲線は、常に楕円となる。その楕円の中心は共通の頂点にあり、長軸はその共通の軸の上であり、しかもその長軸と準線長との比は $1:m$ である。

例Ⅳ、もし同一のサブタンジェントをもつ無数の対数曲線が、互いに平行なそれぞれの軸の上に存在し、しかもそれらがすべて共通の一点 B を通過するとするならば、それらすべてを常に直交して横切る曲線とは？

作図、対数曲線のうちのひとつ Fb が、その軸 AG とともに与えられているとし、その軸に垂線 BA を下ろす。そして対数曲線上の任意の点 F を取る。点 F から軸に垂線 FG を下ろし、また接線 FL を引き、さらにその接線に平行に直線 BM を引く。さらに、対数曲線の軸から遠い



側において、軸上に任意の長さの直線 AN を取る。ただしその長さは、サブタンジェント GL よりも大きくしておく。そして、サブタンジェントの2倍と、 NG が AM を超える超過分との差との中比例を取り、それに等しい長さを、直線 BA 上に BI として、上向きまたは下向きに取る（これは点 F が B の上にあるか下にあるかによって決める）。最後に、点 I から軸に平行な直線 Ih を引き、それが垂線 GF と交わる点を H とすれば、点 H は求める曲線 CHD 上の点である。この曲線と相似かつ等しい曲線は、互いに交差する直線 BA, BC のなす他の角度においても同様に作図できる。

注、求める曲線の最大の高さ BD は $BD = \sqrt{(2GL \times (AN - GL))}$ である。もし $GM = AN$ ならば、直線 Ih は BC 上になり、そしてそのときに曲線の最大の横幅となる。

例Ⅴ、最後に問う。(これは兄フラテル (Fratris) の特別な例であるが) 同一の軸の上にあり、しかも同一の点を通るすべての対数曲線を、常に直角で横切る直線とは？

作図、共通の軸を Am 、対数曲線どうしの交点を B とし、そのうちの一つの対数曲線を FBf とする。軸へ垂線 BA を下ろし、対数曲線上の任意の点 F を取る。点 F を通り、直線 FT 、 FN を引き、これらが直線 BA とそれぞれ T 、 N で交わるようにする。そのうち FT は軸に平行にし、 FN は対数曲線に接するようにする。(さらに、もし点 N が点 T より下にあるならば、 T の上方に、長さ TN に等しい部分を取り加える。) こうして得た直径 AN 、 $AT+TN$ をもって半円 APN を描き、これと直線 FT の交点を P とする。つぎに任意の定数 L を取り、点 T から直線 BA 上に $TR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}TA^2 \pm L^2\right)}$ を取って点 R を定め、

R と P を結ぶ。(あるいは、もし点 T が点 B より上にある場合には、 TR を直径とする半円を描き、そこへ先に LP を当て、最後に RP を結ぶ。) ついで直線 FT 上に、点 T から両側へ等しい長さ TS 、 TS を取ると、それらの点 S, S は、点 B のまわりに配置されたすべての対数曲線を直角に横切る、求める曲線 $mCMCm$ 上の点となる。

注、もし $TR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}TA^2 + L^2\right)}$ と取れば、求める曲線は軸と点 m において交わり、その結果

$Am = L$ となる。しかし、もし $TR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}TA^2 - L^2\right)}$ と取れば、曲線は点 A と B の間を通過し、軸には到達しない。曲線の最大の横幅 BC は $BC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}BA^2 \pm L^2\right)}$ である。

これらすべての解法はきわめて簡単であった。しかし、曲線の配置のしかたには他にもさまざまな場合があり、それらはこの問題をより困難なものにし、場合によっては、単純な放物線についてでさえ、いまだ十分に探究されていない「逆接線法」の問題へと導く。たとえば、同一の軸の上に描かれ、各放物線の準線長が、それぞれの頂点からある固定点までの距離に等しいような放物線を直角に横切る曲線を求める、というような問題である。さらに、次の問題も付け加える。ある放物線または他の与えられた曲線が、その平面内である定まった点のまわりに回転して円を描くとき、常にある与えられた角度で交わる曲線を求めよ、という問題である。たとえば、直線がその一端のまわりに回転するとき、直角で交わる曲線は円であり、斜めの角度で交わる曲線は対数螺旋であることが知られている。

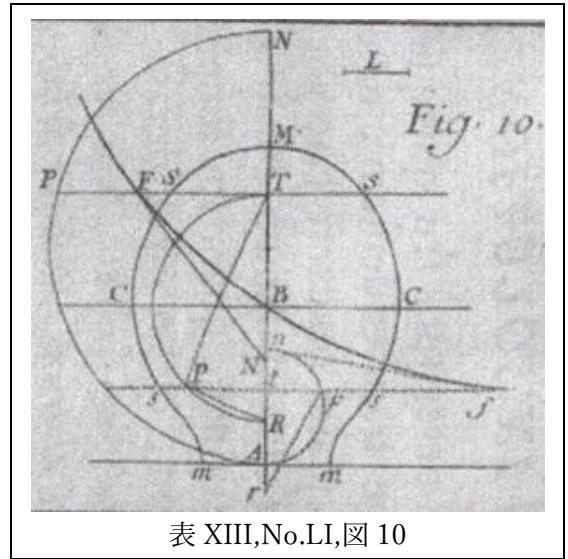


表 XIII, No. LI, 図 10

No. LII

ヨハン・ベルヌーイによる注釈

先の Acta Eruditorum の 5 月号に掲載された、彼の兄のいくつかの問題の解答に対する注釈

私が折に触れて学者たちに問題を提示するのは、決して他人の能力を試すためではない。ただひとえに、才能が刺激され、学問が新たな発展を遂げることを願っているからである。そのため、とりわけ人々の解答が公に示され、それが私自身の考えと一致しているのを見出すとき、私は大きな喜びを

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1698 年 10 月号 P.466

覚えるのである。私がかつて、一部は本誌に、また一部は「パリ学報」において提示した諸問題のうち、ようやく今月号の Acta Eruditorum において、いくつかが兄によって解かれた形で公表された。それら兄の解答が私の解答と一致していることを見て、私は少なからぬ喜びを覚えた。もしそれらが一般的な形においても私のものと一致していたならば、その喜びは完全なものとなっていたであろう。それゆえ、ここにおいて私は、できる限りの慎みをもって、兄の解答が全面的に完成されたものとなるために、なお何が不足しているかを簡潔に述べておこうと思う。

実際、P.227 (No.LII,P.166-167 を参照) において彼は「無数のサイクロイドに関する問題」の幾何学的証明を提示している。しかしそれは、与えられた直線が垂直であるという、ただ最も単純な場合についてのみである。私は本来、任意の与えられた直線の配置に対して、曲線に対してさえ、私のものと同様な一般的解法を提示してほしかったのである。その解法において私は、単に一点から一点への最短経路がサイクロイドであることだけでなく、同時に一点から線への降下が、その線が垂直線に限られず、直線に限られず、どのような曲線であっても、最短降下、あるいは場合によっては最長降下でさえ、与えられた線に垂直なサイクロイドによって行われることを、簡潔・明瞭に、そして総合的に証明している。この解法は、私がそれを伝えたすべての人々から、非常に高く賞賛され、承認された。さらにごく最近では、ハーグにあるブラバント高等法院の議長である、きわめて高位にして高貴なるディール・クエンス卿、きわめて鋭い判断力を持ち、学問において最も通曉した人物が、同じく数学的才能に富む高貴なる息子とともに、彼ら自身の書簡によって私にその評価を伝えてくれたことを、私は少なからぬ喜びとともに知ったのである。しかし、この私の幾何学的証明は、ガリレオの仮説においてのみならず、その他あらゆる仮説においても成立するものであり、本来ならばその時点ですぐに公表されていたであろう。だが、私はあの名高いライプニッツの勧めによって、それをなおも公表せずに留めていたのである。これはすでに他の箇所でも述べたと記憶している。私が「最速降下問題」に取り組んだその時点で、すでにこの証明を私は完成させていたからである。

さて、本当に兄がこの問題を提示した当時、与えられた直線への最速降下を、サイクロイドだけでなく、すべての相似曲線について決定できた、あるいは少なくともその能力を有していたのだとすれば、私はあの彼の言葉の真意をぜひ知りたい。彼が次のように言っているあの箇所である。「最大・最小の方法を発展させようとする者が試みるであろう。我々としては、問題を提示しただけで十分である。」この言葉はいったい何を意味しているのか、私はどうしても知りたいのである。円や放物線について語りながら、これらもまた明らかに相似曲線であるのだが、「問題を提示しただけで十分だ」と言う者は、それは結局「自分は解いていない」と言っているのと同じである。むしろ、困難さに半ば脅かされて、試みることにすらしなかったと言っているに等しい。ともあれ、もし相似でない曲線についても解いてみせていたならば、はるかに偉大な業績であったであろう。試してみるがよい、そうすればその困難

の巨大さがわかるであろう。たとえ同一の軸上に作られた楕円だけの場合でさえもそうなのだ。これはすでに私は「ある人物」に提示した問題である。私の解法は、そこまで到達している。そして彼は、証明もなしに付け加えている残り二つの例を、円や相似曲線から、あらゆる相似でない曲線へと拡張しようとするれば、この問題がいかに手強い難問であるかを痛感するであろう。

さて、ここから私は、1697年8月号のフランス学術誌 *Journal des Sçavans* (No.XXXIX を参照) において私が提示した諸問題の解答へと話を移す。

まず、兄はただちに幾何的という語の曖昧さを非難している。しかし今や、私だけでなく、きわめて鋭敏なライブニッツにとっても、さらには兄自身にとっても、幾何的であるとは、幾何学の法則に従って行われるすべてのもの、代数方程式であれ超越方程式であれ、何らかの方程式によって決定し得るすべてのものを意味する、ということは誰もが知っていることである。私は、この幾何的という語をまったく省いてもよかったことは認める。その意味はそれだけで十分に含意されているからである。しかし私はそれをあえて付け加えたのである。それは、きわめて単純で、きわめて一般的で、しかもきわめて簡単な、ある一つの作図法を同時に排除するためであった。私はそれが存在し得ることを予見していたが、しかしそれは機械的な方法である。ある与えられた一点から別の一点へ、凸曲面の上に糸を張り渡し、それを強く引き締めることである。この方法によって、糸は両点のあいだで最短の位置を取るからである。それゆえ私は、機械的なものを最初から排除することによって、曖昧さを避けようとしたのであって、曖昧さをわざと作り出そうとしたなどということは、まったくなかった。このことから兄は考えるがよい。あの言及された曖昧さのために、あたかもロピタル侯爵がこの問題を軽視したかのよう、に、甘ったるい言葉遣い、これは高潔な人物たちにはほとんど喜ばれないものなので、用いるよりもむしろだまっていた方が、かえって最も高貴なるロピタル侯爵にとって、より好ましい態度であったのではないか。ロピタル侯爵自身が、この問題を軽視したなどとは決して言うまい。むしろ、彼はこの問題にきわめて熱心に取り組んだのであり、彼自身が私に送ってきた手紙からも明らかである。しかも彼は、この問題に曖昧さがあるなどとはいっさい不満を述べていない。彼は、この問題の本来の意味をきわめてよく理解していたからである。彼は私に、曲面上の問題を平面上の問題へと還元した、と書き送ってきているからである。しかし、事が彼の期待どおりには完全には進まなかったという事実は、この問題に、兄が考えているように、一つの一般方程式だけで全体を完全に包含できるほど単純ではない、はるかに大きな困難が潜んでいることを示しているのである。では逆に、もし私がこう言い返したとしたらどうだろうか。兄の諸問題のうち、最速降下の問題については一つの解答だけを示したが、もう一つの等周問題については、命題の曖昧さと不明瞭さのために、ほとんど一つの問題なのか複数の問題なのかすら分らないほどであるが、あの最も高貴なる人物は、あえて手を付けることを望まなかった、と私が言い返したとしたらどうであろうか。

さて、円錐面上で最短線を引くという兄の解答に話を戻すと、私はそれを正当なものと認めるし、またこの点において兄が私と同じ結論に到達したことを喜ばしく思う。しかし、こう言わせてもらえたら、無数にある場合のうち、兄が解いたのは一つだけ、しかもその中でも最も簡単な場合にすぎない。それほどまでに、一般的解法には、まだ計り知れないほど多くのものが欠けているのである。おそらく兄が用いた基礎原理は次の点に依存している。円錐面あるいは回転楕円体の表面上に引かれた、互いに近接する二つの任意の子午線に対して、求めるべき曲線がそれらとなす二つの角の差は、その二つの交点において引かれた子午線の接線同士が、円錐あるいは回転楕円体の軸上で交わって成す角に等しくなければならない、ということである。しかし、それがいかに取るに足らぬものであるか！その解法が有

効なのは、円錐面および楕円体においてでさえ、ほとんど全くと言ってよいほどに限られており、しかも底面が円形であるものに限られる。その中のすべてにさえ通用するわけではない。さらに、軸は底面に対して直交していなければならない。ところが実際には、軸が斜めの円錐面や楕円体はいくつあるだろうか？底面が円でないものはいくつあるだろうか？だから私は、彼が「この問題は、すべての円錐面および楕円体において、円錐や円柱と同様に簡単である」と言うとき、その言葉を、直立しており底面が円形であるものに限って述べるべきだったのに、と望まずにはいられない。さらに、円錐面でも楕円体でもない曲面の無限の多様性と種類を考慮すれば、円錐面および楕円体において達成されたことは、兄がなお達成すべきものに比べれば、取るに足らぬ重要性しか持たない、ということを認めざるをえない。したがって、私は、円錐面であろうとなかろうと、任意の与えられた曲面に対して成り立つ方程式へ到達する一般的な道筋を発見した、と自負している。この道の探究は兄に委ねておくことにしよう。そうすれば兄は、自らの解法を完成させ、この問題を完全に満足のゆく形で解決するための時間を得るであろう。

彼は任意の斜円錐について、しかも実際には直円錐についてだけでさえ、必要以上にくだい作図を示しているが、求めた線をどのようにして与えられた2点を通して引くべきかを教えていない。私はこれを、図も用いず、ごく簡単な言葉で処理してみせよう。与えられた2点から円錐の頂点へ二本の直線を引く。次に平面上に、それらと等しい二本の直線を取り、それらがなす角を、円錐上でその二本の直線を作る円錐面角と等しく取る。その平面上の二本の直線の端点を直線で結び、その直線を、その平面角から任意に引いた別の直線で切る。その交点までの距離を、円錐の頂点から円錐面上へ移し、その点が、円錐面上で先の二本の直線となす角が、平面上の対応する直線となす角と等しくなるように配置する。このようにして得られた円錐面上の点は、与えられた二点の間に引かれる最短線上の点であると私は主張する。ここでは、円錐面の頂点まわりの角は平面角と比較可能であり、あるいは平面角と等しいものとして取り扱えることを仮定している。この方法はすでにバロー（Barrow）が示している。

私が他の諸問題に与えた解法について、ここで長々と述べる必要はない。それらはすでに一年前に、かの高名なるロピタル侯爵に伝えてあり、しかもそれらはある意味で、より簡明なものである。ただ一つ、注意としてここで述べておきたいのは、私が当時すでにマルキ・ロピタル宛の書簡でも明言したことであるが、私が「同一種の曲線」と言ったとき、それは単に相似な曲線だけを意味していたのではなく、ある一定の法則によって定められたあらゆる曲線族、ライプニッツの用語を用いれば「順序付けられた位置として与えられた曲線」を意味していたのである。もし私の意図が相似曲線に限定されていたなら、そのように明確に述べたであろう。実際、その少し後、同じ「エフェメリデス」1697年12月号のP.463以下（No.XL,P.135を参照）で、私はそれらをはっきりと「相似であり、かつ同様に配置された曲線」と呼んでいる。私が例として放物線を挙げたという事実、しかも放物線は確かに相似な曲線である。このこと自体が、当時の私が曲線の相似性など少しも考えていなかったことを示している。もしそうであったなら、例として放物線ではなく、むしろ互いに相似でない別の曲線を挙げていたであろう。私の方法は、いかなる法則によって与えられた曲線に対しても、すべてに適用されるからである。しかし兄（フラテル）は、相似な曲線と相似でない曲線との間に、これほどまでに大きな違いがあることを、必ずや思い知るであろう。もし彼がこの問題を改めて再挑戦する気になったなら、私は疑わない。彼は、この問題をあの特殊な場合について解いた後でも、「順序付けられた位置として与えられる任意の曲線」という一般的に構想された問題に関しては、爪の幅ほども前進していないことを、自ら認めざるを得なくなるだろう。その探究がどれほど奥深く困難なものであるかは、第IV・V問題におい

て、放物線の代わりに、前の2問題で例として用いられた、あの同じ楕円を代入しようとすれば、彼自身に明らかになるはずである。私はあくまで例として言っているにすぎない。我々の方法は、他のいかなる曲線についても同様に解くことができるからである。

なお付け加えておくべき点がいくつか残っている。それは、私が「軌跡」と呼ぶ線についてであり、これらは、他の「順序付けられた位置として与えられた曲線」を、法線方向に、あるいは任意に与えられた角度で、さらには与えられた変化法則に従って変化する角度で横切っていく線である。私はこの主題を脇に置いてから、実に長い年月が経ってしまった。しかもこの主題は、記憶が正しければ、私が最初に世に提示したものであるのに、それほど長い時間が経ったため、今ではそれを思い起こすのさえ簡単ではない。ところで兄がいくつかの代数曲線の例を提示しているが、それらはすでに今から4年前に、私は著名なるライブニッツ宛の私信において解決して送っていたものである。そこで、1694年9月2日付の書簡に当時私が記していた内容を、ここに抜粋することにする。さらに私は、これらの問題は、位置によって与えられた曲線に接するという問題と密接な関連をもつ、以前から考察してきた、同様に優雅であり有益でもある別の問題をここに提示しよう。それは、位置によって与えられた無限に多くの曲線が与えられたとき、それらすべてを直角に横切る一つの曲線を見出せ、あるいは君の言葉を借りて言えば、位置により順序立てて与えられた直線群を、正規に横切る曲線を求めよ、という問題である。もし、任意の次数の放物線が、位置によって順序立てて与えられており、それらが同一の軸と同一の頂点をもちつつ、ただしパラメータのみが変化しているならば、求める曲線は楕円となる。もしまた、同一の放物線族が、同一の軸を共有しつつ、ただし頂点の位置が変化しているならば、求める曲線は通常対数螺線（対数曲線）となる。このように、個々の特定の場合については、私は簡単に処理することができる。しかし一般規則をここから考案することも、君にとって困難ではあるまい。さらにこの問題は、ホイヘンスの仮説に従えば、不均一な密度をもつ媒質を通過する光線の曲がり方を決定する上で、きわめて重要な用途をもつ。光線とは、波動を直角に横切る線にほかならないからである。しかもこの問題は、さらに広く次のように拡張することもできる。位置によって順序立てて与えられた直線群を、ある与えられた角度で横切る曲線を求めよ。もし与えられた直線群が一点に集まる直線であるならば、求める曲線は等角螺線となる、などである。これらの事柄について、その非常に洞察力ある人物は、1694年12月6/16日（ユリウス暦6日／グレゴリオ暦16日）付で私に宛てた書簡の中で、次のように返答した。私は、当時すでに彼もどれほど多くのことを成し遂げていたかが明らかになるよう、喜んでここに引用する。位置によって順序立てて与えられた曲線群に直角に交わる曲線を見出す方法は、私の判断では、二つの方程式に基づいている。その一つは、与えられた曲線族において、 x, y と定数 b との関係を含むものであり、この定数 b は、それぞれの曲線では一定であるが、そのような曲線が異なれば値が変わるものである。もう一つの方程式は、求める曲線における $dy:dx$ の値を含み、与えられた曲線族における垂直性の性質から表される。この第2の方程式によって、必要に応じて、 dy, dx, y, x を用いて定数 b の値が定められる。そしてこの二つの方程式から b を消去すれば、 x と y の関係についての1次の微分方程式が得られる。さて、もし位置によって順序よく与えられた同一の頂点をもつ放物線を考え、その半準線（半径パラメータ）を b とすれば、方程式 $2bx = yy$ を満たす。問題の条件、放物線に対して直交することから、 $b = -ydx:dy$ が得られる。そこで b を消去すると、 $-2xydx = yydy$ となる。積分すれば $aa - xx = \frac{1}{2}yy$ 、 $2xx + yy = 2aa$ となり、楕円の方程式である。よって、この条件を満たす曲線は楕円である。しかも、これらの楕円がこのように位置によって順序よく与えられたとき、逆

にどの放物線も、それら楕円の一つ一つと直交して交わることは明らかである。さらに、あなたが指摘したように、この問題が屈折光学において、媒質の中で連続的に変化する光線の曲率の研究に応用されるという点は、きわめて見事であり、これ以上に適切なことは言えない。

以上のことから、方程式へ到達するためのこの方法が、単に一つ二つの代数的曲線の例においてのみならず、あらゆる代数曲線において、以前からすでに我々には馴染み深いものであったことは十分に示された。しかし、この方法は超越曲線に対しては、サイクロイドのような相似な曲線においてのみ、あるいはまた対数曲線のように一つの定数に帰着できる場合にのみ成功するので、私はこの方法を不十分なものとして退け、これを磨き上げるに値するものとも考えなかった。そこで、任意に与えられた順序づけられた位置の曲線、超越曲線であれ代数曲線であれ区別なく適用できる、真に一般的な方法が、新たに考案されなければならなかったのである。しかしこの方法については、私がこの問題およびそれに近い内容についてライプニッツ氏に伝えたことをきっかけとして、きわめて鋭敏なライプニッツ氏が、自ら微分計算の新たな応用法を実に有用なものとして発見し、相互に私と共有してくれたことについては、今日に至るまで何ひとつ公表されていないのだが、私はついにかねてより望んでいた位置によって順序づけられた曲線を、直角であれ斜角であれ、一定の角であれ、あるいは与えられた規則に従って変化する角であれ、このような条件で横断するための一般的方法を、完全に我が意のままに引き出すことに成功した。しかも、ライプニッツ氏がこれを承認した以上、この方法にはさらなる完成のために $\gamma\rho\nu$ (一片の塵ほどの欠陥) すら付け加えることができないほどである。そしてこの方法は、常に必ず一つの方程式へと導いてくれるという点においても、まさに完全である。その方程式において、もしときに未定項が分離不能であったとしても、それによってこの方法が不完全になるわけではない。未定項を分離することは、この方法の問題ではなく、別の方法の仕事だからである(この方法、この軌道曲線という主題全体については、第II巻 No.CIV 以下を参照。特に No.CXVI)。そこで我々は兄に対して、このきわめて重要な事柄において、ぜひとも自らの力も試してほしいと願う。もし望ましい成功が、甘美な成果をもって引き受けた労苦に報いてくれるなら、その労苦を悔いることは決してあるまい。そして私は、兄が現在固執している方法、先ほど述べたように、ほんのごくわずかな例にしか適用できない方法を、きつと捨て去るだろうと確信している。

さて、私が学報 (Acta) において提示したあの特殊な場合について言えば、同一の軸上にあり、同一の点を通して引かれたすべての対数曲線を、直交して横切る軌道曲線を求める問題である。以下に、今からちょうど2年前、1696年10月27日付で、かの大いに称賛すべきライプニッツ氏に送った私の書簡からの抜粋を掲げよう。そこには、私が走行方程式と呼ぶものによって解く、特異な解法が示されている。(図1) AB を、点 C から引かれたすべての対数曲線 CD, Cd の共通の軸とする。これらすべて CD, Cd に直交する曲線 Dd を決定せよ。座標を $AB=x$ 、 $BD=y$ 、また $CA=a$ と置く。任意に対数曲線 CE を考え、他のすべての曲線はこれを基準にして扱うものとする。計算を簡単にするため、その曲線は、そのサブタンジェントが CA つまり a に等しいような対数曲線とする。さて、求める曲線上の任意の点 D から、BA に平行な直線 DE を引き、それが選んだ対数曲線と交わる点を E とする。そこから EF を引けば、AF は EF の対数、DB つまり y を表す。ここで、曲線 Dd が CD に対して直交するという条件より、一般に $dx:-dy = BD:BG$ が成り立つ (BG は曲線 Dd の法

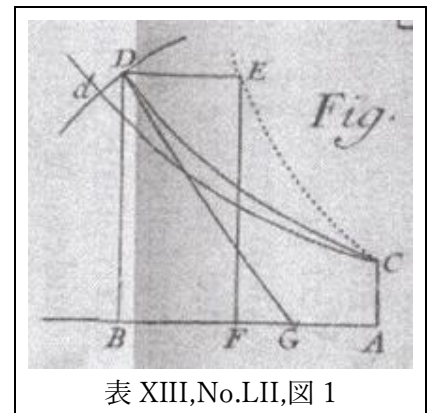


表 XIII, No. LII, 図 1

線に下ろした垂線の部分である)。ゆえに $BG = -ydy : dx$ 。さて、対数曲線の性質より、対数曲線 CE のサブタンジェントと、対数曲線 CD のサブタンジェント、CA と BG との比は、AF と AB との比に等しい。したがって次の比例が得られる。 $adx : -ydy = ly : x$ 、これより $axdx = -ylydy$ を得る。ところで $-ylydy$ は、(かつてすでにあなたに書き送ったように) 次のように部分積分できる。

$-ylydy = -\frac{1}{2}yydly + \frac{1}{2}aydy$ (なぜなら $dly = ady : y$ だからである)。これらを部分ごとに積分すると $\int -ylydy = -\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$ 。 $\int -ylydy = \frac{1}{2}axx$ なので $a = y\sqrt{\frac{a-2ly}{2a}}$ 。あるいは、私の言う走行方程式で書くなら、 b を a の数値 ($lb = a$) とすれば、 $2yyly = yylb - 2xxlb$ 、ゆえに $y^{2yy} = b^{yy-2xx}$ 、あるいは $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$ と指数形で表現できる。

兄が §4 において作図法を与えている対数曲線のもう一つの場合も、同様に簡単に通過方程式 (微分方程式) に還元することができる。また、もし同一のパラメータ・同一の頂点・同一の軸を持つあらゆる次数の放物線すべてを常に直交して横切る軌道曲線を求めるならば、その曲線には $a^{yy+xx} = x^{2xx}y^{2yy}$ という関係式が得られる。したがって、この件については、昨年 3 月に私が指数曲線について書いたものを参照されたい。(No.XXXVI を参照)

では、兄が最終的にどのように論述を締めくくるかを見てみよう。彼は自分のすべての解法と作図法を述べ終えたあと、最後に、他人が解くべきだとして二つの問題を提示する。しかもそれらは、これまで未踏であり、さらに彼自身の方法では歯が立たず、絶望的であるとまで述べている。それは次の二つである。

- ① 同一の軸上に構成され、かつ各放物線の直線側辺が、それぞれの頂点からある固定点までの距離に等しいという条件をもつ、すべての放物線を、直角で横切る曲線を求めよ。
- ② ある放物線、または任意の与えられた曲線を、その平面内で、ある与えられた点のまわりに回転させて生じる曲線を、与えられた角度で横切る曲線を求めよ。

私はここで、兄の方法を助ける手がかりが与えられたことを喜ぶ。さあ、両方の問題の解法を示そう。まず第 1 の問題。図 2 において、点 A を固定点とし、AB を放物線群 BC の共通の軸とする。これらの放物線のパラメータ、円錐曲線の長さは、いずれも距離 AB に等しい。軸 BA を延長した上に、任意に対数曲線 FG を作図し、その部分接線を a とする。次に、AB に垂直な AH 上に、曲線 AE を次の条件で描く。基準となる横の線を $AH = x$ としたとき、基準となる縦の線 HE が $HE = \int \frac{a^3 dz + 4azzdz}{aaz - 6z^3}$ (著者が No.LXX で訂正しており、正しくは $\int \frac{-a^3 dz - 4azzdz}{3aaz + 2z^3}$) に等しくなるようにする。以上の準備をしたのち、AH に平行な直線 GE を任意に引き、これが対数曲線 FG を G で、曲線 AE を E で、軸を D で切るようにする。次に、DI を DE に対して DG が対数曲線の部分接線に対する比と等しくなるように取る。点 I から軸に平行な直線 IC を引き、DG に等

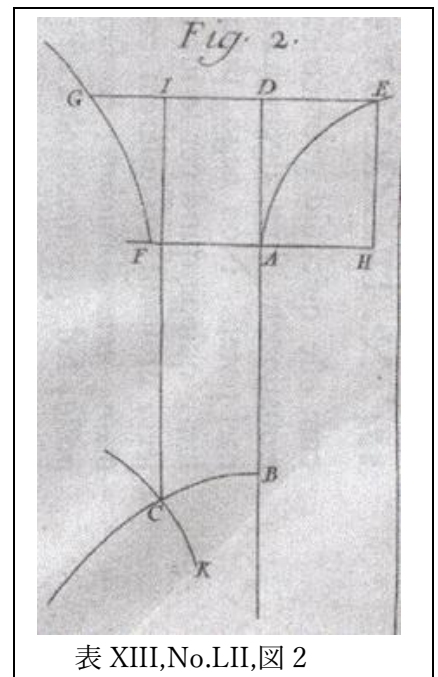


表 XIII, No. LII, 図 2

しいパラメータ AB をもつ放物線と交わらせる。その交点 C が、求める軌道曲線 CK 上の点であり、この曲線 CK は BC のようなすべての放物線を直角で横切るのである。

第2の問題、任意の与えられた曲線を、その平面内で、ある与えられた点のまわりに回転させたときに生じる曲線を、常に一定の角度で横切る軌道曲線を求める問題を、私は次のように作図する。図3において、点 C を回転の点を中心とする。そこから円 AGH を描き、点 A を回転の起点と定める。与えられた曲線 BF は、点 C のまわりに回転させられるものとする。その曲線上の任意の点 B から C へ直線 BC を引き、さらにその直線 BC に垂線 CD を立て

る。その垂線 CD は、曲線 BF の接線 BD と点 D で交わる。円の半径（全正弦） $=a$ 、与えられた角の正弦 $=b$ 、その余角の正弦 $=c$ 、 $CB=y$ 、 $CD=r$ 、 $BD=t$ とする。（なお、 r と t は y によっ

て与えられる。）ここで、弧 $AG = \int \frac{a^3 ry \pm abctt}{bbtty - aay^3} dy$

を取る。そして、半径 CG 上に、 CB に等しくなるように $C\beta$ を切り取る。すると、点 β は求める軌道曲線 βM 上の点であり、この曲線は、与えられた曲線 BF を、中心 C のまわりに回転させたあらゆる位置 $\beta\Phi$ において、常に与えられた角 $M\beta\Phi$ で横

切る。もしこの角が直角であるなら、作図はきわめて簡単になる。その場合には、ただ $AG = \int ady : r$ を取ればよい。このことの証明は付さない。それは自明であり、誰にとっても明らかだからである。

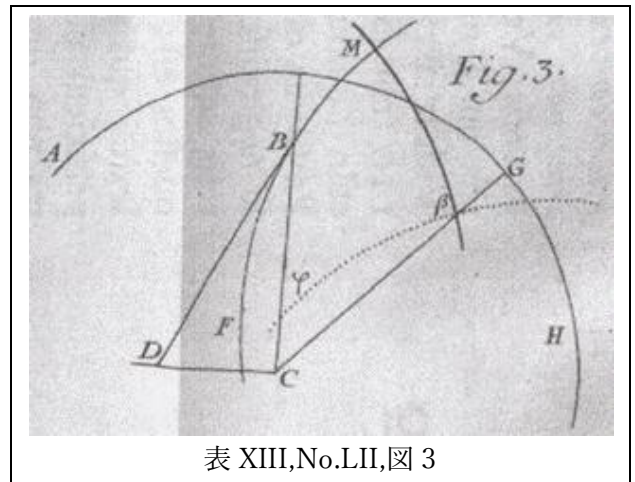


表 XIII, No. LII, 図 3

No. L I I I

ヨハン・ベルヌーイ、数学者

1699年5月11日に公開審査のため提出された、栄養についての医学・自然学的討論論文
最初は1699年にフローニンゲンで出版され、再び1735年にチューリヒで再版された。

1735年にこの論文をスイスのテンペに収録する手配をしていた際、著名なヨハン・ゲオルク・アルトマンは、読者に次の注意を与えた。このきわめて学識豊かな論文は、著名な著者によって、すでに前世紀の末に…

彼は当時フローニンゲン大学の哲学および数学の教授であったが、ある辛辣で敵対的な人々から非難を受け、とりわけ死者の復活の教義に関してソキニアニズムを帰せられたため、その著作はすでに多年にわたり学者たちから再刊を望まれていた。そこで我々は本書をここに再版することにした。なぜならその読解は、自然学者や医術の修養者のみならず、神学者やあらゆる善き学芸の愛好者にとっても、教育的であり、かつ喜びを与えるものだからである。

§ I

栄養について論じるにあたり、ほとんどすべての医師や自然学者の著作に見られる事柄を逐一たどるつもりはない。私の主たる目的に直接関係する点だけを選んで論じ、もしかすると、他の人々が手を付けずに過ごしてきた事柄にも触れる機会があるだろう。

§ I I

栄養とは何を意味するかは、誰の目にも明らかである。一般には、栄養とは食物が生きた身体の実体へと変換され同化されること、あるいはより適切に言えば、失われていく物質が連続的に再補充されること、であると定義されている。これは諸学者の著作の至る所に見られる。カステリの医学辞典、ミクレリウスの哲学辞典、センネルトの医学教程、フェルネルの生理学、ロオーの自然学、ウィリアム・コールの概説書、その他数え切れないほどである。

§ I I I

栄養は通常、2種類に区別される。維持する栄養と増大させる栄養である。前者によっては、継続的な消耗によって身体から失われる量とまったく同じだけの新しい物質が補充され、後者によっては、失われる量よりも多くの物質が加えられる。さらにある者たちは第3の種類として減少的栄養を挙げており、そこでは新たに補充される物質の量が、失われた古い物質の量に達しない。

§ I V

誰もが認めている（誰が否定できようか！）。生きている身体は、その構成部分の絶え間ない運動と振動によって、自己の物質を不断に失っており、その失われたものは、食物の変換と付加によって補われねばならないのである。しかし、その変換と補充がどのようにして行われるかについては、人々によってさまざまに説明されている。古人の空想をありがたがり、血液循環を明白に認めようとしない人々は、栄養の第1の素材が血液から、静脈幹を通して毛細血管へと、彼らの言う引き寄せる能力によって引き出され、やがて次々に4つの体液の形を取ると考える。名もなき体液、露（きわめて薄く精妙な液体）、膠（粘着性物質）、そして形成物質である。このうち最後の形成物質が、いわば直接の材料となり、先の3つを捨てて選択能力によって選び取られ、同化能力によって同化されるという。しかも驚くべきことに、これら二つの能力が、各部分においてそれぞれ独自の仕方では支配権を行使し、その結果こ

の形成物質は、骨では骨形成能力によって骨に、筋肉では筋形成能力によって筋に、神経では神経形成能力によって神経に、そしてさらにそのように次々と変化するとされるのである。なるほどこれは立派な理屈ではある。しかし、もしもある日、これらの能力たちが自分の職務を忘れ、互いに挨拶を交わしながらそれぞれの住処を抜け出して、他人の領域へと移動してしまったならば、我らの身体機構には致命的な大混乱が生じるだろうと、私は予見してしまう。おお神々よ！その時、何が起こるだろうか？なんという変身だろう！もし、肉であるものが骨になり、骨であるものが肉になり、神経や腱が硬直し、両脚の代わりに二本の大理石の柱が立ち、腕と指が極めて硬い樹木の枝へと変わり、皮膚の代わりに堅い樹皮が身体を覆い、逆に頭蓋骨や肋骨や歯やその他の骨が柔らかくなり、耳や鼻が蠟のように自由に曲がるようになったとしたら、かのオウィディウスでさえ、これほどの変身物語は作らなかっただろう。だが冗談はこの辺にして、真面目な話に戻ろう。

§ V

発見に実り多い我々の時代は、他のすべての学問と同様、解剖学においても新しくしかもきわめて明るい光を灯した。我々はいまや血液の運動、乳状の栄養液の本来の通路、古人には見えなかった微細なリンパ管、静脈の弁、動脈と静脈毛細血管の二つの管の連絡、さらにその他多くの事実を、人体という小宇宙を探究する鋭敏な研究者たちによって知るに至った。これらを理解した以上、栄養の仕組みを理にかなって説明することは、もはや難しいことではない。もっとも、近代の学者の間にも、いくつかの点で意見の相違がある。ワルトン (WARTHONUS)、グリッソン (GLISSONIUS)、コール (COLE) のように、栄養液が神経から直接供給されると考える者もいれば、ウィリス (WILLISIUS)、デカルト (CARTESIUS)、ロオー (ROHAULTUS)、ステノ (STENO) のように、それを動脈の末端の枝から直接生じるとする者もある。しかし彼らは皆、その生成の材料が血液であることでは一致しており、しかも機械的な説明の仕方においては、ほとんど、あるいは全く意見を異にしていない。その要点は次のとおりである。食物は口の中で歯によって咀嚼され、そこに混じった唾液によって最初の前処理を受ける。それから嚥下され、胃の発酵作用によってさらに細かくされ消化され、灰色がかった栄養液へと変化する。それはしばらく滞留した後、胃の下部の出口、いわゆる幽門を通して腸へ押し出され、腸の蠕動運動に押されながらゆっくりと進み、その過程でさらに抽出され、精製され、薄められ、そしていっそう乳白色の液となっていく。このようにして薄められた乳糜（にゅうび、腸から吸収される乳状の栄養液）は、乳糜管の開口部へと入り込み、後から続くものに常に押されながら、より粗く固形物の粒子を残してゆく。それらは糞便となって肛門から排出される。乳糜は次に、さらなる浄化のためとされるアセリウス (ASELLII) の大腺を通過し、そこから速やかに多くの枝管を経て、ペクケー

(PECQUETO) が発見した共通の貯留槽へと向かう。そこに集められた乳糜は再び押し出され、その推進は、新たに流入してくる液の圧力によって、また動脈の拍動や周囲の筋肉、特に腹部や呼吸に関与する筋、その中でも横隔膜の働きによって助けられる。押し出された乳糜は胸管に受け取られ、同様の運動に支えられながら絶えず上行し、ついには鎖骨下静脈へと注ぎ込まれ、そこで初めて血液と混ざるのである。きわめて優れた近代の解剖学者たちの中に、乳糜がこの経路を通ること自体は否定しないが、その一部は腸から直接

腸間膜静脈によって吸収され、その結果ただちに血液と混合されて肝臓へ送られる、と主張する者たちがいることを、私は知っている。この意見をとくに支持しているのは、ホルニウス (HORNIIUS)、スワンメルダム (SWAMMERDAM)、ビルジウス (BILSIUS)、ボレリ (BORELLUS)、デュリンギウス (DEULINGIUS) であり、彼らはいずれも、あの有名なビルジウス (BILSIUS) の実験に全員あるい

は大部分が依拠している。これに対して、正当に参照されるべきなのは、ペケ (PECQUETUS)、ロウアー (LOWERUS)、バルトリーニ (BARTHOLINI) 父子、その他の人々であって、彼らは、いかなる乳糜も腸間膜静脈を通して肝臓へ運ばれないことを、きわめて強力な論証によって確証し、その結果、肝臓から、古来より担ってきた造血という役割を完全に剥奪したのである。とりわけ読むに値するのは、この目的のために行われたロウアー (LOWERI) の実験であり、また同様に、かつては自ら肝臓の機能のために勇敢に戦ったトマス・バルトリーニ (Thomas BARTHOLINUS) が、最終的にはよりよき真理を学び悟って、肝臓造血説のために弔辞を書き、葬儀を執り行ったその論考もまた、読むに値する。

§ V I

乳糜は鎖骨下静脈から絶えず血液の中へと注ぎ込まれ、血液とともに進み、ただちに心臓の右心室を通過し、そこから肺を経てその道程を終え、左心房に入り、少しの停滞もなく、強く反復される拍動によって大動脈へと打ち出され、そこから枝へ、枝からより小さな動脈へ、さらにそれらから毛細血管へと絶え間なく注ぎ込まれる。再び逆の順序で、小さな静脈から大きな静脈へと集められて心臓へと運び戻される。しかし何の休止も許されることなく、同じ循環を繰り返し、行きつ戻りつ、常に同一の道を通るのである。そしてこのことこそが、すでに万人に受け入れられている血液循環であり、ハーヴィー (HARVAEO) によって最初に発見されたもので、これほど長く隠されていたこと自体が、先人たちの時代の盲目さを非難せずにはいられないのである。このようにして血液とともに運ばれた乳糜は、次第に血液によって練り込まれ、熟成され、加工されて、乳糜の粒子のうち血液成分と似たものは他のものから分離され、その類似性ゆえに簡単に血液と結びつくが、他方、形状の異質性のためにそのように密接に血液と混ざることのできない残りのものは、自然のさまざまな経路によって体外へ排除される。血液の塊が種々の内臓を通過していく際に、その通路の性質に応じて、それぞれの器官に適した部分がそこから選り分けられるからである。血液生成の方法として探し求めるべきものは、今述べた以外に存在しない。それは、乳糜が血液と適切に混合されることと、複数回の循環に要する十分な時間とにのみ存する。最初の1回あるいは2回の循環では、この働きは直ちには完了しないからである。このことは経験が証言している。動物に多量の食餌を与えた後、4・5時間ほど経ってから、どの動脈あるいは静脈であっても切開すれば、多量の乳糜を含んで白濁した血液が流れ出るのである。

§ V I I

乳糜から生成され、かつ異質な成分を除去された血液は、それでもなお体内で栄養される各部位の孔の性質に応じて、性質も本性も異なるさまざまな粒子から成り立っており、それぞれの部位の用途と必要に応じて供給することができるようになっている。このようにして、より微細で揮発的な血液の部分は脳において分離され、精気を補充するために用いられ、他方、より粘稠な部分は身体の栄養に奉仕する。しかし、血液が血管の中を循環しているあいだ、それが粘着性であると考えべきではない。粒子に運動があるかぎり、それらは簡単には互いに付着しないが、いったん血管の外に出て急速な運動を失うと、あらゆる体液が、あまり高温でない場所にしばらく静止しているとゼリー状の粘性を帯びるのを我々が見るように、その粘稠性を帯びるからである。どれほどそれまで流動性が高かったとしてもである。

§ V I I I

しかし、血液がいかにして栄養に適した形で血管から外へ供給され得るのかという点については、多くの人々が十分に理解してこなかった。そこで多くの者たちは、また現在に至るまでなお信じている者も多いが、全身に散在する末端の動脈性毛細血管が、栄養されるべき組織の間隙に向かって、その開いた口を開き、あたかも血液全体とともに栄養汁を吐き出すかのように放出し、それが今度は同様に開口している静脈性毛細血管の別の口から再吸収され、心臓へと運び返されるのだ、と考えてきたのである。しかしこの説に対して、毛細血管の完全な互いに連結していることが反論を突きつける。この構造は、あの不可視の世界の探究者レーヴェンフック（LEUWENHOEKIUS）が、彼の極めて精確な顕微鏡によって、多くの動物において観察したものである。そして、より確信をもって語るならば、その根拠となるのは私自身の直接観察である。それは私に対して、ウナギにおいて同じことを一度ならず教えてくれた。私はそこにおいて、大きな驚嘆と喜びとともに、きわめて見事な血液循環を幾度も目にしたのであり、血液の小球が、細動脈から細静脈へと、連続した流れのうちにきわめて速やかに滑り流れてゆくのを観察した。細動脈では下から上へ進み、細静脈では、まるで進路を反転させたかのように、何の停滞も途切れることともなく上から下へ進んだのである。このようにして、両枝の間に存在するあの屈曲部から、あらゆる毛細動脈がそれに対応する毛細静脈とともに、一つの連続した血管を形成していることが、最も明白に示される。したがって、これら2種の血管が相互に連絡していることは、疑い得ないほど確実であり、毛細血管の口から血液が外へ漏れ出すというあの説は、まったくの作り話にすぎない。

§ I X

以上の事情により、栄養液は血管からまったく別の仕方によって導き出されねばならないことは、おのずと明らかである。そして実のところ、この問題をより明確に説明するものはほとんど存在しない。それは、血液のきわめて微細な粒子が、熱と急速な運動のために、蒸気のような形で毛細血管の壁を通ってにじみ出る、ということである。血管の壁そのものが、無数の微細な繊維が網状に絡み合っできた膨張した組織にすぎないので、そこに無数の微小な通路が開いており、それらの流出物を受け入れないはずがないからである。さらに、血液の激しい運動がこの拡散を大いに助ける。心臓の一回一回の収縮ごとに、血液は大きな力でそこから押し出され、その勢いで動脈を過度に満ち、その壁を強く引き伸ばすため、結果として孔が広がるのである。これはデカルトが「胎児形成論」においてきわめて的確に指摘したとおりである。そのうえ、脈動の瞬間ごとに、血液の圧力が動脈内面のあらゆる部分に等しく及ぶため、すでに孔に入り込んだ粒子をさらに押し進め、これらが直前の粒子を押し、そしてまたその前のものを押す、という具合に連続的に進行する。

§ X

ここで注意すべきこととして、一般に固体と呼ばれている動物の身体のすべての部分は、無数の微細な繊維や糸状構造がさまざまな仕方で絡み合い、織り込まれて構成されているという点がある。それらは時に筋肉・神経・腱に見られるように互いに平行に並んでいることもある。さらに、骨そのものもこのような繊維状の組織構造を備えていることが、次の事実からも明らかである。骨は割れる方向によってははかんに割れやすく、また、裂けた骨のほうが折れた骨よりも簡単に再び結びつけることが可能だからである。裂け目では繊維は保たれているが、骨折では繊維が引き裂かれてしまうからである。このことは、フォルゲウス（Forgeus）がデカルト「人間論」に付した注においても、きわめて見事に観察されている。さて、動脈は無数の枝に分かれ、さらにそれらの各枝は無限とも言える毛細血管へと分かかれ、身体の全構造をあらゆる方向に貫いているのであるから、われわれが血液の最も微細な粒子がそこ

から滲み出ると言った細動脈に、個々の繊維がその根元を対応させて差し込まれていると考えることは簡単である。したがって、細動脈の壁から押し出されたあらゆる血液粒子は、その運動によって繊維の根元に衝突し、もしそこに自らの形と大きさに適合する窪みを見出せば、そこへ入り込み、繊維に刺し込まれ、かつ結合して、その繊維の一部として取り込まれる。しかし、形状が適さないか、あるいは大きさが合わず、そこに留まる場所を見出せない場合、後続する粒子によって即座に押し流され、隣接する二つの繊維の間隙へと押し込まれる。その間隙を流れ進んだ粒子は、末端に達すると、皮膚の孔を通して空気中へ逃げ去るか、余分な栄養液を回収する目的でそこに伴走していると私は考えるリンパ管を通して、リンパの形で戻り、種々の場所で、ある時は乳糜と、ある時は直接血液と再び混じる。こうして、最初の循環で適合せず血液へ戻らざるを得なかった粒子も、第2回、第3回の循環のうちにより適した形を獲得するか、あるいは以前とは異なる繊維孔に衝突し、簡単に結合するようになる。そしてこの粒子の連続的な付着こそが、栄養という働きのすべてを成し遂げるのである。ここから、同じ食物からであっても、粒子の形と通路の形・大きさの違いによって、筋肉・神経・皮膚・脳・骨など、身体各部がそれぞれ異なって養われる理由が明らかとなる。また、粒子が繊維にきわめて密着して、入り込んだ溝を完全に満たし、その繊維の性質と実体そのものを帯びることから、ここには結合を固定するための接着剤はまったく不要であり、さらに言えば選択的能力や同化能力といったものも必要ではないことが理解されるのである。

§ X I

さらに注目すべきことは、繊維の根元に新しい粒子が付加されるとき、それらは先に付着していた粒子を前方へ押し出し、その結果、根元に近かった粒子は一定の時間の経過のうちに繊維の先端へと達する、ということである。そして先端へ到達すると、それらは周囲の空気やその他の接触する物体との摩擦によって削り取られる。その一方で、繊維の側面からも、ある種の粒子が引き剥がされることを妨げるものは何もなく、それらは繊維の間隙を流れる体液によって、あたかも洗い流されるようにして除去され、その体液とともに再び血液へ戻るか、あるいは空気中へと飛び去る。ここから、身体諸部分の不断の分解・摩耗が生じるのである。それにもかかわらず、繊維の根元に結合する粒子の数が、繊維の先端から引き剥がされる粒子の数より多いあいだ、身体は成長する。これは青年期に起こることであり、その時期には、部分の物質がまだ柔らかく緩やかであるため、栄養粒子がより簡単に、しかも大量に、その孔へと付着するからである。壮年期には、ほぼ同数の粒子が一方で補われ、他方で失われるため、その結果、身体はしばらくのあいだ同じ大きさに保たれる。しかし老年においては、組織の微細通路がきわめて密に縮こまり、繊維はほとんど栄養を受け入れなくなる一方で、それらの末端は空気やその他の物体に常にさらされて摩耗し続け、またあらゆる湿潤成分は乾き失われていく。その結果、回復される量よりも、はるかに多くのものが失われるようになる。このため、きわめて老衰した人々は、しばしば病氣というよりも、ある種の緩慢な消耗によって痩せ衰え、ほとんど苦痛の感覚もなく死に至るのである。われわれは次のような反論が提起されうることを予見している。「もし青年期において繊維が老年よりも柔らかく、そのために栄養粒子をより多く受け入れられるのであれば、逆にそれと同じ理由によって、空気やその他の物体との摩擦によって、はるかに簡単に摩耗してしまうはずではないか」という反論である。この反論に対しては、本来なら「付加される量が、失われる量よりはるかに多い」と答えるだけで十分であったであろう。しかしそれに加えて、私は次のことも指摘しておく。経験が教えるところによれば、あらゆる物体は、硬いものであるほど、摩耗や摩擦によって、かえってはるかに簡単に削られてしまうのである。たとえば我々は、金属が硬ければ硬いほど、よりよく研磨され得ることを

目にしている。その理由は他でもない。柔らかい物体では、突き出た粒子が内側へ簡単に退き、摩擦する力に対して自らを引き下がらせるかのようにして逃れることができるが、硬い物体ではそれが起こらないため、わずかな抵抗を乗り越えられると、表面のあらゆる凹凸が、残りの本体から引き剥がされてしまうのである。

§ X I I

なお別の困難が残っており、これがこの栄養理論を強く圧迫しているが、しかしこれは簡単に解消される。それは、骨のようにきわめて堅固で緻密な物質が、血液の塊から細動脈の壁を通して滲み出る、あの極微の露のような液体が染み込むだけで、養われ、拡張し、成長しようというのは、多くの人々にとってきわめて困難、ほとんど不可能にすら思えるであろう。これほど強固な骨の組織が、侵入してくる粒子に抵抗しない、あるいは少なくとも自己の拡張を妨げない、ということがどうして起こりうるのか、という疑問である。しかし、機械学の法則から楔（くさび）のもつ莫大な力を知っている者であれば、この反論の弱さを簡単に理解するであろう。なぜなら、あらゆる粒子は楔のように振る舞うからである。それ自体はきわめて小さな力で押し込まれるにすぎないが、ひとたび入り込むと、裂くために側方へはるかに大きな力を及ぼすのである。ではどうだろうか。もし今、このようにして力を発揮するすべての粒子をひとまとめに考えたならば、それらがどれほどの力をもつか、想像できるだろうか。骨のいかなる堅固さも、その膨張させる力に抵抗できないとしても、驚くだろうか。実際、雨天のときには、張りつめた樽の帯が、ふだんなら最も力の強い男が手で引き裂こうとしてもびくともしないほどの太さであっても、激しく破断されることを、我々は少しも不思議とは思わないではないか。空気からしみ込んで入り込んだ水の粒子が、樽の木材の繊維の内部に浸透し、それらを膨張させるだけで、帯を締めようとするからであり、それが起これば、もはや破断が避けられないのであるここに加えて考えるべきなのは、動物精气によって膨張させられた筋肉が示す驚くべき力である。これについては、私は「筋肉運動論」という私の論文の中で、より詳しく説明した。さらに、湿らされた縄が、ほとんど自発的に巨大な重さを持ち上げるという驚異的な現象についても、ここではあえて詳しく語らない。その驚くべき効果については、いずれ好奇心旺盛な人々の目の前で、実験によって示すつもりである。

§ X I I I

以上のすべてを真剣に考慮すれば、次のことが明らかになる。動物の身体の中に、いかに硬い骨であっても、いかに緻密で堅固なものであっても、栄養されないものは一つもなく、変化せず、一定の時間ののちに自己の一部を失い、そして新たな部分を回復しないものは存在しない。そしてこのことは、真実であるのは、骨よりも固さの少ない、その他すべての身体部分についてである。デカルトもまったく同じ見解であった。生命を有し、かつ栄養によって維持されるすべての物体、動物および植物（これら両者の栄養の原理は同一である）においては、その諸部分はずねに変化の過程にある。それゆえ、「流動体」と呼ばれるもの、血液・体液・精气と、「固体」と呼ばれるもの、骨・肉・神経・膜との間には、ただ一つの違いしか存在しない。後者の各粒子は、前者の各粒子よりもはるかに遅く運動している、という点においてのみ異なるのである。いったい誰が、これと異なる考えを抱くことができるか。日々の経験が示しているではないか。いかに耐久性の高い材料から作られた機械であっても、長年の使用によって損なわれ、劣化し、摩耗していくことを。それゆえ、人工の機械よりはるかに脆弱な「動物という機械」が、絶え間ない運動と活動の中にありながら、摩耗と摩擦の損傷から免れるなどという理由は、どこにも存在しない。さらに言えば、この問題について書いてきたすべての医師と哲学者は、例外なくこの見解に一致している。そして、説明の仕方には多少の違いがあつたとしても、一つの

声で次の点において意見が一致している。食物は栄養作用によって、真に身体そのものの実体へと変換されるのであり、栄養粒子はこの変換によって、厳密な意味で言うところの骨・肉・神経などを構成するのである。いったい正気の人間で、あの一部の妄想者たちのように、栄養物が身体の各部分そのものの実体へと変化するのではなく、ただ偶然的な付属物として一時的に身体に付着するだけで、その目的も、やがて不感蒸泄やその他の自然に備わった排出経路によって再び分離され、体外へ捨て去られるためだけである、などと夢想する者がいるだろうか。もしそれが事実だとすれば、自然というものは、本来いかなることも無駄にしないはずの自然が、ここでは自らの本性を最もひどく忘れ去ったことになるだろう。かくも大きな営みを費やして栄養作用を設けながら、その結果が単に排泄物を積み重ねるだけのものになってしまうからである。しかもそれらの排泄物は、我々の身体にとってほとんど必要のないものであり、むしろ食物をまったく摂らない方がはるかにましであろう。自然の欠陥によって食物を腐敗させ、それをただ有害で汚い体液に変えてしまうよりも、その方がよほど良いのである。それらの体液は、身体に害悪以外の何ものももたらさないのだから。あなたは反論するかもしれない。栄養とは、おそらく自然がとくに成人において、ただ消耗した力を回復させるために設けたものであり、そのために消費された動物精気の代わりとして新たな動物精気を補充するだけのものである、と。仮にそれが栄養の唯一の目的だと認めたとしても、少なくとも次の点は認めざるを得ない。身体の一部、つまり動物精気が栄養によって新たな実体を獲得する、ということである。ここであなたが、動物精気が身体の一部を構成することを否定しようとしても、それは無駄である。動物精気は、すべての医師の一致した見解によれば、最も必要不可欠で本質的な部分の一つだからである。そして身体の構成要素は通常、三つの主要な類に分けられる。固形成分－骨・筋肉・神経など、流動成分－血液等の体液、動物精気－運動・作用を引き起こすもの。

§ X I V

しかし、これほどまでに愚かな説を、根拠を示して論理的に誤りを指摘するために、これ以上時間を費やすのは気が進まない。この真理は、古人たちも近代の学者たちもともに認めてきたものである。とはいえ、彼らすべての権威も、それ自体としてこの事実が私に十分明白でなかったなら、私を少しも動かすことはなかったであろう。そして私は、それをここまでの議論によって十分に示したつもりである。しかし私は、これほど多く、しかもこれほど偉大な人々の証言を、共通の見解から正当に導き出すいくつかの帰結を確立するために用い、きわめて明白に証明してみせるつもりである。そうすれば、誰であれ、それらの結論が一部の者たちによっていかに軽薄にも攻撃されているか、彼らが私一人に対してだけでなく、私が上で引用したあの多くの卓越した学者たちすべてに対して、いかに不当な仕打ちをしているかを理解するであろう。この点に関して私に向けられるいかなる非難も、それと同時に、彼らすべてを有罪にするものでない限り、私一人に帰することはできないからである。だからこそ、私の熱狂的な批判者たちは、私を害そうとするその情熱に駆り立てられて、どこまで堕ちていくのかをよく見極めるがよい。そして、罪なき人々に加えたこの不当な害を、いかなる手段で償うのかを考えるがよい。

§ X V

第一に、動物の身体における流動の持続性、その実体が絶えず失われ続けているという、医師と哲学者たちに共通の見解から、次の結論が導かれる。我々の身体、ならびにすべての動物の身体は、たとえ1時間たりとも、数的に同一のままであり続けることはできない、ということである。(なお数的に同一であるとは、あるものがそれ自身と同一のものとして関係づけられることである。この点について

は、フルシウス（Hulsius）の最近の論文「数的同一性について」を参照。）1時間後には身体はすでに変化しており、それは単に付随的な性質が変わっただけではなく、身体そのものの実体において変化しているからである。以前持っていたものを失い、以前持っていなかったものを新たに持っている。たしかに、この1時間のあいだに失われ、また加わるものは微量ではある。しかしそれでも、それは身体の実体そのものに属していたものであり、かつ現在も属しているものであることを、すべての哲学者・医師・解剖学者が認めているのである。しかし真の数的同一性とは、実体が主体において、その本質において不変であることを要請する。たとえ付随的な性質が変化したとしても、である。例えば、ひとかけらの蠟が丸い形から立方体が変わったとしても、それはなお数的に同一の蠟であり続ける。なぜなら蠟の材料そのものが同一のままであるからである。しかし、そこから少しでも取り去り、さらに別の蠟をほんのわずかでも加えたなら、たとえ丸い形をそのまま保っていたとしても、それはもはや数的に同一の蠟ではない。もはやそれは、以前のそれ自身と同一ではないからである。ここで明らかなように、身体において数的同一性を保持するためには、等しい体積の保持が必然的に要求される。同一の一つの身体が、ある時にはより大きな空間を占め、別の時にはより小さな空間を占める、などということは、疑いなくありえない。したがって、ある個別的で確定した身体の量を、同一のままでいられる性質の一つに数えるのは、きわめて誤っている。なぜなら、ここで言う量、長さ・幅・奥行きへの広がりとしての延長は、その身体の本質そのものに属するからである。もし私が君から金貨を借り、そしてその大部分を切り取ったものを君に返して、「ほら、これは数的に同一の君の金貨だ」と言ったなら、君は満足するだろうか？だが、なぜ満足しないというのか。たしかに私は、君が渡したのと同じものを返しているではないか。それでもなお、君は受け取ることを拒むのか？私はこう迫るだろう。「受け取れ。切り取った後でも元のまま同一の金貨である、などと言うのをやめよ。」逆の場合も同様に滑稽だろう。どれほど量が増大しようとも、なおそれが数的に同一の物体のままである、などと主張するのは同じくらい馬鹿げている。君はこれが滑稽ではないと言うのか？ではこうしよう。私は君に子牛を貸したとする。ところが後に、君の牧草地で成長して雄牛になったその動物を、私は返せと求める。それを不当な要求だと君は思うか？しかし君自身が認める通り、私は自分のもの以外は何も求めていないのだ。数的に同一の、あの私の子牛をである。いったい、このような数的同一性の観念をもつ者がいるだろうか？私にはほとんどいるとは思えない。だが話を続けよう。

§ X V I

したがって、身体の実体そのものが絶えず変化しており、しかも1時間ほどの変化は感知できないほど微小である以上、時間の経過によってその変化が顕著なものになるのは、真昼の光よりも明らかである。この点は、すべての医師および哲学者がたやすく認めてきたことである。しかし私の知るかぎり、その変化の量を測定しようとあえて試みた者、あるいは1年または数年のうちに身体のどれほどの部分が消費され、どれほどの部分が新たに加わるのか、また残存する部分と新たに加わった部分との比率がいかなるものかを、何らかの仕方で定義しようとした者は、誰一人として存在しなかった。見てみよう。これほどの暗闇の中に、われわれのために何らかの希望の兆しは残されているだろうか？ここで1人の成人男性を想定しよう。望むなら30歳の人物で、健康状態はきわめて良好、体格は頑健かつ運動的である。彼の体格を通常の大きさとし、その体重を150ポンドと仮定する。さらに、サンクトリウス（SANCTORIO）に従って、この人物の1日の摂取量が8ポンドであると仮定しよう。あの著名なサンクトリウスは、20年以上にわたる多様な実験と、この目的のためだけに行われた特別な観察によっ

て、健康で体質がよく整った人間は、摂取した食物のおよそ $\frac{3}{25}$ を、自身の身体の実体へと変換することとを突き止めた。そこで8ポンドの $\frac{3}{25}$ を取ると、1日あたり $5\frac{3}{25}$ セミオンスの新たな物質が生じることになる。これが、我々の運動家が毎日その身体に同化させる量である。これは1年間で58ポンド $12\frac{4}{5}$ セミオンスに達し、全身重量の $\frac{1}{3}$ 以上に相当する。したがって、同じ量だけが、連続的な散逸によって身体の実体から失われていなければならない。我々はこの人物が安定した状態にあると仮定しているからであり、長期間にわたって全身の体重が変化しない状態である。もし、身体の失われ方が、最も古い物質が最初に去り、次にそれに次いで古いものが去り、こうして順次、最も新しいものに至るまで、身体に同化されたのとまったく同じ順序に進むとすれば、身体はもはや数的に同一のままであるどころか、完全に散逸してしまい、ついにはその最小の粒子すら残らず、まったく別の身体がその場所を占めることになるだろう。そしてこの仮定のもとでは計算はきわめて簡単である。1年間に58ポンド $12\frac{4}{5}$ セミオンスの新しい物質が身体に加わり、同じ量だけ古い物質が失われるのだから、比例計算を用いて、身体全体の物質150ポンドが散逸するのに要する時間を求めればよいだけだからである。実際に計算すると、身体全体の散逸は2年と $207\frac{1}{2}$ 日以内に起こることが分かる。今この瞬間にこの人の身体を構成している物質は、3年も経たないうちに、すべて使用によって摩滅・消費され尽くし、そのうえその場所にはすでに新しい物質の相当部分が取って代わっていることになる。

§ X V I I

実際、私が述べたように、もし粒子の拡散において、自然がその付加の際と同じ時間的順序を守るならば、事態はまさにそのようになることは明らかである。この点に関して、デカルト (CARTESIUS) とロアールト (ROHAULTUS) は、このように考えていた点で、決してその見解から遠く離れているとは言えない。両者とも、繊維の根元に付加された最下層の粒子が、前にある粒子群を押し進め、端部に到達してすり減って失われるためには、その前にあるすべての粒子が順次引き剥がされていなければならない、と主張しているからである。しかし実際には、§ II から明らかなように、排出されるのは、古い粒子と新しい粒子とがその量の割合に応じて混合された状態で同時に排出されるのである。したがって、人間がたとえ千年生きたとしても、今この瞬間に身体を構成している物質がすべて完全に空中に飛び去ってしまう、ということは決して起こらない。常に古い物質の一部が新たに加わるものと混ざって残存するからであり、その古い物質は次第に次第に減少してゆき、やがては与えられたどんな微小な量よりも小さくなってしまいうからである。これをよりよく理解するために、ひとつの比喩を示そう。

150ポンドの水で満たされた容器を想定する。そこから $5\frac{3}{25}$ セミオンスを汲み取り、取り除かれた水の代わりに、同量の純粋なワインを注ぎ入れる。翌日、その混合液から再び $5\frac{3}{25}$ セミオンスを取り去り、そして同じ量の純粋なワインを加える。3日目にも同様に、混合液から $5\frac{3}{25}$ セミオンスを取り除き、同量の純粋なワインを加える。これを一年間、毎日繰り返す。毎日この一定量を混合液から汲み出し、その欠損を同量の純粋なワインで補い、こうして容器は常に満杯のままに保たれる。さて、では一年が経過したとき、容器の中には水とワインがそれぞれどれほど残っているだろうか。残存する水の量

とワインの量との比はどのようになっているだろうか。この問題は、先の仮定よりもいくぶん難しさを増している。純粋なワインが注ぎ足される一方で、取り除かれる水はもはや純水ではなく、そこには同時に加えられたワインの一部も含まれているからである。しかも、取り除かれる水とワインの量の比は、毎回変化する。したがって、前の仮定のように、注ぎ替えの回数だけから両者の量を推定することはできない。それでもこの問題は、算術にあまり慣れていない人々には難解に見えるかもしれないが、私はそれほど険しくない道筋によって解に到達する。150 ポンドの水は 4800 セミオンズに相当する。そこから $5\frac{3}{25}$ セミオンズを取り去り、同量の純粋なワインを加えると、容器の中には $4794\frac{22}{25}$ セミオンズの水と $5\frac{3}{25}$ セミオンズのワインの混合液が残る。次の日、この混合液から再び $5\frac{3}{25}$ セミオンズを取り去り、同量の純粋なワインを加えると、取り去られたその $5\frac{3}{25}$ セミオンズは、もはや純水ではなく、わずかのワインを含んでおり、その含有比は水に対して $5\frac{3}{25}$ 対 $4794\frac{22}{25}$ となる（ワインは水に均一に混ざっていると仮定する）。したがって第 2 回目の除去によって、 $4794\frac{22}{25}$ セミオンズの水は、4800 セミオンズが減少したのと同じ比率で減少する。第 2 回除去後に残る水の量は、4800 と $4794\frac{22}{25}$ に対する第 3 比例数となる。同様に第 3 日目にも、混合液から $5\frac{3}{25}$ セミオンズを取り去ると、残存する水の量は 4800 と $4794\frac{22}{25}$ に対する第 4 比例数となり、この操作は同様に続いていく。1 年後、365 回の除去の後には、残存する水の量は、4800 と $4794\frac{22}{25}$ に対する第 366 比例数として得られる。 $4794\frac{22}{25}$ を 365 乗したものを、4800 を 364 乗したもので割った値となる。この計算をそのまま行えばあまりに膨大な労力を要し、3 か月以内に誰一人として計算を終えることができないほどである。しかし、対数表という優れた近道がある。4800 と $4794\frac{22}{25}$ の比を整数の最小項に直すと、1875 と 1873 が得られる。さて、対数の理論によれば、1875 と 1873 に対する第 366 比例項の対数は、 $365 \times \log 1873 - 364 \times \log 1875$ に等しいことが分かる。そこで対数表から 1873 と 1875 の対数を取り出すと、それぞれ 3.2725378 と 3.2730013 である。前者を 365 倍し、後者を 364 倍すると、1194.4762970 と 1191.3724732 となり、その差は 3.1038238 である。この値を対数表の欄で探すと、ほぼ 1270 に対応することが分かる。したがって、この 1270 が、1875 と 1873 に対する第 366 比例項である。さらに、 $1875:1873 = 4800:4794\frac{22}{25}$ であるから、連続比例の性質により、1875 と先ほど求めた 1270 との比は、4800 と 4800 および $4794\frac{22}{25}$ に対する第 366 比例項との比に等しい。比例計算を実行すると、その第 366 比例項は $3251\frac{1}{5}$ となる。これが求める数である。したがって私はこう結論する。毎日繰り返されたあの混合液の除去と純ワインの注入をすべて終え、1 年が経過した後には、容器

の中に残る水は $3251\frac{1}{5}$ セミオンス、したがって（4800からの補数として）ワインは $1548\frac{4}{5}$ セミオンスである。

§ X V I I

以上のように計算した結果を踏まえれば、現在の問題への適用は簡単に理解できる。容器に入った150ポンドの純水は、今この瞬間における我々の人間の身体を構成している同じ重さの物質を表している。毎日注ぎ加えられる $5\frac{3}{25}$ セミオンスの純ワインは、彼が日々自分の身体の実体へと変換し、古い物質と混ざり合う新しい物質を表している。そのほかの点は、それだけで明らかである。したがって私はここから次のように結論する。もし日々の消耗、新しい物質と古い物質の両方が、その量の割合に応じて同時に失われていくなれば、この人間の身体を構成していた150ポンドの古い物質は、 $3251\frac{1}{5}$ セミオンス、101ポンド $19\frac{1}{5}$ セミオンスにまで減少する。そして残りの、 $1548\frac{4}{5}$ セミオンス、48ポンド $12\frac{4}{5}$ セミオンスが、新しい実体であり、この新しい物質が古い物質とともに、1年後の人間の身体を構成することになる。さて、48ポンド $12\frac{4}{5}$ セミオンスは、150ポンドのほぼ $\frac{1}{3}$ に等しいから、人間の身体は、毎年が経過するごとに、その年の初めに持っていた自らの実体のおよそ $\frac{1}{3}$ を失うと言ってよい。したがって、1年後に残る古い実体は、もはや $\frac{2}{3}$ をわずかに超える程度にすぎないのである。したがって、2年が経過すれば、最初の2年分の二つの $\frac{2}{3}$ のうち、わずかにそれを上回る量、およそ $\frac{4}{9}$ が残ることになる。そして、 $\frac{4}{9}$ はほぼ $\frac{1}{2}$ であるから、我々は、2年以内に人間の身体の物質はほとんど半分が消費され、残りの半分が新しい物質によって置き換えられると断言することができる。さらに、 $\frac{1}{2}$ の $\frac{2}{3}$ 、これが3年が経過した後に残る旧来の物質の割合を示す。そしてこのようにして、任意の年数について計算することができる。ただ直前の年に求められた分数の $\frac{2}{3}$ を取るだけでよい。この割合はその後の年々において非常に大きな減少へと向かい、したがって10年後には、現在もっている自分の身体のおよそ $\frac{1}{50}$ の部分しか保持していないであろう。しかしその間も、残存している物質と新たに付け加わる物質の量は、合計すれば常に等しい重量を保っている。またさらに、我々の対数による方法を用いれば、この計算は任意の年数へと直ちに拡張することができる。その方法によっても同様に、10年が経過したときには、ほぼ $\frac{1}{50}$ の部分だけが残存することが見出されるからである。

§ X I X

ここで付け加えておかねばならないのは、先に行った計算において、我々は、人体のすべての部分が等しく一様に体外に排出されるものと仮定していたということである。しかし、骨の体外への排出が、

血液や動物精気などの流動的部分よりも、はるかに遅いことは確かである。ところが、肉やその他の柔らかい部分は、硬い部分と流動的部分とのあいだで、いわば中間の状態を占めており、硬い部分よりは速く、しかし逆に流動的部分よりは遅く消費される。したがって、我々は安全に、しかも目立った誤りなしに、あたかも全身が一つの連続した肉であるかのように仮定してよいのであり、そうすれば、我々の計算は再びその正当性を十分に保つことになる。もし誰かが、これらの事柄をさらに詳細に究明しようとするならば、全身の3種類の物質、骨質・肉質・流動質の重量のあいだ、およびそれぞれの体外排出速度のあいだに、一定の比例関係を設定することができるだろう。例えば、骨格全骨構造を60ポンド、すべての肉および軟部組織の物質を70ポンド、血液および流動的部分の総量を20ポンドと、多くの解剖学者は構造の見積もりを考えている。さらに、流動質は軟質より2倍速く体外排出し、軟質は硬質より10倍速く体外排出すると仮定しよう。同じ時間の間に、等しい量の流動質・軟質・硬質を取ったとき、流動質からは軟質の2倍が失われ、そして軟質からは硬質の10倍が失われる、ということである。さて、軟部・肉・骨の量の比20:70:60、略して2:7:6を、消散速度の比20:10:1と組み合わせると、40:70:6、略して20:35:3という比が得られる。これは次のことを示している。人体の流体質量から20フェムンキア（1オンスの半分）が失われるたびに、肉および軟部組織からは35フェムンキアが失われ、骨の構成からは3フェムンキアが失われるのである。したがって、先に我々が人体全体の年間総消耗量として求めた1548フェムンキアは、20:35:3の比をなす3つの部分に分配されるべきである。すると、それぞれ $534\frac{2}{29}$: $934\frac{18}{29}$: $80\frac{16}{145}$ が得られる。かくして、各部分が1年のうちに影響を受ける損耗量が個別に求められる。体液の質量は $534\frac{2}{29}$ フェムンキアを失い、肉の総量は $934\frac{18}{29}$ フェムンキアを失い、骨の実体は $80\frac{16}{145}$ フェムンキアを失うのである。ここから、肉が最大の損耗を受け、骨が最小の損耗を受けることが明らかになる。

§ X X

ではこの議論を、決して不快ではない一つの考察をもって締めくくろう。ただし、健全な理性が示したもののすべてを嫌うような人々にとっては別かもしれないが。先に我々は、これまで体質のきわめて変動しやすいことを検討してきたこの人物が、その身体機構の修復のために、毎日 $5\frac{3}{25}$ フェムンキアを獲得していることを見た。しかし、人は年齢のある時期には、その $5\frac{3}{25}$ フェムンキアを補うに十分な量の食物を毎日摂取できないことがある。特に幼少期および極度の老年期においてはそうである。もっとも、これら二つの年齢期は人生の中間期と比べればきわめて短い。それでもなお、我々は $5\frac{3}{25}$ フェムンキアからかなりの部分を差し引き、その代わりに4フェムンキアと仮定しよう。人はどの年齢においても、毎日4フェムンキアを自己の身体の実体へと変換しているものとする。では次に、人が一生のあいだに自分の身体の実体へと作り替える物質が、もしすべて一つの塊に集められたならどれほどの量になるかを考えてみよう。あるいは、もし人が毎日、目に見える排泄物だけでなく目に見えない排出物も出しつつ、しかし自分の身体の実体そのものは何一つ失わなかったとしたら、いったいどこまで巨大化するだろうか。この人の寿命を80年と仮定しよう。計算はあまりに簡単なので、算数の初心者すら立ち止まらせることもない程度で、ここでは軽く触れるだけでよい。1年を365日に、毎日身体に加え

られる4フェムンキアを掛けると、年間の身体増加量は1460フェムンキアになる。これをさらに寿命80年分掛けると、総計116,800フェムンキア、32で割って3,650リブラ（1 libra=32 femunciae）となる。これは、その人の一生を通じて身体を構成した物質の総量である。ところが、3,650リブラとは150リブラの塊が24個分に相当する。したがって、もし80歳の時点で自分の身体から何も失われていなかったなら、あるいは失われたものをすべて回収できたなら、その人の身体は、通常の大きさを

$24\frac{1}{3}$ 倍以上も超える巨大さにまで成長していたはずである。そしてこのようにして、もし人がさらに長く生き続けるならば、ついにはその身体の重さは、かのロードス島の巨像の大きさに匹敵するほどにまで達するであろう。そしてもし人間が本当にこのような「成長の技」を身につけていたなら、かつての古代の巨人族のように、山を積み上げて天に届かせ、再び天界の支配権に挑戦するようになるのではないかと恐れるべきである。実際われわれは、そうした力すら持たぬにもかかわらず、なおも自分の能力に見合わない大胆な企てをあえて行い、激しい執念をもって多くの不正をたくらみ、ついには隣人の破滅と滅亡を引き起こしている者たちを目の当たりにしている。だが、お前よ、ティタンのごとき努力で山を動かそうとしながら、結局はネズミしか生み出せぬ者よ、この大胆不敵な者よ、よく聞け。それは、フェードルススの寓話の中で、威張り散らして脅し立てるハエに対して、ロバが返した言葉である。「お前の言葉などで私は少しも動じない。徳も実力もないくせに、空虚な脅しを振り回す者を、私は嘲笑する。」

§ X X I

本来なら、ここで筆を置くべきところであった。しかし、話題そのものの関連性というよりも、むしろ別のある重大な理由が、しばらくのあいだ他人の畑に鎌を入れる本来の分野を離れて発言することへと私を駆り立てるのである。私はこれまで専ら哲学的問題を論じてきたが、だからといって神学の領域においても健全な哲学を用いる努力をしてはならない理由がどこにあるだろうか。むしろ、できるかぎりそうすべきである。ただし常に、信仰の神秘に対してふさわしい敬意を失わないという条件のもとで、である。神は決して無意味に人間をご自身の似姿として創られたのではない。また、人間がすべての理性を放棄して獣のように当てもなく迷ったり、ただ自分の身体という機械の運動に引きずられて行動するために創られたのでもない。いったい誰が、神が与えたこの高貴な理性という才能を、よりもよって神ご自身とその御言葉を知ろうとするときにこそ、土に埋めてしまうべきだなどと言えるだろうか。よく注意せよ、注意せよ。いつの日か、お前がこの才能を誤って用いたことについて、厳しく責任を問われることのないように。そのように悪く用いられたお前の理性の才能のゆえに。私は十分に理解しているし、今さら誰かに注意される必要もない。神がその御言葉の中で私たちに啓示された事柄の中には、私たちの理解力を無限に超えるものが数多くある。たとえば、至聖三位一体、御子の永遠の生成、受肉、死者の復活など、信仰における最も重要な教義がそうである。これらのことを、私はかつて信じ、今も信じており、そして神の恵みによって、これからも常に信じ続けるだろう。神ご自身がそれらを私に啓示してくださったからである。しかし、私がそれらを信じることは、健全な理性に反するのでもなく、理性抜きのことでもない。神は最高に完全な存在であり、無限で、最高に善であり、欺くことも欺かれることもない存在である以上、その誤りえぬ口から出るものは何であれ、信じないわけにはいかないからである。たとえ人間の精神が有限であり、無限の知性を要する事柄を完全に理解し尽くすることができなくても。さてさらに私は、理性によってきわめて明白に次のことを理解している。神はご自身の完全性と矛盾するようなことを、何一つ行うことも語ることもできず、またご自身のうちに最小

の不完全性の痕跡すら示すことができない、ということである。それゆえ、信仰の神秘においてさえ、あらゆる矛盾は存在しないはずである。そしてこれこそが、我らの最初の宗教改革者たちが、無数の矛盾に満ちたローマのバビロンから脱出した、最も重大な理由の一つである。それほどに、啓示された至聖三位一体の神秘から、「一つの神の中に三つの神がある」あるいは「一つの人格的な実体の中に三つの実体がある」と結論しようとする者がいるならば、私はむしろその者を、不敬か、あるいは精神錯乱者と見なすであろう。なぜならこの両者はいずれも等しく不合理であり、明白な矛盾を含んでいるからである。それゆえ、たとえ信仰の奥義がわれわれの理解力をはるかに超えるものであっても、健全な精神には決して反しない。むしろ我々は、それらを用いて、この種の危険な妄想を完全否定すべきである。もし誰かが、そこからこのような馬鹿げた結論を引き出そうとするならば、それほどまでに、啓示された神的真理を説明し、弁明する上で、健全な理性が何の役にも立たないなどということは決してないのである。

§ X X I I

同様に私は、同じ神の権威によって、肉体の復活、しかもまさにこの肉体、人間がこの世の生においてかつて持っていたこの肉体について、強く確信している（「かつて」と付け加える。人は常に同一の肉体を持ち続けているわけではないことを、私は上で十分すぎるほど示したからである）。そして、神がそれを啓示されたのだから、どうして私はこれ信じないでいられようか。ここには何の矛盾も見出さない。もし神がすべての身体を無から創造することができたのなら、すでに創られたそれらを再び集め、そのあらゆる部分がどのように散らばっていようと、それらを再び結合することなど、なおさら簡単におできになるはずだからである。しかし、もし誰か間違いじみた者が、彼自身の空想から付け加えた教義、「神が復活の共通の日に、かつて人間の身体を生涯にわたって次々と構成していたあのすべての物質を、数的に同一のまま復活させるのだ」ということを、私に信じさせようとするなら（このような野蛮な用語は聖書が至るところで忌み嫌っている）、しかもそれは（その物質量）、私が上で示したように、巨大な巨像（コロッソス）の大きさに等しいほどでありながら、復活した身体の身長は通常のままであるという。あるいは逆に、もし誰かが、わずか一スパンほどの大きさしかなく、すでに母胎内で死んだ胎児が、キリストの栄光の身体に等しい身体として復活しながら、しかもそこに新たな実体は何一つ加えられない、などと私に説得しようとするなら、私はその者にこう言い返すであろう。そんな馬鹿げた矛盾は、キノコや切り株にでも振る舞え。あるいは、我らの救い主の身体全体が、どれほど大きくとも、ちっぽけな聖体の空間の中に収まると信じ慣れている者たちにでも持って行けと。確かに、聖書が信すべきものとして求めている以上のことを、私たちに要求すべきではない。

しかも聖書はどこにも、「神が、かつて人間の身体に本質的に属していた物質のすべてを、正確に、増やしも減らしもせず、復活させる」とは述べていない。もし仮にそう述べていたなら、私はそれも喜んで信じるであろう。神にとっては一部分を再現するのと同様に、全体を再現することも不可能ではないからである。しかしその場合、私は、人間が通常の体格で復活するとは否定するであろう。さあ、ここに私は、復活についての私の誠実な告白を簡潔に記した。これは、すべてのキリスト教信者が決して十分と思えるほどには、真剣に思い巡らすことのできないほど重要なことである。復活こそが、この悲惨で、陰謀と混乱と迫害に満ちた現世の生の後に、いつか完全な至福と安らぎを享受するための、私たちの唯一の希望だからである。ああ、悲しいことに！平和と調和を説くべき人々でさえも、絶えず私たちにこれらの苦しみをもたらすことを、ためらいもしないのである。

§ X X I I I

このことから、親愛なる読者よ、あなたは理解するであろう。私が約1年前、公の哲学討論の場でこれらの討論に割り当てられていた2時間がすでに経過してしまい、何かの機会に、通りすがりのように口にした「身体は数的に同一のままでは復活しないであろう」という言葉が、どのような意味で理解されるべきかを。それは、神によってまったく新しい身体が代わりに与えられるという意味ではなく、まして新たに創造されるという意味でもない。そうではなく、私たちが上で、すべての哲学者や医師と共に述べたように、人間の身体は現世の生においてすでに数的に同一ではあり続けられないのと同じ意味において、復活後もまた数的に同一ではない、ということである。とはいえ私は、神が人間にその身体、この世の生において持っていた身体を返されるであろうことを、確信している。しかし、人はその生涯において多くの身体を次々と持ってきたのであり、むしろ、それらすべての中から人が最終的に持つその一つの身体は、それ以外のものと数的に同一であることはできない。それらもまた、復活後に再び与えられるその一つの身体と同じく、等しく自分の身体であったからである。ただし、もし誰かが、すべての自然学者および医師たちの共通の見解に反して、次のような詭弁を弄しようとするなら話は別である。栄養によって身体に同化されるその物質は身体の本質には属さず、身体の本質を成すのは、変化しないある種の繊維や根源的構成要素だけであり、これらによって身体は常に一つで同一であると言われるべきである、たとえその間にも、他の物質が絶えず加わり、また失われていくとしても、というのである。しかし実際には、先に述べたこと、ならびに栄養についての一般的な見解から、次のことはきわめて明白である。動物の全身において、安定していて栄養されない部分など何一つ存在しないのであり、したがって、かの想像上の「原初繊維」なるものすら存在しない。さらに次のようにも反論できる。もし身体に付加されるものがすべて単なる付属的なものにすぎないならば、これらの付属的要素を除いた身体そのものは、知覚不能なものになってしまうであろう。人間の生成のまさに最初の瞬間において、まだ母の卵の中に包まれているその微小な身体は、ただちに成長を始め、外来の物質を自己の実体へと変えてゆくからである。ゆえに、その時点以降のものがすべて付属的であるならば、ゴリアテの「本質的身体」は、すべての付属的要素を取り去ったのちには、ついには目に見えぬ小さな塵の大きさにまで縮小してしまうことになる。さあ諸君、笑いをこらえられるかな！

§ X X I V

そして、私の言葉のこの意味こそが本来の意味であったことは、次の事実から明らかである。あの討論のまさにその場で、私は何度も対論者に向かってこう言ったのである。「君は1年前と同じ身体を持ってはいない」と。これはすべての聴衆が証言できることである。しかし、この点について、私を告発する者たちは、巧妙にも深い沈黙のうちにやり過ごしている。それゆえ、私がその後、ブラウニウス（BRAUNIO）博士のもとで行われた別の討論の場においても、これらの小冊子の中でさらに詳しく説明する必要などなかったのである。したがって、もしこの点に関して何らかの異端が犯されたというのであれば、断じて私一人ではなく、医学者と自然哲学者の全軍が、等しく破門されねばならぬことになる。しかし、私に悪意を抱く者たちは、次のことを私に非難している。私が「ヨブ（JOBUS）が神を見ることになるその目（ヨブ記 XIX 章 27 節）」とは、彼がああ悲惨な状態にあったときに持っていたそのまの目を厳密に指すのではなく、それと同種の目である、と言ったことである。いったいこの中のどこが不敬なのか。どこが異端なのか。むしろ、神がヨブに、少なくとも健康な状態にあったときに持っていたあの目を返されると考える方が、よりもっともではないだろうか。では、これらは同じくヨブの眼ではないのだろうか。あの、耐え難い苦痛によって見るも哀れなほどに変形し、絶え間ない嘆きのため、ほとんど完全に涙の中に溶け去ってしまったかのような眼と。身体のいかなる部分も、眼ほど消耗

にさらされやすい部分はないということは注意すべきだからである。実際、医師たちは、ある人々において、眼の膜が破れ、水様液が眼からすべて流れ出てしまい、その代わりに、ほどなく自然によって別のものが補われた例を観察している。ところが、その水様液は眼の主要部分の一つを成しているにもかかわらず、流れ出たものと、新たに補われたものの両方を、同一の眼が同時に含むことはできない。それならば、同一性をあれほど嫌うあなたは、復活の日に、どちらを彼に帰属させるのか。私としては、これは神の御心に委ねるほかないと思う。神が彼に与えるものが、流出したものであれ、回復されたものであれ、あるいはその眼から知らぬ間に流れ出た他のいかなるものであれ、それは常に彼自身のものを与えたことになるからである。なぜなら、それらはいずれも、かつては確かに彼のものであったのだから。私はこのことをさらに、彼らが私に不利に引き合いに出すヨブ自身の証言によって裏づけることができる。彼は一か所だけでなく、自分の肉が消耗していくことを嘆いているからである。そして、先に引用した箇所からさほど離れていないところで、「わが骨は皮膚に張りついている」と、彼は自分の皮膚について嘆いている。しかしその後、ヨブは、神がのちにさらに豊かに彼を祝福した、身体の他のすべての善きものとともに、完全な健康を回復した。したがって彼は、新しい肉、新しい身体の実体を回復したのであり、それは以前と同一のものではなく、類似したものであった。それにもかかわらず、ヨブはこう言うことができたのである。「そして、わたしはこの肉において神を見るであろう」。なぜなら、その両方の肉はいずれも彼自身のものであったからであり、したがって、神がいずれを復活させるかは、まったく問題にならないのである。

§ X X V

しかし、実体の点では連続的かつ感知されない仕方で変化しているものが、それでもなお同一のものと呼ばれるということは、決して新しいことではない。ただしそれは、同じ形状と形態を保っている限りにおいてである。このような言い方は、一般に行き渡った日常的な言語習慣として定着しており、しかもそれは多くの場合、すべてを感覚からのみ引き出して考える無学な庶民に由来するのである。このことからして、かつてテーセウス（THESEUS）が遠征から無事に帰還した際に乗っていた船は、その偉業の永遠の記念として、長いあいだ保存されていた。しかもその保存のされ方は、老朽化して損なわれた板材がつねに取り除かれ、そのたびごとに新しい材料が補われ続けたため、ついには古い板は1枚か2枚残るかどうかなというほどであった。それにもかかわらず、その船は、つねに「テーセウスの船」という同一の名称を保ち続けていたのである。同様にまた、使用と時間によって徐々に摩耗するすべてのものは、摩耗した部分が修理されると、同一のものとして扱われる。たとえ、元の材料がごくわずかしかなかったとしてもである。そして実に、人間の身体や他の動物の身体についても、まったく同じことが成り立つ。この世間一般の意味においては、それらは何の困難もなく、つねに「同一である」と言うことができる。しかし、世間に従ってではなく、哲学的に、さらには自然学的に、事物の本性に即して語ろうとするなら、テーセウスの船と同様に、人間の身体も、異なる時点において数的に同一のものではなく、ただ類似したもの、種において同一なものにすぎない、と言わねばならない。ここに、いったい何の異端性があるというのか。言ってみよ！哲学者たちは皆、次ように考えているではないか。それならば、いかなる理屈をもって、私を火刑に処すというのか。そして、どんな口実を用いて、彼ら全員をいや法学者たちまでも私とともにその火刑台へ連れて行かねばならないのか。実際、法学者たちも哲学者たちと同意見であって、人間の身体は、日常的な意味では同一のまま存続すると言われるが、厳密には、種においてのみ同一である、と認めているのである。では、どうかコルプス・ユリス・キウリス（Corpus Juris）を開いて、「裁判について」第76法を読んでほしい。アルフェヌス

(ALFENUS) が、きわめて明確な言葉で次のように述べている。「ある事物について、その種が同一であるならば、その事物自体も同一であると見なされる」と。しかも注目すべきことに、彼はこの自分の見解を、人間の身体というこのまさに同じ例や、他の多くの例によって裏づけているのである。それゆえ彼によれば、それは数的に同一のままではなく、種において同一なのである。この点は、後代の注釈家も繰り返し述べ、さらに、テーセウスの船という同様の比喻によって、きわめて的確に説明している。かくして、同じ重荷を私とともに負っている仲間は、これほど多い。だからこそ、共通の災いが、私にとっては慰めとなるのである。

§ X X V I

私はついに、きわめて重大ではあるが、同時にこの上なく不当で、しかも愚劣な告発に行き着いた。先に述べたあのディスプタティオ（討論）における論争の最中、私は他の点と同様に、人肉食（それも常に狂暴なものではなく、時にはやむを得ず行われるもの、その実例として、哀歌IV章10節を参照）から引いた一つの論証を提示したのであるが、当時それがソキニア派の人々によっても用いられていることを知らず、あるいは少なくとも失念していた（神にかけて誓うが！）。ところがそのために、私はたちまち一部の者たちから「ソキニア主義者だ」と告発されてしまった。しかし、それはいったいどのような権利に基づき、どのような公平さに基づくものなのか。私はこの判断を、論理学の初学者にさえ委ねてもよいと思う。彼ならば、彼らの不名誉を明らかにする形で、三段論法の第二格においては、肯定的結論は導き得ないことを、よりよく理解しているはずだからである。この場合の三段論法「ソキニア派の人々はこの論証を用いている。私もこの論証を用いている。ゆえに私はソキニア派である。」世間で学校教師（ルディマギステル）が生徒たちを試すために教室でよく持ち出す、次のような別のものよりも、少しもましではないからである。「ロバは耳を持っている。そして、君も耳を持っている。ゆえに、君はロバである。」しかも私は、その場ですぐに、これと同様の別の三段論法を用いて、先の推論がいかに空虚で無価値であるかを、聴衆に明らかにしてみせたのである。この種の学校的なつまらぬ詭弁はさておき、私は次のように述べたことを覚えている。正統派の者と異端者とは、同一の論証を用いることがあり得るが、前者は正しく、後者は誤ってそれを用いるのである。前者は真理を打ち立てるために、後者は誤りを覆い隠すためにそれを使う。私が言いたいのは、この論証を、ソキニア派の人々が用いるのとは、まったく別の仕方で私は適用している、ということである。私とその論証によって示そうとしているのは、ただ次の一点に尽きる。ある人間の身体をその生涯を通じて構成してきたすべての実体が、その人とともに復活するわけではない、ということである。その実体のある部分は、人肉食によって他の人間の身体へと変換されてしまうからであり、その場合、それが両者とともに同時に復活することは不可能だからである。この点については、あなたも疑いなく簡単に認めてくれるはずである。ある一つの身体が、明白な矛盾なしに同時に二つの場所に存在し得るなどと主張する者は、誰一人としていないからである。ここで私は、念のために（話をいっそう確実にするために）、一人の人間の肉が別の人間の肉へと目に見えて変化する例を挙げることもできる。それは、私が読んだ覚えのある、あるイタリア人医師タリアコーツィ（Taliacozzi）についてである。この人物は、鼻を切断された人間に対し、別の人間の腕（上腕）から巧みに切り取った生きた肉片を移植し、見事に新しい鼻を付けるほどの高度な技術を有していたという。しかもその肉を提供した者は、痛みと自身の肉の損失に耐える対価として、金銭を受け取って雇われていたのである。もしこれが真であり、しかも可能であるとすれば、そうであることはあり得るのだが、あなたも私とともに、次の点を認めてくれるだろうと思う。ある人間から切り取られ、いわば他人へと移譲されたその肉片は、両方の人間とともに復活することはな

い、ということである。その一方で私は（この論証の力を損なうことなく）、次のことを強調のために太文字で繰り返しておく。**私とともに復活する身体は、私がこの世で持っていた、私自身の身体である。**これ以上、何を求めるといえるのか。私に、聖書以上の知恵を持てと言うつもりなのか。いや、もしあなたが、自分の論理学からせめて次のことだけでも学んでいるならば、全称肯定命題は単純には変換できない（A 命題は換位できない）ということ、次の結論が導かれないことを、私とともに認めよ。ゆえに、この生において次々に私の身体を構成したすべての物質が、私とともに復活する。私はすでに、その結論の不合理さを示したからである。では、私がここで、古代の教父たちのうちの数名、その中にはアウグスティヌス（AUGUSTINI）自身も含まれるが、復活する身体は、体液を欠き、血を含まないものになる、という彼らの見解を持ち出したとしたらどうだろうか。しかも、血液やその他の流動的部分は、腕や脚よりもはるかに身体にとって本質的であるにもかかわらずである。その場合、あなたは彼らを、数的同一性を否定したという理由で、異端だと告発するつもりなのか。

§ X X V I I

さて一方で、ソキニア派の人々が人肉食の論証を用いるのは、彼ら自身の忌まわしい教義を、ある種のもっともらしい粉飾で覆い隠すためである。彼らは、その論証によって、復活においては、単に新しい身体が代置されるだけでなく、神によってまったく新しい身体が創造されなければならない、ということ論証できると信じているからである。だが、私がいつそんなことを定めたというのか。出てこい、かわいらしい御仁よ、誰であれ、平然とした顔で、私がまったく覚えもなく眠りこけている間に、これほど大きな異端を私に焼き付けようとする者よ。そして、私がそれを言った、又は書いたということを、証明してみせろ。私が、新たな身体が新しく創造されるなどと言うだろうか。それどころか、私はまさにその同じ日に、3度も4度も繰り返してこう述べたではないか。身体は新しいものにはならない。それらは、宇宙の創造主によって、今からほぼ6000年前にすでに創造されていた、まさにあの同じ身体なのである。ところが彼らは、この点をまたもや狡猾に黙殺する。それは、ソキニア派の人物像を捏造するのに、この点が、槍にタイム（月とスッポン）を結びつけるのと同じくらい不釣り合いであるからにはほかならない。さらに、ソキニア派の教義をより深く吟味するならば、彼らが死者の復活そのものを完全に否定していることが分かるであろう。この点を、最初にきわめて見事に見抜いたのが、著名なブラウニウス（Braunius）である。彼らによれば、魂とは純粋に物質的なものであり、しかもそれが身体およびその体液や精気の、ある一定の濃度ないし調和の中に成立すると、実に滑稽な仕方では主張しているからである。ところが、その身体が死ぬ、あるいは消滅するならば、その気質も消滅し、それに伴って魂そのものも死ぬか、消滅せざるを得ない。したがって、彼らが妄想するように、もし復活に際して新しい身体が創造されるのだとすれば、その身体とともに、新しい気質、新しい体質構成、ひいては新しい魂が創造されることになる。そうなれば、それはもはや完全に新しい人間である。ゆえに、死んだその人間が復活するのではなく、別の人間が創造されるだけである。したがって結論として、ソキニア派は、人間の復活を全面的に否定しているのである。

§ X X V I I I

私は、弁明書を書こうと決意していた。そこでは、私が他の正統派の人々と常に共有してきた復活についての自分の見解と、ソキニア派の見解とのあいだには、ラザロ（Lazarum）と富める大金持ちとのあいだにある隔たりに劣らぬほど大きな断絶がある、ということ、より詳しく示すつもりであった。しかしその間に、この点については、高名なるフルシウス（Hulsius）がすでに私に代わって取り組んでくれていた。しかも彼は、精力的な神学者として、（本来この分野を職業としない私などより）はるか

に見事に、ソキニア派の詭弁を吟味し、論破し、完全に打ち払ってくれたのである。それゆえ私は、読者諸氏を、彼が最近行ったその討論の読解へと委ねる。そこでは、ソキニア派の仮面があまりにも巧みに剥ぎ取っているため、私とソキニア派とのあいだにある、あの忌まわしいほどの大きな相違が、何の困難もなく見て取れるであろう。したがって私は、ここで最も敬愛する同僚に対して感謝の意を表明せずにはいられない。彼がこれほどの労苦をもって私の負担を軽くし、私の正統信仰を、押しつけられた愚かな誤った考えから、これほど力強く擁護してくれたからである。私にはどうしてもそのようなことになるのか分からず、また大いに不思議に思っている。噂によれば、ある人々が、あたかも彼が、滑りやすいプロテウスのような、変幻自在の詭弁家を名指しして非難する際に、ソキニア派だけでなく、哲学者たち、さらには何よりもまず私自身をも含めて意図していたかのような、不当な解釈をしているからである。しかし私は、そんなことをどうしても信じる気になれない。第一に、その著名な人物は、その率直な人柄からして、私に加わることを大いに誇りとしている数学者たちが、確實性・堅実性・明証性のみを愛し、プロテウスの・詭弁家的な滑稽なごまかしを徹底して排斥する人々であることを、よく理解しているはずだからである。さらに加えて、彼の私に対する格別な厚意が、そのようなことを彼について少しでも疑わせることを許さない。とりわけ、ほぼ1年前、彼自身の家で、私が少し前に復活について公に述べたことを、全面的に説明する機会を与えられ、その説明を聞いた後で、彼は私をあらゆる異端の嫌疑から完全に無罪と認めてくれたからである。そればかりか、私が願い出たとおり、私の言葉を曲解した他の人々に対しても、忠実に私の弁護を引き受けると約束してくれた。そして、私の説明の中で彼が気に入らなかった点はただ一つ、数的に同一というあのスコラ学的な用語を、私が通常の意味とは異なる仕方で用いていたと彼が考えた点だけであった、と彼は述べたのである。

§ X X I X

私は、この自由な自己弁護と、きわめて不当に私に帰せられた異端の嫌疑を、まったく正当に払いのけるこの説明が、信心深いすべての人々と公正な裁き手たちを完全に満足させ、そして無実の者の自由な声を聞くことを恐れる者を除いては、誰の不興も買わないであろうことを望んでいる。私は長いあいだ沈黙していた。キケロ（CICERONE）とともに、真理には大きな力があり、それは人々の気質や狡猾さや抜け目なさ、さらにはあらゆる作り事の陰謀に対しても、簡単に自らの力だけで自らを弁護するものだ、と考えていたからである。しかし、私の沈黙と忍耐は、ある者たちの無礼な振る舞いによって破られた。彼らは、悪くも静かにさせられた火を再び掘り起こして燃え上がらせ、私を一度も見たことがないまま告発し、一度も話を聞かないまま断罪するのである。ああ、なんということだ、神よ！これはいったい、どんな手続きの仕方なのか。太陽の下に、あのよく知られた「相手の言い分も聞け」という原則をまったく顧みないほど、野蛮な民が存在するというのか。それとも、怪物を生むリビアの地がそのような人間を養っているのか、あるいは未開の西方アメリカ、隣接するカリフォルニアなのか。どこに誠実さがあるのか。どこにキリスト教的愛があるのか。仮に、私が誤っており、議論の熱のあまり、適切とは言えない言葉を一つ口にしてしまったのだとしても、それで直ちに悪意ある解釈をなすべきだったのか。それで即座に、街路を駆け回って触れ回り、声高に非難し、深く印象が刻み込まれやすい無学な民衆に向かって、私が異端者であると説き伏せねばならなかったのか。それほどまでの大仰な悲劇を仕立て上げ、上下を完全に取り違える必要があったというのか。もし彼らがこれを、燃えるような信心深さの熱意から行ったのだとしよう。もし彼らの目的が、あらゆる異端の種を根こそぎ引き抜き、踏み潰すことにあったのだとすれば、それはなんと立派なことであり、なんと称賛すべきことだろう。しかしそのための十分に大きな仕事は、ほかにいくらでもある。彼らがその舌と筆を研ぎ澄まし

て、数多くの異端書に向けるならばである。それらの書物は、キリストの囲いを荒らす狼のように、何の罰も受けずに世の中を徘徊しているのだから。だが、兄弟を正すためには、別の道が用意されている。迷い出た羊は、皮を剥がれるべきではなく、連れ戻されるべきなのだ。これこそが、善き牧者（理想的な指導者）の務めである。慈愛の法は守られねばならない。これはイエス・キリストが、マタイによる福音書 XVIII 章 15 節および 22 節、ルカによる福音書 XVII 章 2 節および 4 節で定められたものである。そして、「罪が公然と犯されたなら、公然と戒められるべきだ」と言うべきではない。友の私的な諫めにも耳を貸さない者は、公的な叱責や暴力的な懲罰によっては、なおさら改められないからである。一度悪名を負ってしまえば、その者はすべての忠告を軽んじてしまう。本来なら、ただ不名誉になることへの恐れだけが、その人を罪から引き離していたはずなのに。キリストの規則を、はたしてその弟子たちは聖なる仕方で守ってきただろうか。兄弟たちを公然と叱責するのではなく、悪く言いふらしたり、切り捨てたりすることによってではなく、むしろ彼らを得るという仕方で。また、異端の疑いをかけられながらも、公に自己を説明し、潔白を証明しようとした者を、彼らは誰一人として妨害したり混乱させたりすることはなかった。それどころか、疑いから解放されたことを喜び、両腕を広げて迎え入れたのである。おそらくこのような忠告も、また前に述べたすべてのことも、まったく快く思わない者が 1 人か 2 人はいるだろう。そういう者は、たやすく反論を書き散らしたいというかゆみ（自己顕示欲）に取りつかれるに違いない。実際、私はよく知っている。ほかに名を挙げる道を持たないため、取るに足らないからし粒（つまらない論点）の中にでも月桂冠（榮譽）を探し求める者が多くいることを。しかし、このような仕方で何かが世に出たとしても、その作者は心得ておくがよい。私はそれを、犬に吠えかけられたのと同じくらいにしか気につけない。私はすでに一度、自分の無実を全世界に向けて明らかにし、しかも公開討論によってそれを擁護した。それで私には十分だからである。残された時間については、これまでと同じく、私が身を捧げているこの最も高貴な学芸から、何か新しく有益なものを世に送り出すことに用いるほうが、取るに足らぬ小人物たちの哀れな争いを、際限なく叩き潰そうとして油と労力を無駄にするよりも、はるかによい使い方だと思う。実際、他人の徳を妬むというのは、この時代特有の一つの病であり、汚点である。だが、美しいのは、嫉妬深い者たちの中傷を、品行の潔白さによって晴らし、自らの徳の模範によって、たとえ沈黙していても他人の悪徳を責め立てることである。

著者による付録文書

I、最近私が、学術的儀式として、学問上の他の諸演習が通常行われる場所、大学の聖堂（アカデミーの神殿）の聖歌隊席において実施した実験によって、「神の神殿が冒瀆された」などとわめき立てる者がいるとすれば、その者は、正気を失っているか、さもなければ、われわれとわれわれの学問研究に対する自分の憎悪と悪意を、卑劣にもさらけ出しているにすぎない。

II、実験用器具を購入するために多額の資金を提供してくださっている、高貴にして最も有力なる閣下方の寛大さを非難する者は、その恩恵にあずかるに値せず、きわめて無知な学問嫌いに見なされるべきである。

III、神の力と知恵は、その御業を観想することほど、感覚に明らかに示されるものはない。そして、その御業を最もよく観想し得るのは、その本性を探究する哲学者と数学者にほかならない。それゆえ、哲学と数学をあれほどまでに嘲笑し、嘲り立てて、重大な事柄において何の役にも立たないかのように扱う者たちは、まことに嘲笑されるに値する。

No. LIV

1699 年 8 月 7 日、フローニンゲンにおいて書かれた、ヨハン・ベルヌーイ氏の書簡からの抜粋

私は、ニコラ・ファティオ・ド・デュイリエ (FATIO DUILLERIO) 氏によって刊行された小冊子の最初の 2 枚刷り (王立協会会員ニコラ・ファティオ・ド・デュイリエによる最短降下線の二重の幾何学的研究。これに加えて、抵抗が最小となる回転体についての幾何学的研究を付す。ロンドン刊、4 折判。) を受け取ったが、彼が用いた書きぶりには、いくら驚いても足りないほどであった。彼は、私が彼にその問題 (No. XXXIII を参照) の写しを送ることを良しとしなかったと不満を述べている。しかし答えは簡単である。私は、そのようなものを 1 人 1 人に送る義務など負っていないし、また彼がどこに住んでいるかを予知できたわけでもない。そして、私がアイザック・ニュートン (NEWTONO) 氏に写しを送ったのは、彼を競争に挑発するためではなく、この事柄を他の人々にも知らせるためであった。彼は、私を控えめさに欠ける者であるかのように非難しているが、どうやらそれは謙虚さの影に隠れて、「もし自分が何らかの招待に値すると見なされていたなら、自分もとっくに手紙によって解答を提示していたのだ」と我々に信じさせようとしたもののようである。まるで、自分さえ本気で取り組むことを良しとさえすれば、たちまちその秘奥を暴いてみせたかのように。しかし彼は、どれほど長い時間を無駄に汗して費やしたのか、またこの件のためにどれほどの労苦を払ったのかについては、我々に何も語らない。実際のところ、私はファティオの小冊子について何か知るよりも前に、最近イングランドから来た、信用のおける人物から次のことを聞いていた。デュイリエは、イングランドにいた外地人の友人とともに、およそ 2 年前に、この問題が早くも彼のもとに届いていたことから、大なる意気込みをもってこの問題に取り組み、2 人が競い合うようにしてこれに労したというのである。その友人のほうは、事を成し遂げないまま最初に脱落し、そしてデュイリエも、長いあいだ十分に徒労を重ねたのち、ついには武器を捨てた (挑戦を断念した) のであった。しかし、彼はずっと後になってから、このいったんは見込みなしとして放棄された問題を再び取り上げ、それに激しくかつ粘り強く食らいついた。しかし、彼がそれを完成させたかどうかについては、報告者は知らなかった。確かに、もし謙虚さが原因で、人が自らの発見を公にすることを妨げられるのだとすれば、誰一人として公共の利益のために何かを公表することはできなくなる。この場合、そうした行為はすべて不謙虚であることを欲しななければならないからである。もしまた、自分の名を明かすことが自慢であると言うのなら、なぜ彼自身は、懸垂線・帆形曲線・等時線など、より困難な諸問題についての自分の解法や方法を、長いあいだ自分はそれらを持っていると言っているのに、自分の名を伏せたまま、公の利益のために公表しないのか。彼が実際に公にした解答そのものについて言えば、この種の問題は、我々のやり方で扱うかぎり、まったく計算を要しないか、せいぜいごく短い計算しか必要とせず、あるいは、無限小の純粋な考察から、一定の巧みさを加えることで自然に導き出されるものであった。しかし、彼が行った計算は、きわめて複雑で、それを吟味しようとしても、私は自分にそれを許すことができなかった。彼は、最小抵抗の曲線 (回転体) の問題を、最速降下の問題よりも、探究においてはるかに困難なものだと呼んでいるが、真の解法を持っていなかったデュイリエにとってだけであろう。私はこの問題にかくも大きな簡単さを見いだしたので、その解答のために、まったく計算を要しなかったからである。実際、紙も筆も手

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1699 年 11 月号 P.513

元がなく、床に伏して横になったまま、想像力だけの力によって、これを完全に解いてしまったのである。

図1に示すBFNを、求めるべき曲線とする。この曲線がBMを軸として回転することによって立体を形成し、その立体が軸BMの方向に運動するとき、抵抗が最小となるものとする。軸に下ろした垂線NMの要素を、等しい部分NR,RPに分割したものとする。これらNR,RPに対応する曲線上の二つの要素をNL,LFとする。RLをOまで延長し、LOがRLに比して無限に小さくするようにする。NOおよびFOを引けば、極小性の性質から、曲線要素NLF（これは直線NL,LFの二本から成るものとして考える）の回転によって生じる回転帯（ゾーン）における抵抗は、直線NO,OFの回転によって生じる回転帯の抵抗に等しい。したがって、帯NLにおける抵抗は……（以下続く）。回転帯NOにおける抵抗は、回転帯FOにおける抵抗から回転帯FLの抵抗を差し引いたものに等しい。さて、一般に仮定されている仮説、これはニュートンも「プリンキピア」P.325以下（自然哲学の数学的原理（プリンキピア）、第II巻・第VII節・命題34）で用いているものであるが、斜め方向の抵抗（NLにおける抵抗）は、軸に直交する方向の抵抗（NRにおける抵抗）に対して、 $NR^2 : NL^2$ の比になるという仮定を採用すると、曲線の要素、たとえばNL自身の抵抗は $NR^3 : NL^2$ によって表されることになる。したがって、回転帯NLの抵抗は $MN \times NR^3 : NL^2$ によって表される。したがって、次の関係が成り立つ。

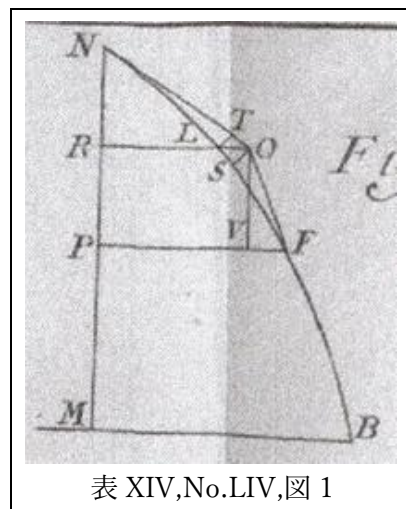


表 XIV, No. LIV, 図 1

$$MN \times NR^3 : NL^2 - MN \times NR^3 : NO^2 = MR \times RP^3 : FO^2 - MR \times RP^3 : FL^2$$

さて、CTおよびLSは、それぞれNOとNL、またLFとOFの差であるが、これらの差はそれぞれに比して無視できないほど小さい。それゆえ、

$$MN \times NR^3 : NL^2 - MN \times NR^3 : NO^2 = 2MN \times NR^3 \times TO : NO^3、同様に$$

$$MR \times RP^3 : FO^2 - MR \times RP^3 : FL^2 = 2MR \times RP^3 \times LS : FO^3。$$

したがって、これは先のものに等しい。そして $2NR^3$ および $2RP^3$ で割ると、

$$MN \times TO : NO^3 = MR \times LS : FO^3 \text{ が得られる。}$$

しかしTOとLSは、他の量と比べて無視できるほど小さい量であるので、これらを消去するために次のことを利用する。相似三角形より $NO : RO = LO : TO$ だから、 $TO = RO \times LO : NO$ となる。同様の理由により、 $LS = VF \times LO : FO$ である。そこで、TOとLSの代わりにこれらの値を代入し、さらに共通因子LOで割ると、 $MN \times RO : NO^4 = MR \times VF : FO^4$

という、要素量のみから成る方程式が得られ、しかもそれぞれ対応する垂線について成立する。以上から私は、求める曲線BFNは次のような性質をもつことを結論する。対応する要素および対応する縦座標が等しいと仮定すると、任意の縦座標に対応する横座標の要素で掛け、さらにその曲線に対応する要素の4乗で割ると、一定の量が得られる、という性質である。したがって、この定数は、次元の整合を保つかぎり、任意に取ってよい。ここから、BMを x 、MNを y 、 $NR \cdot RP$ などを dy 、ROを dx 、

$NO \left(= \sqrt{dx^2 + dy^2} \right)$ を ds と呼ぶことにすると、 $ydx : ds^4$ に対応して仮定された、一定でかつ同次的

な量は $a : dy^3$ となる。これを整理すると、 $ydy^3dx = ads^4$ という1次の微分方程式が得られ、これが求める曲線の性質を表している。なお注意すべきは、この曲線の性質が、アイザック・ニュートン氏によって、解析も証明もなしに（P.327において）提示されているが、それを解いてみると、私がここで得

たものと完全に同一の方程式を与えるという点である。私は、デュイリエ (DUILLERIUM) が自分の方法を「より単純である」とし、著者の方法を「より複雑にしている」と言っていることに驚かざるを得ない。実際にはこちらの方法こそが、彼の方法を簡単に導き出すことができるのに対し、その逆は、きわめて大きな困難なしには不可能だからである。彼は、接触円の半径という既知の性質から、接線の性質へと到達することが簡単ではないであろう。しかしその反対に、接線の性質からは、何の労苦もなく、接触円半径の性質が明らかになるのである。

しかし、なお最大の困難が残っている。すでに見いだされた性質、あるいは方程式から、実際の作図をどのようにして引き出すか、という点である。ここに対数だけを仮定する、十分に優雅な作図法がある。軸 CE (図 2) に対して二つの曲線を描く。一つは代数的曲線 DAH、もう一つは超越的曲線 IK である。その規則は次の通りである。軸 CE 上に横座標 m を取ったとき、前者 (代数的曲線) の縦座標 EH は $EH = m^3 : aa + 2m : aa : m$ 、となり後者 (超越的曲線) の縦座標 EK は $EK = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$ 、となる (ただし lm は m の $\log$ を表すものとする)。このとき KE と EH が、求める曲線の座標となる。

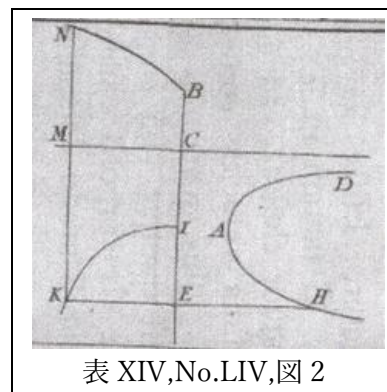


表 XIV, No. LIV, 図 2

したがってこの曲線を作図するためには、次のことだけで足りる。CM に平行な線を引き、それを軸とみなして、そこから垂線 KM を引き延ばして点 N とし、MN が EH に等しくなるようにする。点 N は求める曲線 BN 上に位置する点だからである。この曲線は CN のまわりに回転させると立体になり、その立体の中を軸 CM の方向に沿って運動する流体は、最小の抵抗しか受けない。以上で作図は完了する (証明終わり)。そしてその曲線 (IK については No. LVL の末尾を参照) の方程式は、超越的な指数方程式となる。 $m^{4a^3la} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3x}$ ここで la は a の対数を表す。

追伸。 これら後続の行を書いている最中に、私は添付された書類とともに、あなたの第 2 信を受け取りました。ざっと目を通して、ドゥイッレリウス (DUILLERIUS) の書いた文書の最後の小頁を見ると、私のものと多少の類似をもつ作図法を見いだしました。しかし、今はそれを詳しく検討する余裕はありません。ただ少なくとも確信しているのは、彼が自分の解法だけからこの作図を見いだしたのではなく、ニュートンの性質の助けを借りたに違いないということです。もし彼が、そこに至るまでに用いた方法を付け加えていたならば、そのことは明らかになったはずです。いずれにせよ、あなたはご覧のとおり、私がこれらすべてをいかに短時間に、いかに手際よく処理したかがお分かりでしょう。あなたの先の手紙を、ファティオ (FATIUS) の図面とともに受け取ってから、すでに 3 日が経っているからです。それらの図面が、私がこれらの今回の考察を書くきっかけとなりました。しかし私は、ファティオがこの問題に注いだ膨大な労力には驚かされます。彼は、彼の言うところのより大きな紙に図を描いただけでなく、計算によって丸ごと一つの表を作り上げているのですから。さて、彼自身の言葉をそのまま返すことができるようにしよう。私は、跡を追うやいなや直ちに競技場に降り立ったからである。たしかにこの問題は、著者がそれを解くために都合な余暇を得て、長く取り組み、汗を流し、愛着をもって、いっそう熱心な研究心で追究してきたものであり、それが私にはこれまで知られぬまま、書物の中に隠れていたのである。それでもなお、この問題は私を即座に捉え、私はすぐに取りかかった。もっとも、そのために自分本来の研究を放棄したわけではないが。そして同じことは彼自身にもできたはずである。もし彼が、自ら主張するほどに、我々の方法を自由に使えたのだとすれば。

No. LV ロピタル侯爵

軸に沿って運動するとき、同じ長さと同幅をもついかなる他の物体よりも、抵抗する流体から受ける抵抗が最小となるような回転体を見いだすための、簡単で簡明な方法。

最近、ファティオ (FATIO) 氏が、果樹を支え、より好ましい日照に向けるのに最も適した「壁の傾斜」について自ら著した書物を、贈り物として私に送ってくれた。これはロンドンで最近出版されたものである。その巻末に、私は「流体抵抗が最小となる回転体」に関する問題の解法を見いだした。もっとも、この回転体の性質の一つについては、すでに博学なるニュートン氏が、その精緻な著作「自然哲学の数学的

原理」P.327 (第 II 卷 VII 節 34 命題の注釈) において指摘していた。しかし、その形状を見いだすための手法は同書では秘されているため、そこから新たな光明を期待することはできないと、高い学識を備えたファティオは考えている。いずれにせよ、彼がここで見いだした同一曲線の性質は、彼がニュートンの道とは異なる道筋をたどったことを明白に示している。そこで私は、きわめて洞察力に富むニュートンのその方法を探究しようと思立った。しかも、その期待は無駄ではなかった。私も彼と同じ、求める曲線の性質に到達したからである。さらに、私が用いた方法はきわめて簡単であるので、喜んでこれを公開する。この方法は、同種の他の多くの問題を解くのにも役立ちうるからである。それでは、始めよう。

ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum
の 1699 年 8 月号 P.354
パリ王立科学アカデミーの 1699 年
P.107
パリ版 P.147
オランダ版 (該当箇所)

問題

曲線 DM を見つけ出すこと。これを軸 AL のまわりに回転させると、ある立体の表面が描かれるが、その立体は、静止した流体中で、軸の方向に L から A へ向かって運動する際、同じ点 D と M を通り、同じ比率で描かれ、かつ同様に運動する他のいかなる立体よりも、受ける抵抗が小さい。

解法、直線 MN と NO を、求める曲線を構成する無限多角形の二つの辺であると仮定する。次に、MP と NQ を軸 AL に対して順に下ろし、これに平行な直線 GNF を引く。この直線には、OG と MF がいずれも直角に交わるようにし、また直線 DM も辺 MN に対して直角に交わるものとする。

以上の準備が整うと、直線片 MN と MF が、軸の方向に L から A へ向かって運動する場合、それらが流体から受ける抵抗力

は、これらの直線片が静止していて、同じ速度で流体のほうへ A から L へ向かって流れる場合に、当の流体がそれらに及ぼす作用力と等しいことが分かる。さて、この場合、A から L へ向かって直線 FM を押し進める流体の力は、同じ流体が M から D へ向かって直線 MN を押す力に対して、ちょうど MD が DP に対する比である。さらに、この MD 方向の力の作用は、同じ流体が A から L へ向かって MN に及ぼす力に対しても、MD が DP に対するのと同じ比をなす。したがって、順次これらを掛け合わせると、A から L へ向かって FM を押し進める流体の力は、同じ向きに MN を押す力に対して、 DM^2 が

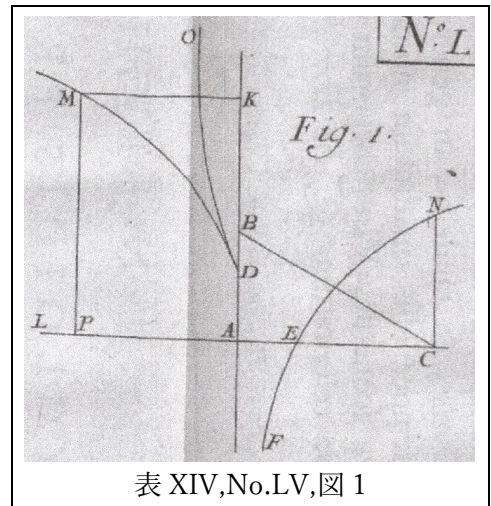


表 XIV, No. LV, 図 1

DP^2 に対する比、(相似な三角形 DPM と MFN によって) MN^2 が FM^2 に対する比に等しいことになる。ここから、直線 MN および MF に衝突する流体の速度を一定量 $AB (=a)$ で表すならば、FM を軸 AL のまわりに回転させて得られる、平面でしかも運動方向に垂直に向かう表面に流体が及ぼす全作用力は、その表面積に速度 a を掛けた積に等しいことが明らかとなる。半径

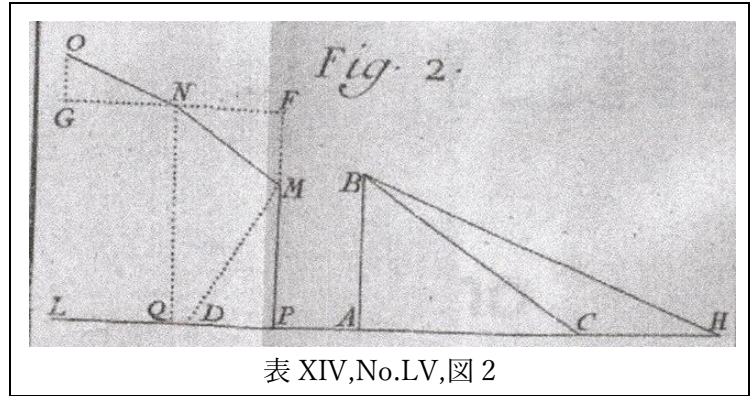


表 XIV, No. LV, 図 2

を a とする円の周長を c とすれば、その力は $c \times MF \times MP$ に等しい。したがって、 $MN^2 : MF^2 = c \times MF \times MP : c \times MF^3 \times MP : MN^2$ となるならば、このとき得られる第 4 項は、A から L の方向へ流体が押し付ける力、MN を AL のまわりに回転させて得られる表面に作用する流体の圧力をもまた表すことになる。あるいは、 $c \times MF^3 \times MP : MN^2$ という量が、その表面が実際には反対方向へ運動する部分をもつことによって、静止している流体から受ける抵抗そのものを示すのである。同様の理由によって、NO を AL のまわりに回転させて生じる表面が、同じ流体から受ける同種の抵抗もまた、 $c \times OG^3 \times NQ : NO^2$ によって表されることが分かる。

さてここで、点 M と O、および直線 GF が、いずれも軸 AL と同一平面内にあり、その位置が与えられていると仮定する。その上で私は、直線 GF 上のどの点を N と定めるべきかを問い求める。もし MN と ON という二つの直線が点 N において交わり、それらを AL のまわりに回転させて生じる表面が、流体抵抗を最小に受ける。あるいは少なくとも、直線 GF 上の他のいかなる点で両直線が交わる場合よりも小さな抵抗しか受けないようにするには、その点 N はどこに置かれるべきか、という問題である。

さて、この点 N を求めるために、次のように定める。 $MF = m, MP = f, OG = n, NQ = g$ を定数、 $FN = v, NG = t$ を変数とする。直角三角形 MFN および OGN より、 $MN^2 = mm + vv, NO^2 = nn + tt$ が成り立つ。したがって、先に求めた $c \times MF^3 \times MP : MN^2$ で表される抵抗、MN を AL のまわりに回転させて生じる表面が受ける流体抵抗は、 $cm^3 f : (mm + vv)$ に等しくなる。同様に、 $c \times OG^3 \times NQ : NO^2$ で表される、辺 NO を AL のまわりに回転させて生じる表面が受ける抵抗は、 $cn^3 g : (nn + tt)$ に等しい。以上、および問題の条件から、 $cm^3 f : (mm + vv) + cn^3 g : (nn + tt)$ が最小でなければならない。したがって、無限小解析(微分法)の教えに従い、その微分は 0 に等しく置かれねばならない。これを行うと、 $2cm^3 f v dv : (mm + vv)^2 = -2cn^3 g t dt : (nn + tt)^2$ が得られる。さらに、直線 GF 上では $v + t$ が一定である(点 M と O が固定されているため)ことから、 $dv = -dt$ になり、 $m^3 f v : (mm + vv)^2 = n^3 g t : (nn + tt)^2$ が成り立つ。そこで、軸 AL に垂直に $AB = a$ を引き、BC および BH を、無限辺多角形の辺 MN および NO にそれぞれ平行に取るならば、 $4AB^2 \times AC : BC^2 = BC : MP$ かつ同様に $4AB^2 \times AH : BH^2 = BH : NQ$ が成立する。このように配置すれば、 $m^3 f v : (mm + vv)^2 = a : 4 = n^3 g t : (nn + tt)^2$ となるからである。

したがって、求められている曲線 DM の性質、本性は次のようなものであることが分かる。軸 AL に垂直な直線 AK 上において $AB = a$ を取って定め、さらに曲線上の任意の点 M における接線に平行な直

線 BC を引くとき、どこにおいても $4AB^2 \times AC : BC^2 = BC : MP$ という比例関係が、その点 M に対応する適用線 MP において成り立つ。

そもそもこの曲線の性質は、接線のみに基づくものであって、その表現において必要とされるのは1次微分だけにすぎない。したがって私は、ファティオ氏が主張するように、これよりも単純なものが、彼自身の提示した方法にあるとは、決して信じない。彼の方法は接触円の半径を含み、2次微分を用いるものであるのに対し、私たちには1次微分で十分だからである。さらに付け加えるならば、すでに見いだされたこの性質から、曲線の作図は自然にそのまま導き出され、しかもそれは双曲線の求積のみに依存する。この問題において、これ以上に単純なものがあり得ようか。さて、この曲線は次のようにして作図される。

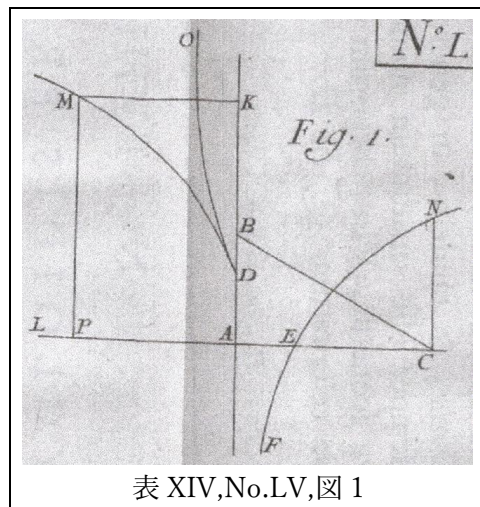


表 XIV, No. LV, 図 1

軸 AL に垂直な直線 AK 上に、線分 $AB = a$ を取る。また、軸 AL 上で点 A の方向に $AE = \sqrt{\frac{1}{3}}aa$ を取る。次に、この点 E を通り、漸近線を AK にもち、サブタンジェントが a に等しい対数曲線 FEN を描く。さらに、AC を任意の大きさとして取り、これを z と呼ぶ。そして点 C から AK に平行な直線 CN を引き、対数曲線と点 N で交わらせる。次に、AK を

$AK = aa : 4z + \frac{1}{2}z + z^3 : 4aa$ とし、AP を $AP = zz : 4a + 3z^4 : 16a^3 - \frac{5}{48}a \pm CN$ と定める（ここで CN は、 $AC > AE$ のときは $-CN$ を取り、 $AC < AE$ のときは $+CN$ を取るものとする）。そして、平行四辺形 KP を完成させるならば、その頂点 M、辺 KM と PM の交点は、求める曲線 DM 上の点となる。

さて、 $AC=z$ を一定のままにしておき、さらに $AP=x, PM=y$ とおくと、すでに得られている曲線の性質から、AK および $PM[y] = (a^4 + 2aazz + z^4 : 4aaz)$ が得られる。したがってその微分は

$dy = \frac{1}{2}dz + 3zzdz : 4aa - aadz : 4zz$ となる。一方、仮定により BC は点 M における接線に平行である

から、同様に $dx = zdy : a = zdz : 2a + 3z^3dz : 4z - adz : 4z$ を得る。この式を積分すると、

$AP[x] = zz : 4a + 3z^4 : 16a^3 - (adz : 4z) \pm a$ となる。この積分定数は、CN が消失するとき、つまり

$\int adz:4z$ に対応する補正項が消えるとき、 $AP[x]$ も同時に消失するように定められる。したがって (以下同様に結論が続く)。

ここでさらに注意しておくのは、曲線 DM は、点 D（直線 AK と交わる点）において以上に軸 AL に近づくことができない、ということである。しかし一方で、AC が AE より小さい場合には、凹みの向きが反対になった別の曲線部分 DO が描かれる。したがって、求める立体（回転体）は、凸にもなり得るし、同様に凹にもなり得るのであり、これは注目に値する事実である。そしてここから次のことが分かる。ファティオ（FATIO）氏はこの曲線の作図において $AE = a$ と仮定し、AC を常に AE より大きく取っているため、彼が曲線上で最初に定めた点は、その曲線の中で最も軸に近い点ではなく、この著者によって描かれているのは、曲線の凸の部分だけである、ということになる。

もっとも、領域 ADMP の求積計算は、双曲線の求積に依存することなく簡単に求められる、ということを描いておけば十分であろう。しかし一方で、同じその双曲線の求積に依存するものとして、曲

線 DM の弧長の求長、曲線を軸のまわりに回転して生じる表面の面積の測定、表面が流体によって受ける抵抗の大きさの測定、が挙げられる。そして、ここで曲線の弧 DM について述べたことは、曲線のもう一方の部分 DO に対しても、同様に当てはまる。

補足、さてここで、先に見いだした曲線（ここでは ABCD）について、次のことはすでに明らかである。この曲線上の任意の二つの極小な線分 AB, BC が、点 B で互いに接続し、軸 LP に平行な直線 KN 上に置かれており、それらを同じ軸のまわりに回転させると、それらが同じ直線上の他のどの点で接続していた場合よりも、流体抵抗の小さい表面を描く、ということである。しかし、同じ曲線上の 3 つの線分 AB, BC, CD を取り、それらがそれぞれ点 B, C で接続し、軸 LP に平行な直線 NK, MH 上にあり、しかも端点 A と D を固定したまま同様に回転させてできる表面についても、それらの線分が同じ直線上の他の位置で接続されていた場合より、流体による妨害が小さい、ということが同じように自明であるとは限らない。そこで、この点について少しでも疑いを抱く者がいないように、ここにその証明を与える。この証明は、同じ曲線のいくつでも多くの線分を同様の仕方で回転させて生じる表面に対しても、同様に成り立つものである。

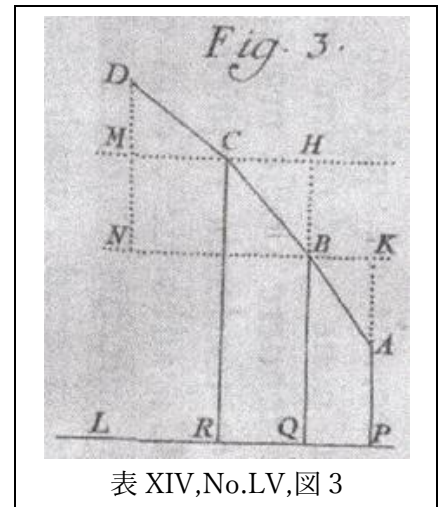


表 XIV, No. LV, 図 3

そこで、図 3 に示されている配置をそのまま用い、次のように定める。定数として、 $AK = m$, $BH = n$, $DM = p$, $AP = f$, $BQ = g$, $CR = h$ 、変数として、 $BK = v$, $CH = t$, $CM = s$ を取る。先に示した結果から明らかなように、小さな線分 AB, BC, CD において生じる流体抵抗は、それぞれ $cm^3 f : (mm + vv)$, $cn^3 g : (nn + tt)$, $cp^3 h : (pp + ss)$ によって表される。したがって、これらを合計した量 $cm^3 f : (mm + vv) + cn^3 g : (nn + tt) + cp^3 h : (pp + ss)$ は最小値を取らなければならない、その微分は $2cm^3 f v dv : (mm + vv)^2 + 2cn^3 g t dt : (nn + tt)^2 + 2cp^3 h s ds : (pp + ss)^2 = 0$ とならなければならない。しかし、先に導かれた、この曲線の性質によれば、

$\frac{1}{4}a = m^3 f v : (mm + vv)^2 + n^3 g t : (nn + tt)^2 + p^3 h s : (pp + ss)^2$ が成り立つ。そこで、これら各々の量の代わりに、それらに共通な一定値 $\frac{1}{4}a$ を代入すると、 $cdv : 2a + cdt : 2a + cds : 2a = 0$ が得られる。これは、同一の曲線上の 3 つの線分 AB · BC · CD を軸のまわりに回転させて得られる表面が、流体による抵抗を最小にするための条件である。しかも、これが実際に成り立つことは次の理由から明らかである。端点 A と D が固定されているため、 $NK = v + t + s$ は一定であり、その微分は $dv + dt + ds = 0$ 、つまり $dv + dt = -ds$ となる。よって（前式の最小条件は満たされる）。ゆえに…（以下同様）。

この証明は、同じ理屈によって、先に述べた曲線の 4 つの線分、5 つの線分、さらには望むだけ多くの線分に対しても同様に当てはまる。したがって、最終的にこの曲線そのものが、まさに求められていた解であり、これらの議論によって問題は完全に、しかも余すところなく解決されたのである。

No. LVI

ヨハン・ベルヌーイによる、最小抵抗をもつ回転体について

前年 11 月号の Acta Eruditorum に同一主題について載せた論考への補足

私は、この問題に対して自分が与えた解法が、学識ある人々に少なからず好意的に受け取られたことを知って、大いに喜んだ。また彼らが、ファティオの解法の煩雑さぶりを、私の解法の簡潔さと単純さを十分に理解した後になって、はじめて正しく認識できた、ということも分かった。しかし、作図

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1700 年 5 月号 P.208

の解析については、私が書簡の中で述べていたにもかかわらず、抜粋記事では省かれてしまっていた。そこで、依頼を受けたこともあり、それを喜んでここに公表することにする。さらに、この曲線についての完全な理解に少しでも不足が生じないように、いくつか補足的な注記も付け加えようと思う。

私は次の 1 次微分方程式 $ydy^3dx = ads^4$ に到達した。これは、私が求める曲線の性質を表すと述べたものである。そこで、この曲線の作図（構成）方法の理屈を明らかにするため、 ds の値、

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ を代入すると、 $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$ となる。しかし今や、未知量の微分が互いに入り組んでいるため、それらを分離するには、ある種の変換が必要である。私はこの方法を、極めて複雑な場合においてもしばしば成功してきた。そこで $dx = mdy : a$ と置くことにしよう。（ mdy を a で割ったものであるが、このように記法は、著名なライプニッツ氏の例にならって、印刷工の手間を軽くするため、今後も引き続き用いることにする。なお、この版ではそれがすでに慣用として定着して

いるため、常にこの記法を用いる。）この置換を方程式に代入し、さらにその後全体を dy^4 で割ると、

代数方程式 $aamy = m^4 + 2aamm + a^4$ が得られる。したがって、 $y = m^3 : aa + 2m + aa : m$ 、また、

$dy = 3mmdm : aa + 2dm - aadm : m^2$ となる。よって $mdy : a$ 、 $dx = 3m^3dm : a^3 + 2mdm : a - adm : m$ 。

これらの項をそれぞれ積分すると、 $x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$ とな

る。かくして、座標 x と y の値は、ただ一つの共通の不定量 m のみを含む二つの量として表されることが分かった。このことから、私が

Acta Eruditorum において与えた作図法が導かれるのである。なお、曲線 IK は誤って描かれていることに注意すべきである。なぜなら、それは直線 CE と交わるのではなく、曲線 HAD がいったん CE にかなり近づいたのち、再びそこから離れて無限遠へと退いていくのとはほぼ同じ仕方で、次第に直線 CM に近づいていくからである。したがって、この CM は、曲線 IK と DAH の共通の漸近線であり、共通軸 CE に対して、前者（IK）にとっては左側、後者（DAH）にとっては右側に位置

する。注目に値するのは、これら二つの曲線が、性質はきわめて異なるにもかかわらず（一方は代数曲線、他方は超越曲線であるのに）、それでもなお互いに驚くほど調和して振る舞うことである。共通の軸 CE に近づくのと同時にやめ、また同時にそこから離れ始めるのである。言い換えれば、両曲線にお

いて、軸 CE に最も近い点は、直線 CM から等しい距離にある。実際、 $CE = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ と取ると、EK も

EH も、それぞれの全ての対応する縦座標の中で最小値を持つことになり、とりわけ EH の最小値は

$\frac{16}{9}a\sqrt{3}$ である。さらに a を単位とし $la = 0$ とおくならば、EK の最小値は $\frac{5}{12}a - l\left(a\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ となる。

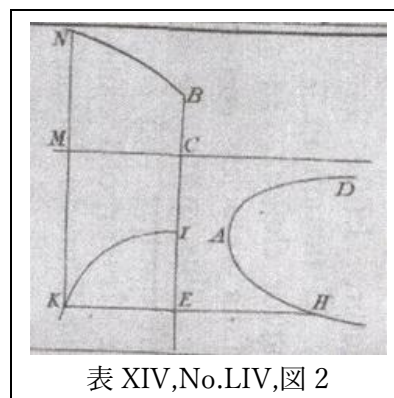


表 XIV, No. LIV, 図 2

この量は正である。なぜなら、1未満の数の対数 $l\left(a\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ は負の量であり、それに負号を付けたものは正になるからである。

このように二つの曲線が同時に軸へ最も近づくという事実は、それらから構成される、回転体の最小抵抗曲線 BN が、互いに向き合う二つの凸状部分をもつ理由を明らかにしている。その形は、天文学者たちが黄道十二宮の牡羊座を描く際に通常示す姿とほぼ同様であり、そしてそれら二つの凸部は、1点へと収束して尖端を形成する。この点を、私は反転点と呼ぶことにしている（フランス語で point de rebroussement）。この点は、直線 CM から、最小の縦座標 EH に等しい距離だけ離れている。この曲線の反転については、ロピタル侯爵も、同年8月号の Acta Eruditorum において、見事に観察していることが分かる。もっとも、彼の作図方法からは、その性質がそれほど明瞭には現れていないのだが。中間的な我々の解法は、驚くほど一致している。構成の仕方における違いはただ一つ、その高名な人物は解析よりも総合を多く用いた、という点にある。彼は、すでにきわめて鋭敏なアイザック・ニュートンによって示されていた曲線の性質を念頭に置き、それに照準を合わせて、自分の方程式（No.LV,P.205を参照） $m^3fv:(mm+vv)^2=n^3gt:(nn+tt)^2$ が、ニュートン的な比例関係式 $4AB^2 \times AC:BC^3=BC:MP$ に帰着できることを示そうとしたのである。これに対して私は、他人によってすでに発見されていたいかなる性質の助けも借りず、純粹に解析的に目的の結論へ到達した。

さてまた、その高名な人物によって与えられた座標式 $aa:4z+\frac{1}{2}z+z^3:a44$ と

$z^2:4a+3z^4:16a^3-5a:48 \pm CN$ は、私のものときわめてよく似ている。ただし項の並び順が逆になっていて、 $m^3:aa+2m+aa:m$ と $3m^4:4a^3+mm:a-lm$ という違いがあるだけである。もっとも私は、簡潔さのために定数量を省略した。その定数量は曲線そのものには、位置以外に何の変化も与えないからである。その定数量に応じて、曲線は自分の軸に沿って前後に移動するだけであり、その定数量は正にも負にも、任意に選ぶうる一定量なのである。さらに言えば、私の座標表現において a と m が現れるところに、彼の式では……（※以下、文はこの先へ続く）。マルキオーニ（Marchioni）の式では $\frac{1}{4}a$ と $\frac{1}{4}z$ が用いられているが、これは次の理由による。彼は、アイザック・ニュートンの比例関係式

$4AB^2 \times AC:BC^3=BC:MP$ に従い、 $m^3fv:(mm+vv)^2=\frac{1}{4}a$ と置いたからである。しかし彼が、

$AB^2 \times AC:BC^3=BC:MP$ という比例（これは、先の比例と同様にこの曲線によく適合する。前者の第1項は後者の第1項の4倍にすぎず、実際にはどんな倍数であっても同じように成立するのだから）を採用していたならば、 $m^3fv:(mm+vv)^2=a$ と単純に置くことができたはずである。もしそうしていたなら、完全に私の表式に到達していたであろう。そして私の式は、あの無用な4倍を含まない分、ある意味でより簡潔である。正直なところ、なぜこの高名な人物、あるいは彼以前のきわめて才気あるニュートンが、単なる AB^2 ではなく $4AB^2$ を用いて、不必要に増やそうとしたのか、私は理解できない。

さてさらに曲線の図形そのものについて言えば、その高名な人物ロピタル侯爵は、きわめて美しくそれを描き出している（図1を参照）。しかし、次のことを知っておく必要がある。曲線の两部分 DM および DO は、いずれも両軸 AL および AK から、どんな与えられた距離よりもさらに大きく、ますます離れていく。この点を私は特に注意しておきたい。そうでないと、図に示されているとおりに、DO の部分が無限に延びながらも AK からはある一定距離以上離れない、と誰かが誤解するかもしれないからである。

曲線 DM および DO が、反転点 D において共役軸 AK となす角は、直角の $\frac{1}{3}$ である。したがってその補角、直角の $\frac{2}{3}$ が軸

AL に対する曲線の最大および最小の傾きとなる。具体的には、DM 部分では最大の傾き、DO 部分では最小の傾きである。これは造船・航海術において、ある程度の実用的価値をもつ。もし船が DM の曲率に従って建造されたならば、船首の左右両側は、船の軸に対して最大でも 60 度を超える角度を取ることができないことが明らかだからである。もし仮にそれよりほんのわずかでも大きな角度になってしまえば、同じ幅と長さをもつ他のどの船よりも、水を切って進むことが簡単でなくなるであろう。ここで注意しておくべき点がある。曲線の一部 DM から得られる凸面、あるいは一部 DO から得られる凹面を、軸 AL のまわりに回転させて作った曲面が、流体から受ける抵抗を最小にする、ということだけではないのではない。同様に、前者については凹面を、後者については凸面を取ったとしても、結果は同じである。これらの曲面は、P から A に向かって動かされる場合でも、A から P に向かって動かされる場合でも、運動方向がどちらであっても、流体は同じ仕方で、かつ同じ大きさの力でそれらに抵抗するからである。

私は、気高きマルキオ（Marchio）侯爵が述べている次の点、領域 ADMP の求積は、双曲線の求積に
いかなる点でも依存することなく簡単に求められるという主張が、きわめて正しいことを認める。しか
し、同じ人物がさらに、その同一の領域を軸のまわりに回転させて描かれる立体の体積計算、むしろ正
確にはその回転体の体積についても同様である、と断言している点については、彼はいささか性急に言
い切りすぎている。もし彼がそれを改めて検討するならば、その体積は、双曲線の求積を用いずには得
られない、ということが分かるであろう。

私の書簡の抜粋の末尾（No.LIV,P203 を参照）には、次の語句が見られる。「そして曲線は超越的な指数方程式となるであろう、等々。」ここには「そして曲線 IK は……」という語を補うべきである。また、この指数方程式（あるいは、私には遷移的とも呼ばれている方程式）に到達する方法について、要請を受けたので、ここで同様に説明しておく。

EK, CM は、 $x = 3m^4 : 4a^3 + mm : a - lm$ であるから、これを $4a^3$ で掛け、さらに整理すると、 $4a^3lm = 3m^4 + 4aamm - 4a^3x$ になる。この式において、左辺 $4a^3lm$ は対数量であり、一方、右辺は通常の数量であ

る。そこで、右辺も同様に対数的な形を取るようにするため、この方程式全体を、ある一定の対数で掛ける。記号を統一するため、それを la としよう（なお、単位としては a 以外の任意の量を取るべきである。さもなければ $la=0$ になってしまう）。すると $4a^3lalm = (3m^4 + 4aamm - 4a^3x)la$ となる。しか

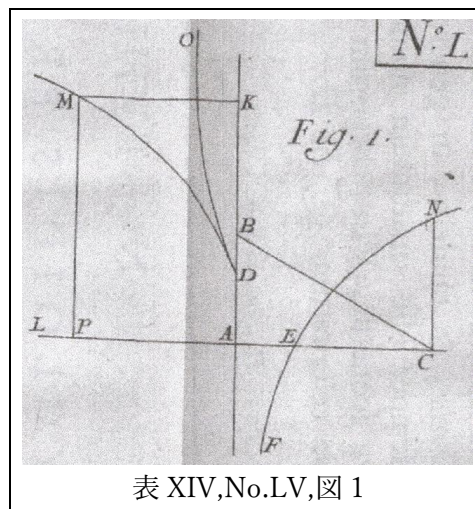


表 XIV, No. LV, 図 1

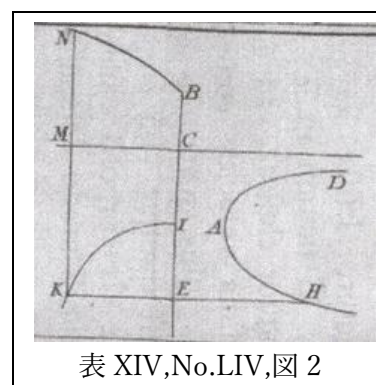
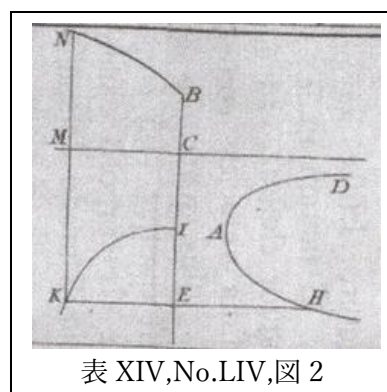


表 XIV, No. LIV, 図 2

し、等しい対数には等しい数が対応するので、この方程式の量を、対数の生成法および規則に従って数に戻すと、 $m^{4a^3la} = a^{3m^4+4aamm-4a^3x}$ という、指数的（遷移的）方程式が得られる。これは、学術誌 Acta Eruditorum に掲載されている通りである。もし、一定量である la の代わりに b を置くなれば、この方程式は対数から解放され、純粋な指数的（遷移的）方程式の分類になる。これらについては、私は 1697 年 3 月の Acta Eruditorum において、より詳しく論じている。(No.XXXVI を参照)

機会がそれを許すのであれば、ここで、私がただちに用いて微分方程式 $ydy^3dx = ads^4$ 、変換して $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$ を構成した、この変換法が、どれほど広い応用範囲をもつかを示しても、決して無駄ではあるまい。それは、この方法がこの特別な例だけに通用するとか、あるいは私が軽率にも、より込み入った場合でもうまく使えると言ったなどと、誰にも思われなくようにするためである。私は次のように主張する。一方の未知量が欠けているあらゆる微分方程式は、この方法によって構成可能である。しかも、微分量 dx, dy と、もう一方の未知量 x または y 、さらにはそれらのベキが、どのような仕方で、どれほど多数、どれほど複雑に絡み合っているとも、まったく問題にはならない。実にこの点において、暗く難解な「陰的微分方程式の分離」という問題に関して、これほど一般的な原理が、かつて提示されたことがあったかどうか、私は知らない。しかもこの問題は、この種の方程式を普遍的に構成するために、いまだ完成が待たれている唯一の課題なのである。さて、私がここで語っている方法とは、次のようなものである。たとえば、未知量 x が欠けている場合には、 $dx = mdy : a$ と置く。この置換を行って、与えられた方程式中の dx の代わりに代入すれば、そこから得られる方程式は、 dy のあるべきで割り切れることが明らかである。その結果、通常量（代数量）を除けば、方程式中には何も残らない。こうして m と y のあいだに、純粋に代数的な方程式が得られる。それは、同様に代数的なある曲線の性質を表すものであり、その曲線の横座標を y とし、それに対応する曲線下の面積 $\int mdy$ を定数 a で割ったものが、与えられた微分方程式を構成するために求められる曲線の座標を与えるのである。事柄を例によって明らかにするため、次の微分方程式を考えよう。

$y^3dx^3 + aaydx^4dy = a^3dy^3$ この方程式に対応する曲線の構成が求められる。そこで $dx = mdy : a$ と置き、これを方程式に代入すると、 $y^3m^3dy^3 : a^3 + ym^4dy^3 : aa = a^3dy^3$ を得る。さらにこれを $dy^3 : a^3$ で割れば、 $y^3m^3 + a^3ym^4 = a^6$ という代数方程式が得られる。したがって、この方程式に対応する代数曲線 IK を作図する。その曲線において、CM を y , MK を m とする。次に、MN を、曲線 CMKI によって囲まれる面積を定数 a で割ったものに等しくする、あるいは、より簡単には、MN が常に曲線 CMKI の面積に比例するように取る。そうすれば、点 N は、求めるべき曲線の上にあると私は主張する。なお、逆接線法を完成させるための、その他の規則については、本論の趣旨から外れるので、ここでは省略する。それらは一部すでに別の場所で与えられており、残りはおそらく、今後与えられるであろう。



No. LVII

ライプニッツの定理の証明

活力（運動エネルギー）は速度の2乗に比例する

物体 C が、弾性体 L に対して斜めに、速度 CL をもって運動していると考えよ。その速度は 2 であり、傾斜角 CLP は 30 度である。その正弦は半径 CL の半分である。さらに私は、弾性体における抵抗が、その弾性体を変形させるためには、その物体が垂直に衝突したならば、ちょうど速度 1 の分だけが必要となるようなものであると仮定する。では、物体が弾性体 L に斜めに衝突したあと、いったい何が起こるであろうか。運動 CL は、よく知られているように、CP と PL という二つの直交成分から合成されている。そして、物体が弾性体 L に対して直接衝突する方向である CP は、CL による物体の速度の半分を表しているので、弾性体が引き伸ばされることによって、この CP による運動は消費されるであろう。（それは、物体 C が速度 CP をもって弾性体に垂直に衝突した場合と同じであり、弾性体は、仮定によれば、その速度を打ち消すことができるからである。）その結果、物体の速度と方向としては、PL に対応するものが残る。そこで PL を M まで延長し、 $LM = PM = \sqrt{3}$ となるようにする（なぜなら $CL = 2$ と置いているからである）。そして点 M に、同じ性質をもつ別の弾性体を取り付け、それが LM となす角を LMQ とし、その正弦 LQ が $CP = 1$ となるようにする。この場合も同じ理屈によって、弾性体 L が伸ばされた後、物体 C は弾性体 M を引き伸ばすことになり、LQ による運動を失い、QM による運動を保つことは明らかである。そこで QM を N まで延長し、 $MN = QM = \sqrt{2}$ となるようにする。その点 N に、同様の第 3 の弾性体を据え付け、MN と角 MNR が直角となるようにする。その結果 MR が再び CP と等しく 1 となるようにする。この場合も同様に、MR による運動はすべて弾性体 N を引き伸ばすために費やされ、その間、物体は方向 RN に沿って、速度 $RN = 1$ をもって運動し続けることは明らかである。最後に、この残った速度をもつて物体が弾性体 O に垂直に衝突するならば、その弾性体を曲げるために、自身に残っている力をすべて与えるであろう。その物体自体は静止状態へと導かれる。以上のことを前提とすれば、いまや次のことが明らかである。物体 C の力は、それ自身だけで、ちょうど 4 つの弾性体を引き伸ばすことができるほどのものであった、ということである。しかも、それら各々を個別に引き伸ばすためには、物体 C に等しい物体の速度の半分が必要である。したがって、前者の効果が後者の効果の 4 倍である以上、速度 2 度をもつ物体の力が、同一または等しい物体が速度 1 度をもつときの力の 4 倍であることもまた明白である。同様の方法によって、速度 3 度をもつ物体 C が、9 個の弾性体を引き伸ばすことができること、そしてそれらの一つ一つを引き伸ばすには、その物体に速度 1 度が必要であることも証明できる。そして最終的に、一般に、引き伸ばされる弾性体の数は、速度の次数の平方に常に等しい、ということになる。そこから次の結論が導かれる。等しい物体の力（運動エネルギー）は、速度の 2 乗に比例する。（証明終わり）（第 II 巻 No.CXXXV を参照）

クリスティアン・ヴォルフ
「数学大全」機械学の部
第 VII 章 § 327 第 II 巻 P.62
ジュネーヴ版

No. LVIII

基本のサイクロイド

求積が可能な無数の区分（曲線部分・領域）：ならびに同種他について
求積可能な諸領域の決定：それが辿ってきたさまざまな紆余曲折ののち、

今回はじめてヨハン・ベルヌーイによって発見された。

正確に言えば、ちょうど100年前(1599年であると、著者であるトリチェリ(TORRICELLIUS)が述べているとおりである)。この著名な曲線は、最初にガリレオ(GALILEO)によって考察され、また彼から「サイクロイド」という名称を与えられ、それを今日に至るまで保

ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の
1699年7月号の P.316
パリ王立科学アカデミー紀要 1699年版
パリ版 P.134、オランダ版 P.180

ち続けてきた。その後、メルセンヌ(MERSENNUS)が登場し、フランス人たちはこの最初の発見を彼に帰しているのだが、この問題を、いわば争いの林檎(種)のように群衆の中へ投げ込んだ。すると、当時を代表する卓越した幾何学者たち、トリチェリ(TORRICELLIUS)、ラロヴェラ

(LALOVERA)、ロベルヴァル(ROBERVALLIUS)、デカルト(CARTESIUS)、その他の人々が、競い合うように、そして激しい情熱をもってこの問題に取り組んだ。その結果、よくあることだが、数多くの争いが燃え上がった。とりわけトリチェリとロベルヴァルとの間で激しかった。両者は他の誰にもまして、サイクロイドの基本的諸性質の「最初の発見者」という称号を強く求め、互いにその栄誉を分かち合うことをほとんど認めようとしなかったからである。こうして彼らは、実に痛ましいほど互いを切り刻むように激しく攻撃し合い、さらには恥ずべきことに！忌まわしい盗作の嫌疑まで互いにかけていった。その激しさは、まるで祖国が危機に瀕し、そのために戦っているかのようなものであった。これらのことは、あちこちで刊行された論争的著作や、1693年パリで刊行された「数学・物理学著作集」に収められている、ロベルヴァルによるトリチェリ宛の非常に長い抗議書簡から確認することができる。そこにはロベルヴァルの発見が収められており、その中には相当に巧妙なものも少なくない。しかし、ところどころで著者がひどい詭弁(誤った推論)を犯している箇所も見受けられ、編集者がそれらの誤りに気づかず、あるいは黙殺したことには驚かされる。

しかし、このような小競り合いは、すぐさま激しく起こり、激しい戦いへの道を準備し、その前奏となっていた。その戦いは、デトンヴィル(DETTON VILIO)、パスカル(PASCALIO)によって、賞金付きで提示されたサイクロイドに関するいくつかの問題を契機として起こったものである。この一件の結末が天地の隔たりほどにも広く知られていることは言うまでもないが、もしそれを知らない者がいるならば、彼自身の論考を読むがよいし、またウォリス(WALLISII)が自らの「サイクロイド論」に付した序文、さらにはこの件についてホイヘンス(HUGENIUM)に宛てて詳しく書いた文章を参照するとよい。それ以後というものの、この問題を通じて知的能力を多少なりとも備えていると自負する者で、この才知の砥石(試金石)に自らの力を試し、そこから何か新しい成果を生み出そうと試みなかった者は、ひとりとして現れなかった。その一方で、第一級の幾何学者たちもまた、他の者たちが手を付けず、困難なまま残していた問題を探究することに、絶えず同じくらい熱心であり続けたのである。

ここから、すでに昔から知られているありふれた事柄、たとえばサイクロイド曲線の長さの測定、その面積と円との比較、回転によって生じるさまざまな立体を円柱と比較すること、重心の決定等に加えて、より重要で、より探究の深い成果を私たちは得ている。その中でも、とりわけ挙げるに値するのは、比類なきホイヘンスが展開線の同一性・等時性について最初に示し、その後ニュートンが、自身の博識あふれる著作の中で論じた諸成果である(自然哲学の数学的原理、第I巻第X節命題48~53)(なお、これらについては私自身も、つい最近、きわめて簡潔な証明を与えている(No.XLIXを参照))。さらにこれに、かつて私がパリで考案した事柄を付け加えることもできよう。そのうちのいくつかは、兄

弟が Acta Eruditorum 1692 年版 P.292 (No.VIII を参照) で紹介している。さらに、見落としてはならない重要な成果として、サイクロイドの頂点から、その弦が軸の 4 分の 1 だけ離れている直線的な部分弧の求積がある。この部分の面積が半六角形に等しいことをホイヘンスは示している。もっとも私は、半六角形よりも正三角形と言った方が美しいと思うが (両者の面積は同じ)。これに加えて、もう一つの斜めの部分弧があり、その求積については、著名なライプニッツを最初の発見者として認めている。最後に、最短降下、つまり最も速い落下の問題は、ごく最近私たちによって発見されたものであり

(No.XXXVII を参照)、我々のサイクロイドの基本的性質の中であって、誰一人反対する者もなく、当然のこととして第一の地位を占める。そしてこのことは、兄弟も認めているようである。彼は、この結果をサイクロイドに関してなされたあらゆる発見の、いわば冠 (成果を締めくくる最高の到達点) であり、これ以上に何かを望むことはもはやできない、とほめたたいっているからである。(Acta Eruditorum の 1697 年 P.214 を参照)

しかし実のところサイクロイドは、まる一世紀という完全な年月をかけて、自らの秘奥をすべて脱ぎ捨て、その最奥の奥まった隠れ処に秘めていたものを、余すところなく我々に明かし終えるまでは、決して競技場を去ろうとはしなかったように見える。再び我々が高貴なる曲線 (サイクロイド) が舞台に姿を現す。それはまるで、この時代そのものが最期を迎えつつある中で、観客に別れを告げようとしているかのようであり、自身がもつ無数の部分弧や、その他のさまざまな図形の求積を、率直に提示するためである。その価値がどれほどのものかについては、他の人々の判断に委ねよう。彼らは知っているはずだからである。判断力きわめて洗練された人物、著名なウォリス (Cl.WALLISIUM) が、あのホイヘンス (HUGENIANUM) の部分弧が求積可能であることを (それが、我々の無限に多くの部分弧の中で、ただ一つの例であるにもかかわらず) 十分に価値あるものと評価し、その最初の発見を、ただ一箇所ならず、自分の友であるファールン (WRENNIO) に、自分にできる最大限の範囲で行ったことを。それは、自らが勇敢な擁護者を務める「イングランドの栄光」から、正当に属すると彼が考えたものが、少しでも失われることのないようにするためであった。これは、きわめて洞察力に富んだ人物の判断であった。

さて本題に入ろう。原始サイクロイド EAG を考える。その底辺を EG、軸を AF、生成円を ALF とする。任意に二本の縦線 IB と KD を引く。一方は中心 H から、他方は頂点 A から、それぞれ等しい距離だけ離れているものとする。すると、サイクロイド上に 2 点 B と D が定ま

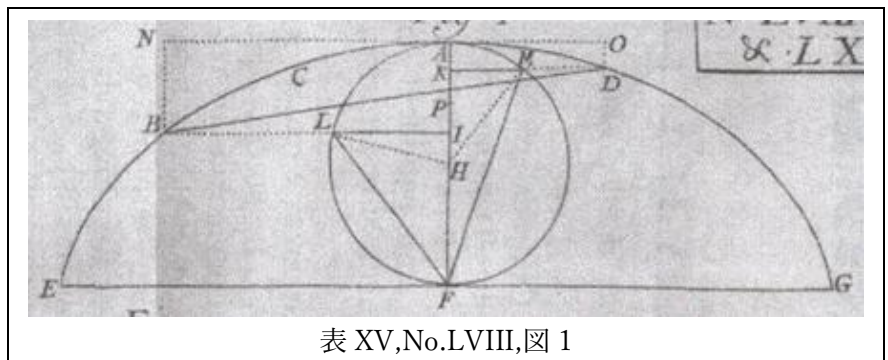


表 XV, No.LVIII, 図 1

る。これら B と D を直線 BD で結び、さらに LF および MF を引く。私は次のことを主張する。サイクロイドの部分 BCDB は求積可能であり、図 I においては直線三角形 LFI と MFK の和に等しく、図 II においてはそれら LFI-MFK の差に等しい。これを次のように証明する。HL および HM を引き、また NAO を底辺 EG に平行に引く。さらに BN と DO を軸 AF に平行に引く。図 I において、縦線 IB と KD が互いに反対側にあるとき、サイクロイドの部分 BCDB は、台形 BNOD から、二つの三辺形 ANB

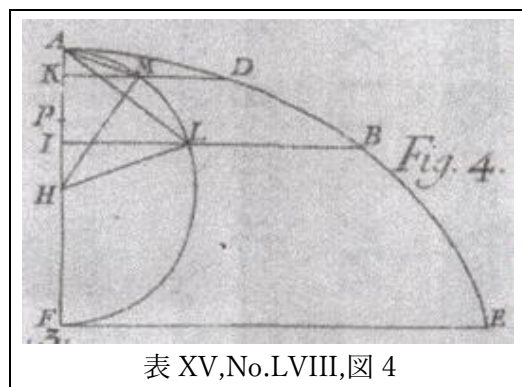
に向かって二本の直線 IB, ID を引く。これらの点 B, D は、曲線に当てた線分 BKD がその曲線と交わる点である。同様に、さらに二本の直線 FL, FM を、同じ円と交わる点 L, M に向かって引く。私は、サイクロイド扇形 IBAD が、二等辺三角形 LFM に等しいと主張する。このことは、前と同じ方法によってあまりにも簡単に証明できるので、もしこのために特別な証明を書き立てるとすれば、同じことを繰り返すだけのようと思われるであろう。ここで注意しておくべきことは、点 I と K が一致するとき、扇形 BID はホイヘンス氏のいう直線部分へと退化することであり、また一方で、I が A に、K が H に至るときには、それがライプニッツ氏の二つの斜めの部分へと変化するということである。したがって、これら両名の卓越した人物の発見は、2通りの仕方において、われわれの最も一般的な結果のもとに、特殊な場合として包含されているのである。

もっとも、法線軸に対する弦をもつすべての部分のうちで、求積可能なものはただ一つしかないとはいえ、しかしある著名な幾何学者（チルンハウス）の見解（学術誌 *Acta Eruditorum* の 1687 年 P.526 を参照）に反して、他にも無数の求積可能な面積が存在しうるのは、十分に起こりうる。この主張の証拠として、これまでに与えた部分や扇形に加えて、以下に挙げる諸例がその真実性を示すであろう。

円の半径 $HA = a$, $HK = x$ とする（図 IV）。さて、もし

$$HK = x = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}a\sqrt{41} \text{ と取って、点 K において直線 KD}$$

を当て、これが円を点 M において切るとし、さらに弧 ML を弧 AM に等しく取る。そうして点 L を通って直線 BI を当てて引けば、次の空間、サイクロイド帯 IKDB は、（直線 AM, AL, HM, HL を引くことによって）三角形の面積の式 $HAL + IAL - HAM - KAM$ に等しくなる。さらに、 x を 3 次方程式 $12x^3 - 10aax - a^3 = 0$ の根に等しく取り、かつ弧 ML



を弧 AM の 2 倍として取るならば、そのときサイクロイドの帯 IKDB は、再び求積可能となる。そしてこのように、弧 AM と ML の比が（整数対整数という）有理比でさえあれば、私は常に、多かれ少なかれ複雑な代数方程式を得ることになるが、その根 x が、つねに新たな求積に関する帯を決定することを見いだしている。この種の帯の決定は、決してありふれた方法によって見いだされたものではなく、それ自体に何か驚くべきものを含んでいると私は考える。部分や扇形がそうであるように、ただ一つの一般的作図によって与えられるわけではないからである。同じ方法を用いることによって、他にもさまざまなサイクロイド的な面積で、求積可能なものが、代数的に決定される。しかしそれらすべてをここに持ち出すのは無用であろう。とりわけ、より洞察力のある人々にとっては、ここまで述べたことからそれらを導き出し、さらに新しいものを付け加えることも、困難ではないはずだからである。

No. LIX
ヤコブ・ベルヌーイ
サイクロイドの帯状部分の求積の証明

サイクロイドの諸領域の求積について見いだされうる事柄はすべて、すでに以前に発見された一つのサイクロイドの性質に依拠しており、そこからあまりにも明白に導き出されるので、その二つの部分の求積を行った、きわめて著名な人物であるホイヘンス氏とライプニッツ氏でさえ、その気になって注意を向けていさえいれば、同じ簡単さでもって、他のすべての求積可能な部分や扇形をも見いださずにはいられなかったであろう。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1699 年 9 月号 P.427

周知のとおり、直線 BL は円弧 AL に等しく、また外側の面積 ABN は円弧 AL に対応する円弧部分 ALI に等しいからである。この性質を用いれば、どのようなサイ

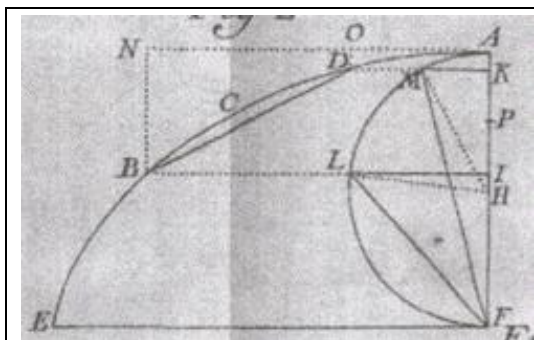


表 XV, No. LVIII, 図 2

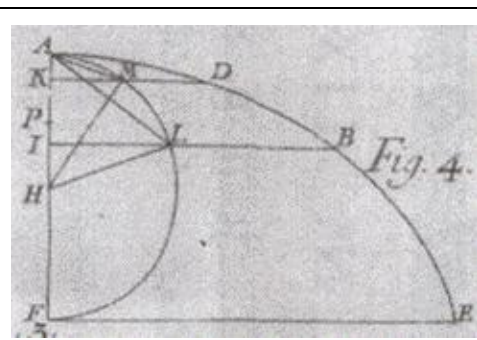


表 XV, No. LVIII, 図 4

クロイド状の面積であっても、それを直線図形といくつかの円弧部分だけから成る形へと還元することができる。したがって、その面積を求積可能にするためには、円弧部分から成る項だけが互いに相殺され、0 に等しいと仮定されなければならない。(これが解法の基礎である。) そしてこの仮定から、導入された量は簡単に決定されるのである。たとえば、どのくらいの長さの直線 HK, HI を取れば、帯 IKDB が求積可能になるか、という問題を考える。そこで次のように置く。 $HA = a, HK = x, HI = z, KM = p, IL = q, AM[DM] = s, AL[BL] = t$ 。すると、扇形 $AHM = \frac{1}{2}as$, 扇形 $AHL = \frac{1}{2}at$ となる。したがって、円弧部分 $AKM[ADO] = AHM - KHM = \frac{1}{2}as - \frac{1}{2}px$ 。同様に $AIL[ABN] = AHL - IHL = \frac{1}{2}at - \frac{1}{2}qz$ 。次に、サイクロイドの部分図形 AKD は、 $AKD = KO - ADO = KO - AKM = AK \times (KM + MD) - AKM = AK \times (KM + AM) - AKM = (a - x) \times (p + s) - \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}px = ap - \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}as - xs$ 。同様に、もう一つのサイクロイド部分図形 AIB は、 $AIB = aq - \frac{1}{2}qz + \frac{1}{2}at - zt$ 。したがって、帯 $IKDB$ はその差として、 $IKDB = AIB - AKD = aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs$ 。ここで明らかなように、最初の 4 項では、純粋に直線図形(多角形)だけから成る部分である。それに対して、残り 4 項は、円弧に関する量(t, s を含む)であり、これがある限りこの帯は求積できない。そこで私は、 $\frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$ とおく。さ

て、 t, s の比をどのように定めても（ただし、数が数に対する比であること、一つの弧が与えられれば、他も幾何学的に作図できる比であれば）、文字 t, s を消去して、 z, x の関係を与える方程式が必ず得られる。具体例として、 $t=2s$ のとき $z=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}x$ 、 $t=3s$ のとき $z=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}x$ 、 $t=4s$ のとき $z=\frac{3}{8}a+\frac{1}{4}x$ 。このように、同じ規則に従って無限に続く。さらに、直線 HK が与えられているなら、つまり弧 AM の余角の正弦が与えられているなら、三角法によって、その弧の 2 倍・3 倍・4 倍……の余角の正弦も求めることができる。したがって、 z を別の形の式で表すことも可能になる。 $t=2s$ のとき $z=(2xx-aa):a$ 、 $t=3s$ のとき $z=(4x^3-3aax):aa$ 、 $t=4s$ のとき $z=(8x^4-8aaxx+a^4):a^3$ 、…などとなる。これらの値を、前に得られた z の式とそれぞれ突き合わせて比較すれば、さらに新たな方程式が得られ、そこから今度は x 、つまり直線 HK そのものも決定できる。

同じ方法によって、他にも無数の求積可能な図形を発見することができる。たとえば、直線 AB と AD によって囲まれた、求積可能な扇形 DAB を見いだすことができるし、また、サイクロイドの弧 BD と円弧 LM によって挟まれた帯 BDLM も求積可能である。この帯は、常にその扇形の 2 倍の面積をもつ。実際、たとえば $HK = x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{8}\sqrt{33}$ 、または $x = a\sqrt{\frac{5}{6}}$ 、あるいは $32x^4 - 32aaxx - a^3x + 4a^4 = 0$ などの場合が存在する。そして、弧 AL を弧 AM の 2 倍・3 倍・4 倍……として取れば、その都度、扇形 BAD = $\triangle HAL - \triangle HAM$ となり、帯の面積はこの三角形の差の 2 倍になる。

もっとも、これほど簡単な方法を、私がここでわざわざ公開した目的は他でもない。私のこの例に刺激を受けて、兄も同様の成果を示し、かねてから約束している私の等周問題についての解析を、いつかついに私たちに分け与えてくれるよう、その気にさせるためである。

No. LX ヨハン・ベルヌーイ

1699 年 7 月号の Acta Eruditorum に掲載されたサイクロイド的空間の新しい求積法に対する補足
ならびに、ある重心について

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1700 年 6 月号 P.266

少なからぬ重要性を持ち、しかも十分に高貴な・価値ある発見であることは、私が Acta において提示した、無限に多くの空間、特にこの一世紀にわたって最も名高く論じ尽くされてきた曲線の諸セグメントの求積についての研究が、私に書き送られた輝かしい判断、私が公表する前にそれを提出していた王立科学アカデミーが下した評価によって証明されている。しかし私は少しも驚いていない。私が先に氷を砕いて道を開いておいた以上、サイクロイド的な領域で求積可能なものを決定する方法が見いだされたとしても不思議はないからである。実際、私が行ったことの中に、平凡な才能の者でさえ、ましてや洞察力ある者ならなおさらなし得ると、私があらかじめ見通していた。その証拠が、私が前年の Acta Eruditorum に掲載した短論文の末尾 P.320 (No.LVIII,P.216 を参照) に、熟慮のうえで付け加えたのが次の言葉である。「同一の方法の使用によって、他のさまざまなサイクロイド的領域で、求積可能なものが代数的に決定される。それらすべてをここに持ち出すのは無用である。とりわけ、より洞察力ある者たちにとっては、すでに述べたことからそれらを引き出し、さらに新たなものを付け加えることは困難ではないだろう。」しかしこの主題をめぐっては、なお新たな発見を豊かに生み出す余地が広がっている。ただしそれらは、すでに示したものよりも、わずかに多くの技巧を必要とする。そのため、課題全体が完全に仕上がるには、まだかなり不足していると言わざるを得ない。そこで、それらのうちのいくつかの例を、ここに示すことにしよう。その前に、1699 年の Acta Eruditorum の P.427 (No.LIX を参照) に載った「兄弟による可積分ゾーンの解法」について、私が何を見出したかを見てみよう。

彼が到達したその方程式においては、円弧から成る項をすべて 0 に等しいものと置いている（これは確かに私の解法の基礎ではあるが、簡単に推測できたはずのことである）。その結果、方程式に残る項は純粋に直線図形だけを表すものとなる。たとえば帯 $IKDB = aq - \frac{1}{2}qz - ap + \frac{1}{2}px$

$+ \frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs$ という方程式において、弧 s および t を含む項、 $\frac{1}{2}at - zt - \frac{1}{2}as + xs = 0$ と置く。

そして、 t が s に対して、任意ではあるが数対数の比をなすものと仮定すると（この注意点について、彼がどこからこの技巧を得たかは、私がすでにスケディアスマ (Schediafma) P.327,L.11-12 で警告しておいた）、 t と s を消去した方程式が得られ、そこから z と x の関係が明らかになる。 $t = 2s$ のとき $z = (a + 2x):4$ 、 $t = 3s$ のとき $z = (2a + 2x):6$ 、 $t = 4s$ のとき $z = (3a + 2x):8$ 、というように、常に同一の進行規則に従って続いていく。これはたいへん見事である。しかし、この一連の操作に含まれる事柄はすべて、私自身の図式から、一般的に、しかも次のようにきわめて簡潔に説明できる。点 A と H の中点を一つ取って、これを P と呼ぶことにする。私は次のことを主張する。円弧 AM と AL を、各円弧の端点が点 P から持つ距離の逆比、PI と PK の比になるように選ぶ。もし点 P が K と I の外側に位置するならば、サイクロイド部分 BAI と DAK の差、帯 IKDB は求積可能である。もし点 P が K と I の内側に位置するならば、それら同じサイクロイド部分の和が求積可能である（この場合、それらは互い

に反対側の部分として取ることができ、その結果、ただ一つのサイクロイド弧と純粋な直線だけで囲まれた図形が得られる。そのような図形が、図 I において IBADKI として示されている)。この場合もまた、やはり求積可能である。実のところ、この問題は次の点に帰着する。ごく一般的な解析法によって、ある円弧 AM の正弦から、その倍弧または分数倍弧の正弦を求めることである。ところが、兄は、そのうち最初の 3 つの、しかもきわめて単純な場合だけしか示しておらず、しかもそこでは、より高次の円弧の倍数を定めるための統一的な進行規則はまったく明らかになっていない。ましてや、それらの分数倍を決定する方法についてはなおさらである。それゆえ、帯の求積問題を一般的に解こうとするならば、私は求めたい円弧に対して、 n 対 r という比をもつ円弧の正弦を、私がすでに見出した、円弧の任意の倍化および分割に対して成り立つ普遍的な公式が得られるのである。この結果として、きわめて入り組んだ角の分割に関する問題は、完全にしかも同時に最も普遍的な形で解決されたことになる。ここで言う n とは、整数であれ分数であれ、さらには無理数でさえも含む、任意の数を意味するからである。そして、このようなことが、これまでに誰かによって試みられたかどうかについては、私はまだ承知していない。(No.LXIX を参照)

それらの事柄はいったん脇に置いて、先ほど約束したいくつかの例をここに示そう。それらは、兄が示したあの唯一の基礎原理には何の根拠もなく、しかも、もし他に解決の手がかりがまったく存在しなかったなら、解決不能と思われたであろう問題である。たとえば、すべての直線によって区切られたサイクロイドの諸部分のうちから、その重心が代数的に、いかなる求積も用いずに決定できるものが、どれであるかを求めよ、という問題である。いま、半径 $AH = a$, $AK = x$, 円弧 $AL = t$ とする。すると、サイクロイド部分 BADB の重心が、頂点 A からどれだけ離れているかは、次の式で与えられる。

$$(6xxt - 3aat + (axx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - xx)}) : (12xt - 6at + (6x + 6a)\sqrt{(2ax - xx)})$$

ここで、分子・分母の双方に円弧 t が含まれている。もしこれを、兄が示したあの単一の基礎原理だけを用いて消去しようとし、 t を含む項を両辺で 0 に等しいとするならば、

$$6xxt - 3aat = 0, 12xt - 6at = 0$$

が得られる。ところが、前者の

$$\text{式からは } x = a\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ が導かれ、}$$

後者の式からは $x = \frac{1}{2}a$ が導かれる。しかし、これら二つは同時に成立することができない。したがって、

この場合およびこれに類した諸状況においては、円弧を消去しようとするようなやり方は、まったく無意味である。しかしその一方で、われわれには、探求している問題の閉ざされた障壁を開くための、別の手立てがある。そのうちの一つは、次のような方法である。分子において t を含む量が、分母において t を含む量に対して持つ比が、分子の残りの量が分母の残りの量に対して持つ比と等しくなるように、量を置くのである。 $(6xxt - 3aat) : (12xt - 6at)$ つまり $(2xx - aa) : (4x - 2a)$ が、

$$((4xx + ax + 3aa)\sqrt{(2ax - zz)}) : ((6x + 6a)\sqrt{(2ax - zz)}) \text{ つまり } (4xx + ax + 3aa) : (6x + 6a) \text{ に等し}$$

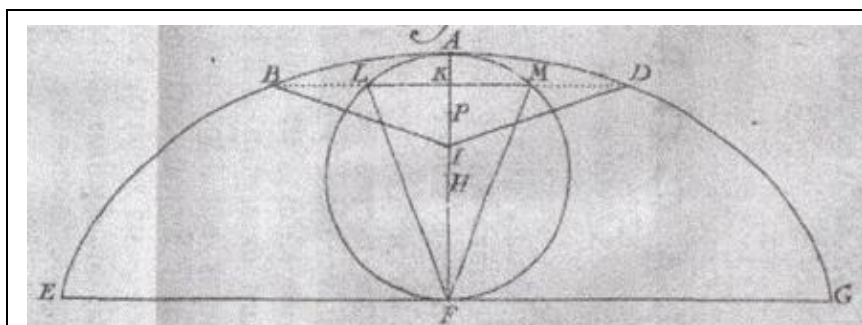


表 XV, No. LVIII, 図 3

くなるように置く。この条件から $x=2a$ が得られる。この操作によって、

$(6xxt-3aat+(4xx+ax+3aa)\sqrt{(2ax-zz)}):(12xt-6at+(6x+6a)\sqrt{(2ax-zz)})$ は
 $(6xxt-3aat):(12xt-6at)$ に変形され、ここで共通因子 t によって割ることが可能となる。すると

$(6xx-3aa):(12x-6a)$ となり、ここに $x=2a$ を代入すると、その値は $\frac{7}{6}a$ となる。したがって

$x=2a$ 、 $AK=AF$ とした場合、このときのサイクロイド弓形は退化してサイクロイド全体の面積となり、その重心は頂点 A から距離 $\frac{7}{6}a$ の位置にあることが分かる。これは生成円の直径全体の $\frac{7}{12}$ に等しい。

そしてこれは、いかなる求積にも依存せずに重心の位置を決定できる、すべてのサイクロイド弓形の中で唯一の例である。

同じ方法によって、サイクロイド曲線 AB のどの部分を軸 AK のまわりに回転させれば、重心が代数的に決定可能な円錐状の回転面を描くかを問い求めるならば、やはり AK は AF に等しく取らねばならない。そのとき、サイクロイド全体 ABE を軸 AF のまわりに回転させて得られる回転面の重心は、頂点 A から $\frac{2}{3}AH$ 、つまり AF 全体の軸の $\frac{1}{2}$ の距離にある。したがって、サイクロイド全体を軸のまわりに回転させて得られる完全な回転面を除けば、この問いに応じるような部分的な回転面は、他には一切存在しない。

しかし、もし同じ要求がコノイドそのものについて、平面の部分を軸のまわりに回転させて得られる立体について課されるのであれば、私はまったく不可能と答える。これらの立体のいずれ一つとして

(例外なく)、またコノイド全体、あるいはむしろ半球状体 EAG に至るまで、円の求積、あるいは円弧の長さの測定を仮定しないかぎり、その重心を決定することはできないからである。

記しておくべきこととして、私は立体扇形 IBAD を一つ見いだした。これは、平面扇形 IAB を軸 AI のまわりに回転させることによって生じるものであり、無数に存在しうる他の立体扇形の中でただ一つ、その重心が代数的操作の範囲内に収まるものである。私は、ここで自分の方法の大部分を明らかにしているにもかかわらず、その発見を兄に委ねることを提案する。私は彼に問うのである。どのような平面扇形 AIB が、軸 AI のまわりに回転されたとき、円の求積や曲線の長さの測定に一切依存しない重心をもつ立体扇形を生じるのか、と。この点については、私はすでに自ら成し遂げたのである。これは決して挑発のためでもなく、まして自己誇示のために提示するのでもない。ただ、こうした種類の発見について、彼がより好意的に評価するきっかけを与えたいだけなのである。もし、当初彼が考えていた以上に、ここに多くの労力が必要であることを見いだすならば。

さて、もう一つ見落としてはならない点がある。この問題領域についてここまで述べてきたこと、面積の個別的な求積について、ある場合において代数的に与える重心について、その他これに類する事柄について、それらは他の多くの曲線にも都合よくしかも美しく応用しうるのである。例えば、ロベルバル (Roberval) がトロコイドと呼んだ曲線、サイクロイドの相棒とも言うべき曲線である。この曲線は、当時の幾何学者たちにとって、サイクロイドに劣らぬほど有名であった。そして私は、これがウォリス (Wallis) によっては「正弦弧の曲線」という名のもとに、我々の時代の他の優れた数学者たちによっても考察されていたことを見いだしている。さて、この曲線トロコイドは、点 K において、円弧 AL に等しい長さの直線を常に当てはめることによって生成される。あるいはまた、ある連続的な運動によって、さらには他の方法によっても生成される。これらの方法については、ロベルバル

(Roberval)を参照されたい。彼はこの曲線について、サイクロイドと並べて詳細に論じており、平面および立体の、さまざまな生成様式に応じた大きさの測定についても、それらの重心を、たとえ求積を介してであれ決定することについても、ほとんど望みうるものはすべて与えている。しかし、この曲線そのものの長さについては、何も述べていない。その長さは、ある楕円の周長に等しいことが見いだされる。ただしその楕円では、長軸がそのパラメータの2倍である。さて、ここで論じている代数的な場合については、ロベルバールの著作にも、また他の誰の著作にも、ほとんど見当たらない。そこで私はこう主張する。この曲線の面積においても、絶対的に求積可能な部分が無数に存在する。実際、二つの縦線を引き、一つを右側に、もう一つを左側に取り、生成円の中心から左右に等距離となるように配置すると、それらの縦線の端点を結ぶ直線は、ある一つの部分図形を切り取ることになるが、その部分は、円の直径と、それに対応する縦線とを辺とする長方形に等しい。なお、扇形・帯・コノイドの表面および立体、さらにそれらの重心についての議論は、今や誰にとっても明らかであろうから、私は喜んで省略する。

ここで縮小サイクロイドや拡張サイクロイドについても何か述べるべきであろうが、実際には、原型サイクロイドについて示した事柄のほとんどすべてが、これらにも同様に当てはまるのである。しかしここでは、縮小サイクロイドであれ拡張サイクロイドであれ、すべての絶対的に求積可能な部分を決定するための一般的な規則を示すだけで十分であろう。より多くの余暇を得た者たちは、残りのことを、ここで述べた事柄から簡単に探り出すであろう。いま、生成円の半径、描点が回転中心から離れている距離を a とし、直線上を転がる円の半径を b とする。軸の同じ側、あるいは反対側に、二本の縦線を引き、それらがサイクロイドの頂点から、両者の距離の和が $2a - aa : b$ となるように配置する。このとき、これら二本の縦線の端点を結ぶ直線は、このサイクロイド上において求積可能な部分を切り取る。そしてこのサイクロイドは、 a と b のどちらが大きいかに応じて、縮小サイクロイドにも拡張サイクロイドにもなる。さて、このサイクロイドの部分は、もし二本の縦線が軸の同じ側に引かれているなら

ば、その面積は $\left(b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y\right)\sqrt{(2ax - xx)} - \left(b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x\right)\sqrt{(2ay - yy)}$ となる。反対側に引かれ

ているならば、その面積は $\left(b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y\right)\sqrt{(2ax - xx)} + \left(b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x\right)\sqrt{(2ay - yy)}$ となる。ここ

で x と y とは、二本の縦線がサイクロイドの頂点から離れている距離を意味し、しかも

$x + y = 2a - aa : b$ となるように取られているものとする。これから明らかなように、もし $2a - aa : b$ が0

に等しいか、あるいは負の量になるならば、つまり $2a < aa : b$ 、 $b < \frac{1}{2}a$ ならば、そのとき求積可能な部

分は想像上のものとなり不可能である。ここから次の注目すべき事実が導かれる。拡張サイクロイドはすべて無限個の求積可能な部分を持つが、縮小サイクロイドは必ずしもそうではない。実際、縮小サイクロイドのうちでも、 b が a より大きいものだけが同様に無限個の求積可能な部分を享受し、その他のものは、ただ一つとしてそのような部分を持たないのである。

$$\left(9+22\sqrt{\frac{1}{2}}\right):\left(6+30\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ になる。 (No.LXIX を参照)}$$

No. LXII

グローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏による
気圧計を発光させるための新しい方法

1700年6月19日付、グローニンゲンから書かれた同氏の書簡の一通からの抜粋

私は「気圧計および湿度計、あるいは湿度計論」と題された小冊子を読んで、1675年に故ピカード氏の気圧計に起こった異常な現象、暗闇の中で気圧計がある場所か

パリ王立科学アカデミー紀要 1700年版
パリ版 P.178、オランダ版 P.230

ら別の場所へ運んでいる際、水銀が動くのに伴って偶然観察された、断続的な光について知った。この現象については、アカデミーのラテン語史の初版 P.312 にも言及がなされている。私はこれを、いくつかの考察を加えるに値するものと判断した。この論文の著者が、好奇心ある人々に対してこの発見をさらに完成させるよう促しており、すでに他の多くの気圧計について同様の現象が起こるかどうか実験がなされたものの、ピカード氏のものに近いものは一つしか見つからなかったと述べているからである。おそらくカッシーニ氏の気圧計のことであり、その中でデュ・アメル氏は、同じ効果が観察されたと述べている。ただし、それは前者ほど顕著なものではなかった。そこで私はこの問題に取り組み、いくつかの熟考をこの主題について行い、さらに必要な実験を伴わせた。その結果は私の望みどおりであり、あらかじめ立てていた推論とも一致するものであった。そのため私は、この現象の真の原因を発見し、いつでもどこでも、区別なくすべての気圧計において、きわめて明るい光を現れさせる方法を見出したように思われる。かくして、これは化学によって作られるリン光体のように消耗することのない、新しい種類の「永続的な発光体」であると言える。

私の推論を説明する前に、まず次のことをお話ししておこう。私がこの小冊子の中でこの現象を読んだその同じ晩に、私は自分の気圧計で実験をしてみようと思った。この気圧計は、すでに約4週間にわたって使用していたものである。そこで私は、それを暗闇の中へ運び、まずは軽く揺り動かしてみたが、何の成果もなく、わずかな光すら認められなかった。しかしついに、それを激しく揺り動かしてみたところ（この操作は、管を割ったり水銀をこぼしたりする危険なしに行うことができる。管は小さな板に取り付けられ、いわば枠にはめ込まれた状態であり、下部の水銀はその板に固定されたツゲ材の箱の中に密閉されていて、空気はツゲ材の小さな穴を通してのみ入り、水銀を押すようになっているからである）、水銀が管のかなりの部分を、非常に速い速度で上下している際、最下部に達した瞬間に、きわめて弱い閃光を放つことを観察した。そしてその光は、水銀が再び上昇し始めると同時に、消え失せてしまった。このことから私は、著者がその光がこれまでただ一つの気圧計にしか現れていない理由として挙げている仮説の一つ、「他の気圧計では、まだ十分な期間、実験されなかったのではないか」という説明は成り立たないのではないかと考えるに至った。私の気圧計もまた、実験に用いられていた期間はせいぜい4週間ほどにすぎなかったからである。

この実験の後、私は著者が挙げている他の仮説が受け入れ可能かどうかを試してみようと思った。著者は、他の気圧計が同じ効果を示さなかったのは、空気が十分に除去されていなかったためか、あるいは水銀が十分に純粋でなかったためである、と述べている。それを確かめるために、私はまず、水銀を獣皮の一片の小さい穴を通過させることで念入りに洗浄し、さらに空気を抜いた容器の中に入れて、24時間そのままに置き、水銀の中に混じっている空気の微粒子が蒸発する時間を与えた。このようにして水銀を浄化した後、できる限りの注意を払って、内部にわずかな空気の泡も残らないようにして、通

常どおり管に水銀を満たした。しかし、このように組み立てた気圧計でも、それ以上の効果は現れなかった。私が水銀をどれほど激しく揺動かしてみても、そこから引き出せたのは、ほとんど一瞬現れてはすぐ消えてしまうような、かすかな光にすぎなかったからである。

私はこの気圧計をそのまま通常の用途に用いることにした。これほど多くの手間と注意を払って、非常に正確に組み立てたあとで、それを分解するのは惜しいと判断したからである。しかも私は、管の中・真空部分・水銀の中に、目に見えるような空気がわずかでも残っていないことを確信している。

そこで私は、この第2の実験から、当該論文の著者が立てた他の仮説もまた妥当ではない、あるいは少なくとも、水銀の精製や、管の上部に完全な真空を作ることは、この光の出現の主な原因ではない、という結論に至った。

以上を踏まえて、私はこの現象の真の原因を探究し、次のように推論した。光が各回の実験において現れるのは、真空が生じるとき、水銀が下降する瞬間に限られている。そこで私は、水銀が下がるとき、その内部からきわめて微細で精妙な物質が外へ出て、同時に上昇し、水銀が離れた管内の空間を部分的に満たすのだと理解した。部分的とは、ガラスの目に見えない微細な穴は水銀の粒よりも明らかに大きいと考えられるからである（これは、前者の軽さと後者の大きな重さからも明らかである）。そのため、同時に、管の微細な穴を通して、粗い空気よりはるかに微細だが、水銀から出てくる物質ほどではない、別の物質も流入する。この二つの物質が直ちに混ざり合い、水銀が下降によって明け渡した空間を満たすのである。これら二つの物質にどのような名称を与えようとも構わない。ルネ・デカルトにならって、管の微細な穴を通して侵入するほうの物質を「第2元素の物質」、あるいは「天体的微粒子」と呼び、水銀から出てくるほど微細なほうの物質を「第1元素の物質」と呼んでもよい。実際、ルネ・デカルトは、「哲学原理」第IV部第58条において、水銀の粒子は互いの間にきわめて狭い角状のすき間を残し、それは最も精妙な物質、第1元素の物質でなければ満たされ得ないことを、十分に示している。

さて、ルネ・デカルトが光の生成をどのように説明しているかは、あなたもご存じの通りである。彼は、光とはある空間に単独で集まった第1元素の物質がきわめて高速で運動し、その結果として天体的微粒子に及ぼす作用に存すると考えている。したがって私は次のように言う。第1元素の粒子がこれらの微細な間隙に分散し、水銀の地上的な粒子によっていわば圧迫されているあいだは、それらは高速運動を獲得することも、結合して作用し光を生み出すための力を及ぼすこともできない。しかし、水銀の下降によって、それらがそこから大量に外へ出るやいなや、第1元素の粒子は互いに結合し、こうして直ちに他のあらゆる物質から解放されると、自由なときに本来もつ高速の運動を回復する。そして、進行の途中で遭遇する天体的微粒子に対して力を及ぼすことによって、この光を生じさせるのである。以上のことから、この光が水銀の下降時にのみ観察される理由が理解される。水銀が上昇するときには、第1元素の物質がそこから外へ出てくるところか、むしろ直前の下降の際に外へ出た物質の一部が再び中へ入り込み、残りは天体的微粒子とともに、ガラスの微細な穴を通して管の外へ追い出されてしまうからである。これによって、なぜこの光が常に下降する水銀の上部に伴い、あたかもその上面に付着しているかのように見えるのか、なぜ一度の下降で生じた光が持続しないのか、そしてなぜ各下降が終わるやいなや、この光もまた直ちに消え失せてしまうのか、その理由がさらに説明される。これは次の理由による。水銀から発していたときには互いに結合していた第1元素の微粒子が、水銀の表面から離れてごくわずかに進むやいなや、天上的な微小球の群れによって直ちに分散させられてしまうからである。これらの微小球はその激しい衝撃力によって粒子を圧倒し、その結果、この光の効果を生み出した

めの力を完全に奪ってしまう。したがってこの光は、水銀から第1元素の新たな物質が絶えず連続して流れ出て、分散していくものの後を次々と継ぐ限りにおいてのみ存続しうる。これはちょうど、ロウソクの炎が常に分散しつつ、同時に絶えず新たに更新されているのと同様である。ゆえに問題となっているこの光は、水銀が下降している各過程が続いている間を超えては、決して持続しえないことは明白である。

私に残されているのは、最も主要な点を示すことである。なぜこの光がすべての気圧計において現れるわけではないのか、また、なぜそれがこれまで二つか三つのものにおいてのみ観察されてこなかったのか、さらに、この光を必ずすべての気圧計において、いつでも、しかも驚くほど強い明るさで現れさせるための方法、ただしこれはきわめて暗い場所で行うことが条件であることを示すことである。これら両者（理由の説明とその是正法）は、私が先ほど行ったこの現象の原因説明において用いた諸理由を、完全に確証するものとなるであろう。

私は次のことに気づいた。ある容器に入れた水銀を外気にさらしておくと、しばらくの後には、空気に触れている表面がすっかり濁り、きわめて薄い皮膜に覆われているのが見いだされる。この皮膜を、清潔な羽根ペンをを用いて取り除くと、最初の光沢が表面に戻り、その表面は再び鏡のように磨かれた状態になる。しかし、水銀をさらに空気中にさらしたままにしておくと、初めはクモの巣のように見える別の皮膜が再び上に広がり、時間とともに次第に厚くなっていく。そして、これを顕微鏡でよく調べてみると、それが打ち延ばして銀箔によく似ていることが分かる。実際のところ、これはきわめて微細な、ある種の綿毛の織物のように、ごく小さな繊維状のものから成っている。これらの小さな繊維は、空気の絶え間ないかき混ぜによって水銀から引き離されはするものの、その運動に追従することはできず、その結果、空気中に常に含まれている他の不純物とともに、水銀の表面へと落下する。そして、それらが次第に絡み合って、この皮膜を形成するのである。同じことは、あらゆる種類の液体についても観察される。それらを放置して、空気がその上を自由に通過し得るようにしておくと、やがて表面は一種の皮膜に覆われる。その厚さは、蒸発して立ちのぼり、のちに再び液体の上へ落ちてくる微粒子の性質に応じて、多少が生じる。これらすべてを十分に考慮したうえで、私は次のように述べる。通常の方法で水銀を満たした気圧計において光が現れないのは、まさにこの皮膜がそれを妨げているからである。以下に、私がこの事柄をどのように考えているかを示そう。気圧計を作るときには、一端が気密の管を用い、もう一方の端から水銀を注ぎ入れる。水銀は管の全長に沿って一滴一滴落下するので、それぞれの滴は、上から下へと空気の中に入り込み、それを切り裂きながら進むことで、いわば空気を拭き取り、そこに含まれる不純物をすべて引きずり込む。その結果、水銀は管の中を流れ落ちている瞬間に、単に空気中にさらしておいた場合の2、3日分よりも多くの、この繊維状の物質を付着させてしまうのである。私が今述べたことが真実であるかどうかは、次の事実からも明らかである。可能なかぎり洗浄・精製した水銀の一滴を、高さわずか1フィートほどから、同じく十分に精製され、その表面が鏡の氷のように平滑でつるつるしている容器の中へ落とすと、その滴は、この磨かれた表面に落下して水銀の塊の中へ入り込む地点において、表面を曇らせ、そこに目に見える痕跡を残すことが分かる。これは、その一滴が、どれほど清浄であったとしても、空気の不純物によってすでに汚染されていたことを示す確かな証拠である。このようにして、管の中に注ぎ込まれた水銀の滴は、流れ落ちる途中でこの皮膜に覆われる。しかし、滴どうしが互いに落下してぶつかり合い、また水銀そのものの圧力によって、それぞれの滴を覆っていたこれらの個別の皮膜が簡単に破れ、水銀の連続性が保たれる。一方で、これらの不純物は、水銀の微粒子の運動とも形状とも相容れないため、まるで排泄物のように、水銀の内部

の本体的な部分から押し出され、管の内側の凹面と水銀の凸面とのあいだ、周縁部へと集まるのである。こうして水銀柱全体は、まるで表皮のようなきわめて薄い膜に包まれていることになる。実際、事態は私が述べたとおりに起こっているらしく、そのような状態で管が満たされているとき、これを反転させて気圧計を作るため、開口部を指先でふさいだまま、水銀の入った容器の中へ差し込む、指を離れた瞬間、管内を下降する水銀が、管の真空部分のガラス側面にこの表皮を残すのが観察される。それらは、溶けた鉛の泡のような形で、ガラスの内壁に付着している。

気圧計が完成したとき、水銀柱の上端にある水平な表面が、この円柱の他のいかなる部分よりも、より厚い皮膜に覆われているであろうことは、簡単に理解できる。その皮膜は、一方では、管の真空部分に付着したまま残っていた残りが、やがて剥がれ落ちて水銀柱の頂部へと降り積もることによって厚くなり、他方では、水銀の重さによって下方にあったものが押し上げられ、上部へ集められることによっても厚みを増すからである。

最後の結論として、私には次のことを述べれば十分である。水銀の上部を覆っているこの皮膜は、たとえ我々の目にはいかにも薄く見えたとしても、水銀表面の微細な穴をきわめて完全に塞いでしまい、その結果、光を生み出し得る唯一のもの、その噴出によってのみ光を発する第1元素の物質の通過を妨げてしまうのである。そこから次のことが帰結する。通常の方法で満たされた気圧計では、光はまったく現れないか、あるいは、私が先に述べた自分の装置の場合のように、非常に大きな揺動を加えたときに、かろうじてごくわずかに現れるにすぎない。これほど薄く、これほど繊細な皮膜が、第1元素の粒子が水銀の微細な穴から外へ出るのを妨げる、あるいは少なくとも、それらが大量に、また激しく噴出するのを妨げるとしても、少しも不思議に思うべきではない。水銀そのものは、ほとんどすべての動物の皮膚の微細な穴を簡単に通過することを、我々は日常的に目にしているが、医師たちが表皮と呼ぶ、あの柔らかな薄皮を取り除かないかぎり、その通過は完全に閉ざされてしまうことも、同様によく知られているからである。それでは、この主題においても、同じようなことが起こり得るとして、いったい何の矛盾があるのか。

以上が、奇異な現象の原因について、私がここまで行ってきた推論である。そして、物理的事象について推論する際、自分が誤っていなかったことを最も確かに確認できるのは、その後あらためて意図的に行った実験が、純粋な推論だけから導き出された結論と一致するときにほかならない。もしこれまでに、先験的な推論が、そのあらゆる点において、実験の成功によって確証された例があるとすれば、私のものこそがまさにそれであると言ってよいだろう。私の推論の帰結として、何らかの方法によって水銀柱がこの表皮に覆われるのを防ぐことができさえすれば、気圧計内のこの光はきわめて強烈なものになるはずだ、ということが明らかに分かっていたからである。そこでこの目的のために、私は二つの方法を思いついたが、そのいずれもが非常にうまく成功した。

これが第1の実験である。私は、長さおよそ3フィート半で、両端が開いたガラス管を一本取り、内部にいかなる汚れや湿気も残らぬよう、十分に油膜を取り除き、かつ清掃した。その一端を、水銀を入れた、口が広く高さの低い容器の中に浸し、その際、容器の縁が許す限り、できるだけ斜めにした。結果として、そのガラス管が水平線となす角は、およそ18度から20度であった。これを行ったのち、私は管のもう一方の端に自分の口を当て、吸引し始めた。この方法によって、私は簡単に水銀を管の上端まで上昇させることができ、さらには数滴を自分の口の中にまで吸い込んだ。そこで私は、あらかじめその役目を教えておいた自分の生徒の一人に合図を送り、水銀の中に差し込まれている下端を、すばやく指で塞がせた。(ここでついでに言うっておかなければならないのは、私が水銀を最後まで引き上げた

際、一息で吸い切ったということである。もしそれを何度かに分けて行っていたなら、息や唾液が少量でも管の中に入り込むおそれがあったからである。) こうしてこの方法で管が満たされたのち、私の生徒が下端を指で塞いでいるあいだに、私は上端のほうを、割れたりひびの入ったガラスを補強するために用いているセメントで塞いだ。しっかりと封じ終えたあと、私はその生徒に、水銀の中に浸されたままであった下端から指を離すように言った。それから私は管を垂直に立てると、水銀はいつものとおり、平衡の高さまで下がった。しかし私は、管の空になった部分に、通常の方法で満たした管に見られるような泡状の付着物がまったくないのを見て、喜びを覚えた。私はこれを、まずは良い兆候だと受け取った。実際、私はこうなるだろうと前もって予想していた。この管の満たされ方から見て明らかのように、水銀が管の中へ上昇する際、空気がそれに触れたことはまったくなかったからである。ただし、最初の1滴だけは例外で、それはまるで盾のような役割を果たし、残りの水銀柱全体が空気から少しも害を受けることなく上昇することができたのである。しかもその唯一の1滴ですら、空気を激しく切り裂いて突き進む落下する滴のようなものではなかったため、たいして汚染されることはあり得なかった。さらに、その滴は管の中に留まることもなかった。前に述べたように、私は水銀の最初の数滴を口の中まで吸い上げていたからである。

こうして私は、他のものにとってはきわめて有害であるあの皮膜をまったく欠いた、水銀柱をもつ気圧計を確実に得たのであった。しかし、実験をより手軽に行い、運搬や揺り動かす際に水銀をこぼしてしまう危険を避けるため、私は下端を指で塞いだまま、この管をその広口の容器から取り出し、半分ほど水銀で満たされた、より細くて深い容器の中へ移した。すべての準備が整うと、私は夜になるのを待ちきれない思いで待った。やがて夜が訪れると、このように用意した気圧計を手に取り、左手には管を、右手には下端が浸っている容器を持った。そして暗闇の中に入るやいなや、まだ気圧計を振り動かしてもいないのに、すでに非常に鮮やかな閃光が見えた。これは、運搬の動きによって水銀柱に伝わったごく小さな揺れによって生じたものであった。しかし、輸送による動きだけよりも、やや大きな往復運動を水銀に与えようとして、きわめて穏やかに気圧計を揺らし始めると、水銀が下降するたびごとに、きわめて精妙な光が現れ、その光は近くの物体を照らし出すほどであった。そのため、その光のおかげで、私は1フィートほどの距離にある、それなりに大きい文字を十分に判別することができた。正直に言えば、結果がこれほど見事に私の予想に一致したのを見て、私は大きな満足を感じた。これは偶然になされた実験ではなく、私自身の推論の原理に基づき、意図的に行った実験だったからである。さらに言うべきこととして、この光はきわめて簡単に現れた。ほとんど感じ取れないほどの揺れ、水銀がせいぜい刃物の厚みほど上下するにすぎない揺れでさえ、それでもなお、非常に鮮やかな閃光を生じたのである。その後の数日間、私は同じ方法で満たした3・4本の別の管を用いてこの実験を繰り返したが、どれも例外なく、きわめて鮮烈に同じ結果を示し、一度として失敗することはなかった。このことから私は大胆に断言するが、私の述べた方法で準備されたすべての気圧計は、ピカード氏の気圧計に現れた現象を、いついかなる時でも示すであろうし、むしろそれ以上に鮮やかに示すに違いない。

私が考案した第2の方法、水銀柱が前述の薄膜で覆われないようにして管を水銀で満たすための方法は、次のとおりである。私は、よく洗浄され、一端だけが開いている管を一本取り、それを容器に入れた水銀の中に差し込み、垂直に立てた。したがって、その時点では管の中にはまだ空気しか入っていなかった。そこで、この管の中から空気を抜き取るために、私は次のような操作を行った。私は、管とその開いている端が浸っている容器とを、ベルの形のガラス製の容器をかぶせた。この容器は、上方に向かって内部が空洞の長い筒状部分へと延びており、ちょうど剣の鞘が刃を収めるように、その中に管を

収めることができるようになっていた。(この容器は、気圧計を用いたこの種の実験のために特別に作られたものである。)そこで私は、管と容器を内部に入れたこの装置を、空気ポンプの銅製の台座の上に据え、そのポンプを用いて装置内の空気を抜いた。すると、それと同時に管の中の空気も抜けていったが、管の上端は閉じられていたため、空気は上からは出られず、水銀に浸っている下端から、小さな泡立ちを伴って外へ出ていった。容器と管の中の空気をできる限り正確に抜き取ったあと、空気を再び入れた。すると、管の中には、容器中の水銀があったために空気が入り込むことができず、その圧力によって水銀が管の中へ押し上げられ、高さは24～25インチに達した。その結果、水銀柱は、ほとんど通常の気圧計の高さにまで上昇するところであった。これは、容器内の空気が十分に念入りに抜き取られていたことを示していた。このようにして水銀が上昇した以上、それがその表皮を完全に失っているに違いないと判断した。水銀柱の最上部でさえ、管の中にわずかに残っていた空気以外には、空気に触れることができなかったからである。しかもその空気は、きわめて高度に希薄化されていたため、水銀柱の上端を少しも変質させることができず、ましてや水銀柱の残りの部分に影響を及ぼすことなど、なおさら不可能であった。実際、水銀が上昇する際に、その水銀柱のいかなる部分も、空気にさらされることはなかったのである。実際、私が翌晩にこの実験を行ったところ、この管の中でも、先の方法で準備したもう一方の管と同じ強さで光が現れた。ここからさらに分かるのは、管の空虚な部分に残っていた空気は、光の出現を少しも妨げることができなかった、ということである。したがって、通常の方法で満たされた気圧計の中で光が現れないのは、それらが空気を十分に除去していないからではない。管内の水銀があ薄膜に包まれており、その薄膜が第1元素の物質の通路を閉ざしてしまうからにほかならない。

ところが、実験によって私は、この光の出現にとって、湿気ほど有害なものはないということを見いだした。第1の方法に従って準備した気圧計の一つを、毎晩揺り動かす実験を数週間にわたって続け、光の鋭さやその他の諸条件に何か違いが現れないかを確かめたが、私の大いなる満足にもかかわらず、まったくわずかな違いさえ認めることができなかったからである。そこで私は思いついて、下の容器に少量の水を注ぎ、そこに入っている水銀の表面を覆うようにした。そして、管をきわめて静かに持ち上げ、下端が容器の水銀から離れて水の中に達するまで引き上げた。ところが、数滴の水が管の中に入り込んだその瞬間、私はただちに管を再び水銀の中へ沈めた。すると、その水滴は上へと上昇し、水銀柱の頂部を覆った。そこで私は、このわずかな水が光の出現を妨げるかどうかを見てみたいと思った。実際のところ、それはあまりにも完全に光の出現を妨げたので、どれほど激しく揺り動かしても、光の痕跡をわずかたりとも生じさせることができなかった。その後、私は同じことを精製したアルコールでも試してみた。それ自体が可燃性であるから、水のように光を消すどころか、むしろこの光を生じさせる助けになるのではないかと考えたのである。しかし結果は無駄であった。アルコールの数滴が水銀柱の頂部を占めるやいなや、以前は管をわずかに揺らすだけでも最大の鮮やかさで現れていたその光が、最も激しい揺動を加えても、まったく現れなくなってしまったからである。以上のことから私は、あらゆる湿気、あらゆる異質な物質は、水銀の微細な穴を塞いで、ちょうど薄皮がそうするように、第1元素の物質が跳躍・噴出するのを妨げることができるか、あるいは少なくとも、光を生じさせるために第1元素が運動しなければならないあの非常な速さを、部分的にせき止めるのだ、という結論に至った。なぜなら、水銀柱のすぐ上方、第1元素の物質が互いに集合・合流すべき場所に、すでに少しでも異物質が空間を占めているならば、そこでは、その異物質は第1元素と一体となって運動することもできず、

それ単独で存在する場合に本来もつ速さで運動することもできないのは明らかである。そのためには、より粗い物質の微細な穴を通り抜けなければならないからである。

ここで私は筆を止めます、先生。あなたにもこれについてお考えいただく時間を差し上げるためです。もし、私の考えに何らかのもっともらしさがあるとお認めになられましたら、前にも申しましたとおり、その旨をアカデミーにお伝えいただければと思います。私としては、学士院の誰かが、ここで述べた両方の方法によって一つか二つの気圧計を作り、それらの効果を、故ピカード氏の気圧計と比較してくれることを、強く願っています。その結果を、私は喜んで知ることになるでしょう。あわせて、ピカード氏の気圧計が、どのような方法で満たされたものかをご存じでしたら、ぜひ知らせてください。私が引き合いに出した小さな論文の著者は、それが湾曲した管であると言っているからです。さて、湾曲した管を通常の方法で満たすのは困難であるため、私は次第に、それが私の第1の方法（吸引による充填）によって、あるいは第2の方法（空気の抽出による充填）によって、もしくはそれに類する方法によって満たされたのではないかと疑うようになりました。もしそうであったならば、それは私の考えに非常に大きな重みを与えることになるでしょう。

敬具

N o . L X I I I

新しい燐光物質（新しい発光現象）

グローニンゲン大学教授ヨハン・ベルヌーイ氏による

1700年11月6日、グローニンゲンにて書かれた同氏の書簡の一通からの抜粋

先生、私が9月4日付のあなたの以前に出された手紙に対するお返事を少し遅らせてしまった理由は、学士院の数名から、あなたを通じて寄せられた異議に答えるため、いくつかの新たな実験

パリ王立科学アカデミー紀要
(回想録) 1701年版 P.1

を行う必要があったからです。それらの異議は、私が気圧計の光に関して行っている発見の探究を妨げるものではなく、私はこの現象が依然として一般的なものと考えているからです。それどころか、それらの異議は、私にまったく新しくはるかに重要で、より興味深い発見を行う機会を与えてくれました。それは、水銀を携帯可能で恒久的な燐光体にするというものであり、私はそれを、どこへでも、いつでも、簡単に、しかも危険なく運び、送ることができます。それは永遠に持続し、しかもその光は、その強さにおいて気圧計の光とは比較にならないほどでありながら、決して弱まることのないからです。この発見は、あなたがこの後ご覧になるように、きわめて簡単なものであるとはいえ、私が気圧計の光を説明するために用いた原理から導き出されたものであり、しかも私はその原理が当時も今も正しいと信じています。したがって私は、あなたが、あるいはあなたの学士院の諸氏が考えておられるほど、私の推論が道を踏み外しているわけではないと確信する十分な理由をもっています。ところが、あなたの方の中の何人かは、私の気圧計の光を、水銀そのものの性質に帰しておられるようですが、あなたは、私が与えていた説明については一言も触れておられません。おそらくあなたは、私の説明を単なるユーモアに満ちた遊びだと受け取られたのでしょう。あなたの方の中の数名が私の実験をやり直したところ、期待された結果が得られなかった一方で、ヴィルロワ (VILLEROY) 元帥の気圧計は、ポートランド卿から贈られたものであり、しかも通常の方法でその水銀を入れ替えた後でさえ、なお光を発したからです。それらは、私のすべての理由を打ち壊してしまうかのように見える異議であることは、私も認めます。

もし私の発明を維持しようとするなら、私はそれに答えるべきでしょう。しかし、何と言えよいのでしょうか。もし私がそれらの実験に立ち会っていたならば、私の管の充填方法が十分に守られていなかった点を、百も見つけられたかもしれません。たとえば、あなたが私の方法と同等だとおっしゃる革袋を用いる充填法は、実は次の点で異なっています。この場合には、水銀が前方の空気を押しのけて進まねばならず、その空気がわずかな抵抗を示すことで、ガラスの側面に空気のようなわずかに残った物や小さな気泡を付着させてしまう可能性があるのです。そしてそれだけでも、私が光を妨げると述べた水銀の薄皮を生じさせるには十分なのです。これに対して吸引による方法では、外部の空気が水銀を上へ押し上げるのであり、その結果、水銀は希薄化によって管の外へ、いわば自発的に抜け出していく内部の空気の運動に従うだけなのです。私は、革袋を用いて気圧計を満たすこの方法を、全面的に否定しようというわけではありません。むしろ、この方法でも、光を生じさせるには十分に良いものだろうと考えています。問題は別の欠陥が、操作上の細かな事情の中に紛れ込んだのだと思われます。おそらく、用いられた管が十分に乾いていなかったか、あるいは十分に清浄でなかったのでしょうか。ごくわずかな湿気や油脂でさえ、光の出現を妨げてしまうからです。また、その管は細すぎました。あなたのお書きになるところでは、内径がわずか1線半（内径約3mm）しかなかったとのこと。私は実験によって、この目的には、より太い管のほうがはるかに適していることを確かめています。その理由は明白です。第一に、太い管の中では水銀は、細い管の中よりもはるかに自由に振動することができるからです。細い管では、水銀がガラスに接触して生じる摩擦によって、下降の速度が減じられてしまいます。さらに、水銀を覆う薄皮が（もし形成されるとすれば）、細い管の中では、太い管の中よりもいっそう厚くならざるをえません。横方向に広がることができないため、その分だけ高さ方向に厚くなるからです。

もう一つの実験について言えば、私が行ったように、口で水銀を吸い上げて管を満たすことが、息や唾液を少しも入り込ませずに果たして可能であったのか、私は疑わしく思います。それを防ぐのは非常に難しく、他の人々はそれに成功していないからです。そこには特別な熟練が必要なのです。私にとっては、これを行うことはさほど難しくありません。どういう習慣によるものかは自分でも分かりませんが、口を使って小さな容器から中の空気の $\frac{7}{8}$ までを吸い出し、残りを $\frac{1}{8}$ だけにすることができるからです。しかも、それほど力を入れずに可能なのです。

なお、あなたが言及されているそれらの実験について、私にはそれらを疑わしく思わせる別の推測もあります。私はその場に立ち会っていない以上、確かなことは何も言えません。しかし、もし学士院の諸氏が、私がいま述べた点を十分に守ったうえで、私の実験を2度目に試みてくださるならば、より良い結果が得られるだろうと期待しています。しかし、私は昼間に暗所で行うよりも夜に行ったほうがよいと思うのです。ご存じのとおり、昼間に突然暗い場所へ入ると、目がまだ昼の強い光にくらんでいて、気圧計の光のような弱い光は、たとえ夜なら十分に明るく見えるものであっても、はっきりとは感じ取れないからです。

あなたがおっしゃるところでは、ド・ヴィルロワ（VILLEROY）氏の気圧計は、通常の方法で満たされた後でさえ光を発したとのことですが、正直に言ってそれについて、私は少し疑問を感じています。ただし、その充填の様子を自分の目で見ていたらよかったのにとおもいます。そうすれば、きっとそれに対する答えを見いだせたでしょう。おそらくですが、水銀を注ぎ込む際に、管を水平に対してかなり傾け、水銀の滴が、まるで水路の中を流れるように、ゆっくりと流れ落ちるようにしたのではないでしょ

うか。そうすることで、もし滴が勢いよく垂直に落とされた場合に比べて、空気が水銀をそれほど強く汚染することがなかったのだと思われます。実際、私自身もこの方法で自分の水銀を用いて一本の管を満たしてみたところ、通常よりは多少強い光を認めましたが、それでも吸引法や真空装置を用いた場合に比べれば、はるかに弱いものでした。いずれにせよ、私はこう言うてはいけなんでしょうか。ド・ヴィルロワ氏の気圧計の水銀は、異常なほどよく精製されていて、空気が触れても皮膜を形成しうような異質な物質が、もはや残っていないのだ、と。そうだとすれば、気圧計の光の原因についての私の説明は、否定されるどころか、むしろ確認されたことになるのです。

さて、もし仮に、私の説明が真実ではなく、光の生成を、私が管を満たした方法ではなく、私の水銀そのものの特別な性質によって説明されるべきだとするならば、どうか教えてください。なぜ、同じ水銀を用いて、普通のやり方で満たした私の通常の気圧計は、どれほど強く振っても、ほとんど、あるいは全く光を発しないのか？それに対して、同じ水銀を用い、私のやり方で満たした他の管は、ごくわずかな揺れだけで、きわめて鮮明な光を発するのはなぜか？私はあなたの手紙を受け取るや否や、この点について、2度目として、さらにいくつもの実験を行った。さらに私は、この光が、私自身の水銀だけが他には見られないような特異な性質に由来するものではないことを完全に確認するため、別の水銀を借用し、同一の実験を行った。その結果は、私の水銀を用いた場合と同一であった。ところで、この第2の水銀が、最初の水銀と本質的にまったく同一の性質を有するということは、道徳的に不可能である。仮にそのような性質が存在するとすれば、それはきわめて稀なものであり、100種類の水銀のうち、そのような効果を示すものはおそらく一つも見いだされなければならぬはずだからである。

さて、ここで私の新しい燐光体の発見について述べるために、気圧計において被膜が光の出現を妨げる主要な理由の一つは、きわめて均質な管の中で水銀が示す運動が、あまりにも一様であることにあるのではないかと考えた。水銀がこのように円筒形の管に沿って上下運動する場合には、その被膜は、決して厚さを変えることも、また裂けることもないはずである。むしろそれは、常に水銀の上面に付着したまま、その上昇および下降に伴って移動し、決してそこから離れることがない。その結果として、私が前回の書簡において述べたような仕方で、私がデカルト氏にならって「第1元素」と呼んだ物質が、水銀の穴の隙間から外部へ出るための開口部が形成されることはないのである。さて、私の方法によって満たした場合でさえ、気圧計からこの被膜を完全に除くことはきわめて困難であることから、私は次のように結論した。この被膜が存在していたとしても（ただし、それがあまりに厚くない限りにおいて）、もし何らかの手段によってそれを破裂させるか、あるいは水銀の運動によって粉々に分散させることができるならば、光はなお出現するはずである。この考察から私は、空気を可能な限り完全に除去した、やや太く、かつ形状が不均一なガラス容器の中に閉じ込めた水銀に、きわめて激しく、不規則で、かつ非一様な運動を与えることほど、この目的に適したものはないであろう、と判断した。この推論は、私の発見の主題をなすある幸運な実験によって確認された。それが以下に述べるものである。

私は、内容量がおおよそ0.5ℓで、かつ水銀の激しい攪拌に耐えうるだけの強度を備えた、清浄かつ透明なフラスコを一つ用意した。その中に、十分に精製した水銀を5～6オンス投入したのち、フラスコの細くくびれた部分に、気密性の高い精確なコックをセメントで固定させた。次いでこれを真空機に接続し、フラスコ内の空気を除去した。この操作は、私に可能な限り周到に実施した。その後、フラスコを真空機から切り離すにあたり、空気が再び内部に侵入するのを防ぐため、あらかじめコックを閉じた。以上が、用いた装置上の工夫のすべてである。

そこで、私の推論が正しかったかどうかを試みるため、私はその同じ晩にフラスコを暗所へ持ち込み、その細くくびれた部分をしっかりと持ったまま、瓶をすすぐときの仕方で、激しく振り動かすと、水銀にもまた強い攪拌運動が始まった。すると、ただちにフラスコは、まるで火で満たされたかのように見えた。その光は、気圧計における光のように断続的で、途切れ途切れでもなく、水銀が攪拌運動を続けているあいだは絶えず持続した。しかもその光はきわめて強烈であり、私はそれによって、立ち会っていた観察者たちの顔を簡単に見分け、さらには個々人を識別できるほどであった。私はこの実験を、複数の種類の水銀を用いて何度も繰り返したが、結果はいずれも常に同一の成功を示した。ただし例外があり、フラスコ内の空気を十分に完全には排出できなかった場合、あるいは、そこへわずかでも空気を再び侵入させてしまった場合には、光は著しく弱く現れるのみならず、フラスコを連続的に攪拌し続けていても、次第に衰弱し、ついには完全に消失した。その後は、フラスコ内の空気を再び排出し直さないかぎり、この光を再び出現させることは不可能であった。

そこで私は、この光の減衰の原因を明るい場所で検討したところ、水銀の全表面が被膜で覆われていることを認めた。その被膜は、単に視認できるという程度にとどまらず、きわめて厚く、まるで土埃を練り合わせたペーストのように見えるほどであった。しかも、水銀を攪拌する以前には、フラスコの内部は非常に清浄であり、水銀の表面もまた、鏡の氷面のように研ぎ澄まされていたのである。以上のことから私は、たとえごく少量であっても、攪拌された空気は水銀を著しく汚染し得ること、そして、そのことこそが、このペースト状物質が形成されるにつれて光が次第に弱まり、さらに、この物質が、いかに激しく水銀を攪拌してももはや粉碎され得ないほどの高い稠度を獲得したときには、光が完全に消失する理由である、と判断した。また、この点によって、フラスコが十分に空気を除去されているか否かを判断することもできる。もしフラスコが十分に排気されているならば、光は弱まることなく、水銀の表面も不純物によって覆われることはない。それどころか、光は時間の経過とともにいっそう精妙なものとなり、水銀表面の被膜も（仮に実験開始時に存在していたとしても）完全に消散する。その結果、水銀は、繰り返し使用されることによって最終的にはきわめてよく研磨され、いかなる斑点も残らない状態に至る。この段階に達すると、光はその最大の鮮烈さを示し、以後は、暗所においてフラスコを攪拌するたびに、常に同一の強さで現れるのである。

私は、これまでのところ、時間の経過とともに消耗せず、あるいは少なくとも最終的にその効力を失うことのない、いわば永久的な磷光体が見いだされたとは考えていない。しかし、ここに示したものは、フラスコが常に十分に密閉され、空気が内部に侵入しないかぎり、効力をいかに何でも持続し、しかも何らその性質を失うことがないはずのものである。真空中に閉じ込められた水銀は、いかなる変質にもさらされないものであり、それが常に同一の効果を示さない理由は何一つ存在しないからである。

確かに、私が最初の実験に用いたフラスコにセメントで取り付けていたコックは、材質が真鍮であったため、水銀によって次第に腐食し始めていた。しかしその後、コックを用いることなく、空気を排出した後にフラスコを密閉する方法を私は見いだした。いくつか思いついた方法のうちで、最も確実かつ迅速なものは、次の手順である。まずフラスコから空気を抜く前に、コルク栓を用いて口を塞ぎ、その上からこの目的に適した蠟を塗って密封する。次いで、蠟とコルクを貫通するように、針で小さな穴一つあけて、フラスコ内より排出すべき空気のための通路を与えるのである。以上の操作を終えた後、フラスコを一つの密閉容器内に収め、その密閉容器から可能な限り正確に空気を排出することにより、小さな穴の開口部を通じてフラスコ内部の空気も同時に除去する。ここで最大の困難は、密閉容器内に再び空気を導入する前に、この小孔を閉鎖する点にあるが、これを簡単に行うためには、排気された密閉

容器を太陽光にさらし、凸レンズを用いて小孔周辺の蠟の端部をわずかに溶融させればよい。この方法によって、小さな穴は溶融した蠟で満たされ、自ら完全に密閉される。以上を終えた後、念のため、操作の途中で目に見えない開口部からわずかな空気が密閉容器内に侵入していなかったかを確認するため、密閉容器をもう一度真空機に接続してもよい。さらに確実に期するには、操作中、空気が侵入するおそれのある密閉容器のすべての箇所を水中に沈めておくのが最も安全である。以上によってすべてが適切に行われたことを確認したならば、密閉容器内に空気を再び導入してフラスコを取り出す。このように準備されたフラスコは、以後、暗所において振り動かす手間を惜しまないかぎり、いつでも燐光体として用いることができる。私は、2種の異なる水銀を満たしたこれら二つのフラスコを、すでに5～6週間にわたって保管しているが、いずれもきわめて見事にその効果を示している。これらを見せた好奇心旺盛な人々は、これほどめずらしいものを見たことがないと口をそろえて認めた。フラスコの内部空間はすべて炎に満たされ、水銀はまるで燃えさかる液体のように見えるのである。もし機会があれば、私はこれらの新しい燐光体の一つをお送りすることもできる。ガラスが十分に厚く、かつ細くくびれた部分が確実に密閉されていれば、これらは何ら危険なく簡単に運搬することが可能だからである。とはいえ、あなたがこの書簡をアカデミーに伝えてくださるならば、そちらの諸氏もまた、自らこれらを製作することを怠らないであろうと、私は期待している。

しかし、次の3点を十分に守る必要がある。第1に、フラスコの内部がきわめて清浄かつ乾燥していること。その点に疑いがある場合には、ガラス工房から出たばかりの新品のフラスコを用いるのが望ましい。第2に、フラスコ内の空気を排出する以前には、水銀をあまり動かさないことである。第3に、フラスコ内の空気を、可能な限り周到に除去することである。この第3の点は、考え得るかぎり最大限の精密さをもって遵守されねばならない。さもないと燐光体はまったく生成せず、仮に生成したとしても、それは弱く、かつ長くは持続しないであろう。したがって、真空機は優秀でなければならない。私のもの（オランダ製）は、ピストンを円筒の底から口縁まで引き上げ、その状態のまま24時間保持しても、円筒内の空所に一万分の一すら空気が侵入しないほどであり、これは実験によって私が確認したところである。これは、装置のきわめて高い精密さを示す確かな徴候である。なお、この燐光体は、単なる珍奇さの点だけでも十分に価値があるが、私はさらに、これから何らかの用途を引き出す一つの方法をも見通している。その件については、別の機会にあなたにお伝えすることにする。

敬具。

No. LXIV ベルヌーイ氏の書簡

グローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏による、彼の新しい燐光体（発光体）について
グローニンゲン、1701年7月5日

拝啓

私はしばらくのあいだ新たな実験に取り組んでいたため、5月26日付のあなたの前回の書簡に、これまで返

答することができなかった。あなたから送られてきた著作（この書き物はオムベルク（HOMBERG）氏によるものであり、ベルヌーイ氏の燐光体に対するいくつかの異論を含んでいて、異論は主にパリにおいて水銀を発光させることに成功しなかったという事実に基づいており、ベルヌーイ氏が用いた水銀

パリ王立科学アカデミー紀要 1701 年版
パリ版 P.135、オランダ版 P.178

の発光は、水銀一般に固有の性質によるものではなく、何らかの偶発的で、その水銀に特有の性質に由来するのではないか、という結論が導かれていた。)はすでに読んだが、そこに記されている水銀の発光に関する実験が望ましい結果を得ていないことを、私が嘆くべきかどうかは分からない。むしろ私は、他の誰もがいまだ成し遂げることでできていない事柄を、私自身はきわめて簡単に実現しているという点において、私自身を祝うべき理由があるように思われる。それが、私の工夫（もしそのようなものがあるとすれば）によるのか、あるいは私の空気ポンプ装置の優秀さによるのかはともかくとして。実際のところ、アカデミーによるこれらの実験が一度として成功していない一方で、私の実験が一度も失敗していないというのは、驚くべきことではないだろうか。問題の書き物では、真空中で水銀を発光させることができるのは、ある種の水銀に偶然生じた特別な出来事によるのだ、と述べられている。しかし、ここで考慮していただきたいのは、私がこの燐光体を、異なる場所から異なる時期にもたらされたことを私自身が知っている、5・6種の水銀を用いて作製しており、それらはいずれもきわめて良好に成功している、という事実である。ただし例外が一つあり、当初は光を発しなかった水銀があったが、これは後述するように、洗浄することによって発光するようにした。

私は、この著作に述べられている諸実験について、そこから引き出されている考察や結論について、順を追って逐一答える必要はないと考える。議論を終結させるために、私はアカデミーにお願いしたい。実験に失敗した際に用いられたのと同じ水銀を、私に送っていただきたいのである。私は、それを用いて、これまで私が作ってきたものと同じくらい良質な燐光体を作れると考えている。そして、アカデミーが確信を持てるようにするために、私に送られたまさにその水銀から私が燐光体を作ったのだということが明白になるよう、私は公的に信頼できる証人の立ち会いのもとでそれを製作し、その燐光体をアカデミーへ返送するつもりである。私をここまで大胆にさせている理由は、その著作の中で言及されているいくつかの状況を見て取れるからであり、これらの実験が十分な正確さをもって行われていなかったのではないか、という考えを私に抱かせるのである。したがって、その不成功は、もっぱら、アカデミーの装置、必ずしも最も精密なものとは言えないか、何らかの誤りのはずだ。これらの状況の一つとして挙げられるのは次の点である。空気を抜いたフラスコの中にある水銀を強く振ると、確かにごく弱い光をわずかに発したこと、しかもその光は初めのうちは比較的強かったが、次第に弱まっていき、その間、容器の中に空気が再び入り込んだわけではなかったこと、さらに、いったん空気を再び入れた後、直ちに装置を2度目に排気したところ、その水銀は、どれほど強く振っても、もはやまったく光を発しなかった、という事実である。私はこれによって次のことを理解する。その水銀は、私が先の書簡で述べたあの薄膜を形成したところの異質な物質から、十分に精製されていなかったものであり、その薄膜は、十分に排気されたと思われていたフラスコの中に残留していた空気的作用によって形成されたものである。そのために、光はきわめて弱く、しかも次第に消え去っていったのである。しかし、もしフラスコが完全によく排気され、水銀も十分に浄化されていたならば、その光はきわめて強く、しかも持続的であったはずである。私は一度ならず何度も次のことを経験しているからである。空気を抜いた容器の中に封じられ、長時間にわたって同じ強さで強く輝いていた水銀が、そこへわずかに空気を再び入れただけで、次第に光を失い、ついには輝かなくなった、という事実である。いずれにせよ、私に対して持ち出されているこれらの実験から、次のことは結論できる。気圧計の中では発光していなかった水銀が（その著作には異なる種類の水銀を用いたとは記されていないので、同一の水銀のみが用いられたと私は考える）、少なくとも、空気を抜いたフラスコの中では発光していた、という事実である。もし、気圧計だけを用いて実験を行い、この水銀は発光しないと断定していたとしたら、それは誤りで

はなかつただろうか。なぜなら、実際にはそれは発光していたからである。第2の実験についても同様である。同じフラスコを2度目に排気した後は、もはや光が見られなかったという点についても、その理由は、(その著作によれば) いったん容器の中に空気を入れた際に、その空気中の湿気が、少量ながら容器の内壁に付着した可能性があるからである。そして、このことが水銀の光の発現にとって有害であることは、私と同様に皆が認めるところである。では、仮に次のような場合を考えてみよう。もし最初の実験の時点ですでに、気づかれぬうちに、わずかな湿気がフラスコの中に入り込んでいたとしたら、初回から光がまったく現れなかったであろうことは疑いない。そしてその場合、人はこの水銀はまったく発光性をもたないと言ったに違いない。しかし実際には、それは実験を行った者の過失であって、水銀そのものの欠陥ではなかったであろう。私がこのことを言うのは、次の点を指摘するためである。成功しなかった実験は、否定的な命題を支持する証拠にはならない。そのような実験においては、何らかの誤りが犯されていなかったかどうかを、常に疑う余地が残るからである。

私は、気圧計に関する実験については、これ以上何も述べない。それは、これらと同一の反論に対しては、すでに第2の書簡において答えているからであり、また、水銀をフラスコ内で発光させる方法を見出して以来、気圧計における光について新たな観察を行うこと自体を、完全にやめてしまったからである。この方法は、私の考えでははるかに興味深い。それによって、一種の永続的な燐光体であり、しかも携帯に便利なものが得られ、さらにその光は、気圧計の光よりもはるかに強いからである。私はただ、アカデミーの空気ポンプ内で作られた第2の気圧計についてのみ、少しだけ述べることにする。この最後の気圧計において、水銀が、よく作られた通常気圧計において上昇する高さまで達していないと言われるのは、もっともなことである。この方法では、管の内部からすべての空気を完全に抜き去ることは不可能だからである。管の開いた端に加わる水銀の重さが、ついには空気の外への流出を妨げてしまうからである。私はこのことから、管の開いた端を、水銀の中にあまりに深く浸してしまったのだと理解する。しかし、私がこの実験を行ったときには、管に次のような配置を与えた。その端はほとんど水銀の表面と同じ高さであり、ごくわずかにしか沈んでいなかったのである。この目的のために、私はやや平たく、しかも広い容器を用いた。そうすれば、圧力によって空気が再び入り込み、その結果として水銀が管内に上昇した際にも、水銀が不足することがないからである。この方法によって、私は水銀を26インチの高さまで上昇させた。ほとんど通常の高さに達するところであったと言ってよい。ゆえに、水銀が発光するために、必ずしも完全に空気を除いた場所にある必要がないということは、たしかに事実であり、問題となっているその著作の中でも、きわめて正しく指摘されている。しかし、管の中に残っていた空気は、人々が考えているほど多くはなかったという点を、知っておく必要がある。さらにそれに加えて、光は夜には非常に強かったものの、その後の夜々には著しく弱まった。これは疑いなく、管内に残存していたわずかな空気のためであろう。このことに私は、最後の書簡を書いた後になって初めて気づいたのである。ここから次のことが帰結する。真空が完全であればあるほど、光はいつそう精妙で、かつ持続的になるということである。したがって、空気を完全に除いたフラスコ内の水銀(あるいは、少なくとも空気が千分の一、もしくはそれ以下にまで減じられている場合いかなる容器からであっても空気を完全に取り去ることは不可能だからである)は、可能なかぎり最も強く発光するであろう。しかも、その光は弱まるどころか、ある程度まではむしろ増大し、その後は持続し、フラスコを揺り動かすたびに、常に同じ強さで現れる。ただしそのためには、水銀が、その不純物から十分に精製されていることが条件である。私は、次のような推測が真実らしく思われることを認めます。私が最初に用いた水銀は、(それが空気にさらされるやいなや、表面に薄い皮膜を生じ、それが揺り動かされ

ると粉のようになるのですが)、本来あり得るほどには十分に純粋ではなかったのではないか、という疑いです。そして私は、その皮膜が、空気から来たものではなく、水銀の内部から生じた、金属的なものであれその他の異物であれ、そうした異質な物質から形成されるのだ、という点についても、喜んで同意します。しかし、これによって、私が与えている水銀の発光生成に関する一般的説明が否定されるわけではなく、また、この皮膜の生成についての私の考えが破壊されることもありません。私が前に述べたように、たとえ空気が常にその物質的原因でないとしても、少なくとも現象を起こす原因であることは常に確かだからです。実際、この同じ水銀は、真空中に閉じ込められている間は、どれほど激しく揺り動かしても、常に澄み、滑らかな状態を保ちますが、ひとたび空気を入れると、いつものようにすぐ濁ってしまいます。しかし私は、水銀からあらゆる汚れを完全に取り除く方法を見出しました。その結果、水銀は、空気にさらされ、激しく攪拌されても、もはや濁らなくなります。その方法は次の通りです。水銀を4~6オンスほどフラスコに入れ、その上に普通の水を、水銀の上を指二本分ほど覆うまで注ぎます。次に、その小瓶を、まるで洗いますぐかのように、強く、長時間振ります。すると水はすっかり汚れて黒くなるので、それを水銀の上から捨て、新しい水を加えて、再び振ります。水が再び汚れたら、もう一度水を替えて同じことを行います。この操作を、水がもはや黒くならないか、ほとんど汚れなくなるまで繰り返します。その後、水銀を、清潔な布に何度も通して乾かします。なお、水の代わりにアルコールを用いれば、より早く水銀を洗浄することができます。この方法によって、私は水銀からあらゆる汚れを取り除いた。その結果、屋外の空气中で、どれほど好きなだけ激しく揺り動かしても、もはや皮膜の痕跡も、粉状のものも、まったく残さなくなった。ただし、数日たつと、まるで呼気に触れたかのように、わずかにくすんでくることはある。これは、おそらく、空気が常に多少の湿気を含んでいるため、その空気に触れることによって生じるのであろう。このようにして洗浄した水銀から作った燐光体は、以前に作られた他のものよりも、はるかに見事な出来であった。これは、私が述べてきたこの光の生成に関する説明、水銀の上部を覆っている異質な物質が、この発光を妨げているのだ、という私の説明を裏づけるものである。

私は前に、5・6種類の水銀を試したと述べたが、それらはいずれも私の実験ではうまくいった。そのうちのいくつかは、最初に用いた私の水銀と同様に、攪拌によって粉状の汚れに侵されるようになったが、他のものは、アカデミーの水銀と同じく、澄んで滑らかな状態のままであった。これらの中には、初めのうちはまったく光を発しなかったものが一つあった。しかし私は、それを試す前からすでに、そのことを予期していた。その水銀は、他のものに比べて、ねばり気が強く流動性が低いように見えたからである。それを揺り動かしても、他の水銀で見られたような泡立ちが表面に生じなかったのであり、私はこれを、その動きの鈍さ、各部分が分離するのを妨げる性質に帰したのである。これによって私は、その水銀の中には、おそらく何らかの油状あるいは硫黄的な物質が含まれているのではないか、という疑いを抱くに至った。その物質は、その粘性のために、他の不純物のように表面に現れてこないであろう。他の汚れは、水銀の微小部分から比較的簡単に分離して外へ追い出され、表面に現れるのに対し、この油状の物質は、常に水銀の内部に混ざったままで留まっているのである。そのため、この水銀は一見すると非常に純粋であるかのように見えるが、実際には決してそうではなく、むしろ、初めから目に見える皮膜を生じる水銀よりも、かえって純度が低いのである。実際、この水銀を、前述の方法によって、水ではなくアルコールを用いてよく洗浄したところ（それは、水よりも粘性を除去するのに適していると考えたからである）、それまでまったく発光しなかった水銀が、他のどの水銀と同じくらい明るく光るようになった。しかし、さらに驚くべきことに、わずかな動きでもすぐに濁ってしまっ

いた最初の水銀でさえも、この洗浄（しかも水だけによるもの）によって非常に純粹になり、私は、それが自然な空気で満たされた小瓶の中でも、何ら空気を抜くことなく、発光するのを見たのである。もっとも、その光は、真空中で生じる光に比べれば、はるかに弱いものであり、またそれは、次々に生じてはほとんど同時に消えてしまう、分離した火花のような形でしか現れなかった。これに対して、真空中の光は、水銀が動かされているあいだ絶えず持続する、連続した炎のようなものである。私はこの実験から次のように結論した。水銀が完全に精製されているならば、空気の抵抗が存在するにもかかわらず、それに打ち勝つだけの運動をなお保持するほど大量の微細な物質を、水銀はその微細な穴から一度に放出しうるのであり、その結果、何らかの光を生じさせることができる、ということである。この微細な物質を、私はデカルト氏にならって第1元素と呼んでいる。それゆえ、発光しないと言われている水銀を、十分に手間をかけてよく洗浄し、その後、完全に乾燥させるべきである（わずかな湿気でさえ失敗の原因となるからである）。次に、それを内側まで清潔にし、よく乾かした小瓶に注ぎ、そこから注意深く空気を抜くならば、私は成功を確信している。たとえ、その水銀が、攪拌しても澄んだままであるがゆえに、完全に純粹であると思われていたとしても、私は、それが内部に隠れた粘着性の物質に汚染されている可能性があることを見出した。その物質は、水銀の微細な穴を完全に塞ぐか、少なくともそれらを硬化させ、その結果、光を生じさせるべき粒子の流出を妨げ、あるいは遅らせてしまうのである。私は、微細な穴の硬さが、これらの粒子の流出を妨げ、あるいは遅らせうと言う。水銀が激しく攪拌されていたとしても、その微小部分の穴が、形を変えるのに十分な柔軟性をもたないならば、第1元素の物質はそこから押し出されることができないからである。実際、この物質が外へ出るためには、微細な穴が頻繁に収縮しなければならないのである。以上のことから判断すると、生石灰を通して蒸留することによって発光性を得たと言われている水銀は、おそらく、何らかの硫黄的あるいは粘着性の物質のために、その微細な穴が硬直している水銀の部類に属するものと考えられる。したがって、生石灰を通過する際に、生石灰が水銀に与えた火的粒子が光を生じさせるのだ、と考える人々の意見には、私はまったく与しない。むしろ私は、その真の理由はただ水銀が浄化されたことそのものにあると、強く確信している。生石灰が果たした役割は、その微細な穴によって、水銀が通過する際に、あらゆる異質で粘着性の物質を後に残し、水銀をそれらから解放した、という点に尽きるのである。蒸留によって行われたことは、私が単なる洗浄によって行ったことと、本質的には何ら異なるものではない。実際のところ、これらの火的微粒子なるものは、私にはいくつもの理由からきわめて逆説的に思われるが、ここではそのうちのいくつかだけを述べるにとどめよう。

第1の理由、もしこの新しい燐光体が、そうした火的微粒子によって作用するのだとすれば、やがてその効力を失わなければならないはずである。他の燐光体に見られるように、これらの火的粒子は、頻繁に使用されるうちに、最終的には消耗して役に立たなくなるからである。

第2の理由、もしこれらの火的微粒子が、水銀の微小な隙間の中に入り込み、そこを通過できるほどにきわめて微細であるのなら、疑いなく、水銀の穴よりもはるかに大きいガラスの穴を、いっそう簡単に通過できるはずである。それにもかかわらず、なぜ小瓶を振り動かしても、それらがただちに散逸し、どれほど大量に水銀中に存在していようとも、ガラスの穴を通過して飛び去ってしまわないのであろうか。

第3の理由、また、気圧計において、光が水銀の下降時にのみ現れる理由も、この説では説明できない。もしその光が、水銀の表面に浮かんでいるこれらの火的微粒子によって生じるのだとすれば、単に

運動さえあれば、それらが次々と水銀の表面に現れて作用するはずである。そうであるなら、水銀が上昇するときにも、下降するときと同様に、その効果を示さなければならないではないか。

ところが、私のこの光の説明の仕方によれば、これらすべての困難は回避される。私は、この光が、きわめて微細な物質によって生じると考えるからである。この物質は普遍的で、至るところに存在し、決して尽きることがない。したがって、この燐光体は、永続的でなければならないことが示される。水銀が行っているのは、ただ、自身のきわめて狭い穴を貸し与え、第1元素の物質を、第2および第3の元素の物質から分離するためのふるいの役割を果たすことにすぎない（私がこれらの用語を用いるのは、説明の便宜のためである）。こうして他の物質から解放された第1元素の物質は、水銀が与えられた攪拌によって外へ押し出されると、直ちに、それが単独で存在し、あらゆる他の物質から解放されているときに本来もっている速やかな運動を取り戻し、その結果として、我々の眼において、光という感覚を引き起こす効果を生じさせるのである。したがって、この発光性の物質は、たとえ一瞬のうちに散逸してしまうとしても、直ちに別のものがそれに続いて現れ、同じ効果を生み、さらにそれが繰り返されるのであり、この過程は常に持続する。この説明は、私が1年ほどにわたり、ほとんど毎晩実験してきた、ある一つの燐光体によって、十分に裏づけられている。そして私は誠実に言えるが、そのあいだ、この燐光体の光に、目立った変化をまったく認めたことがない。むしろ反対に、その光は常に等しく輝かしく、今なおそうである。しかも、光が弱まるどころか、現在では、むしろ初めのころよりも、やや強くなっているようにさえ思われる。これはおそらく、頻繁な攪拌によって水銀がより流動的になり、残っていた不純物が徐々に分離して、ガラスの壁面に付着したためであろう。実際、内部がやや曇ったガラスの様子が、そのことを十分に示している。その結果、水銀は完全に精製された状態となり、今後は常に、最も高い強度で光を発し続けるであろう。私の説明は、それ自体きわめてもっともらしく思われるので、私は、もし水銀と同じくらい純粋で、かつ同じほど重い別の液体が存在するなら、それも疑いなく同じ効果を生むであろうと、固く確信している。したがって、もし比重を失うことなく金を流動体にする方法が知られていたなら、同様の燐光体を作るには、金こそが最も適した物質であろうと私は考える。私はこの効果を、物体の穴の微小さと柔軟性に依存するものとして説明しているからであり、金は諸物体の中でもっとも細小な穴をもつことが確実である以上、金に欠けているのはただ穴の柔軟性だけなのである。そしてそれは、その質量が完全に流動化されることによってのみ、与えられ得るものであろう。もしかすると、溶かした鉛を真空中に置けば、それもまた光を発するかもしれない。ただし、鉛が常に含んでいる不純物が、その発光を妨げないのであれば、という条件付きである。

人工の液体燐光体によって発光したと言われている水銀についてであるが、私は、それが発光したのは水銀そのものではなく、人工燐光体そのものの微粒子であったと考える。実際、そのようなことは、固体の燐光体をただ摩擦するだけで光ることが知られている他の多くの物体にも、同様に起こったであろう。そして、その光はきわめて持続性に乏しいものであるから、ここで問題となっている水銀もまた、人工の液体燐光体から借り受けたその光を、常に保持していたわけではなかったと私は考える。したがって、その種の光は、もはや我々の議論の対象ではない。

以上に述べたすべての推論に、私が挙げてきた諸観察を合わせて考えると、人々が引き出した3つの結論は、いずれも成り立ち得ないことが明らかである。第1に、真空中において水銀が発光し得る能力をもつというだけでなく、実際にすでに発光していることが分かるからである。ただし、それは、その光が、内部的であれ外部的であれ、何らかの異質な原因によって妨げられていない場合に限られる。

第2に、水銀はすべて同様に発光することが分かる。ただし繰り返し言うが、どの水銀においても、その光が、あるものでは他のものよりもいっそう妨げられている、ということがない場合に限られる。この点について、私は注目すべき観察を行った。まったく同じ形・同じ大きさの二つの小瓶を取り、それぞれに、同一の塊から採った等量の水銀を入れた。さらに、両方の小瓶から、同じ時間内に、同じ程度に空気を抜いた。すべてが完全に、少なくとも見かけ上は、等しく同様であったのだから、光もまた両方のフラスコにおいて同じ強さで現れるはずだ、と言えるのではないだろうか。ところが、実際の結果はまったく逆であることを示した。一方のフラスコでは、わずかな揺れを与えただけで非常に強い光を発したのに対し、もう一方では、何度も強く振らなければ光を出さず、しかも一度光り始めると、その後は小さな動きだけで再び光を生じたのである。さらに、このフラスコを2・3時間静置すると、再び光が現れ始めるまでには、また強く振らなければならなかった。これに対して、最初のフラスコは、常に苦もなく光を発し続けた。

では、これについて何と言うべきだろうか。これら二つのフラスコのうちの一方には、私の目には知覚できないほどであったとしても、おそらくごくわずかな湿気が入り込んでいた、息からかあるいはそれを扱った際の手の汗から入り込んだ、ということ以外には考えられない。そして、その程度の湿気であっても、光の現れ方にこれほど大きな差を生じさせるには十分だったのである。したがって、ある水銀が別の水銀より多くの光を出すからといって、前者の方が後者より光を発する能力が高い、ということにはならない。ここでは水銀はいずれも同一の塊から取られ、等しく発光し得るものであったにもかかわらず、それでもなお異なった仕方でも光を放ったからである。

第3に、同一の水銀であっても、もし十分に適切に準備されているならば、常に等しく光を放つはずである、ということが分かる。そして、ある時は非常に明るく、ある時は弱く、またある時はまったく光らないというのであれば、それは水銀に何らかの変化が生じ、それが光の出現を増大させ、あるいは減少させ、あるいは妨げている徴候にほかならない。そうした変化がなければ、光は常に同じであるはずだからである。その証拠として、上で言及した燐光体があるが、それはすでに1年にわたって、感知できるほどの変化がなく光を発し続けている。私が今述べたことは、つい最近行った別の観察によって、さらに確かめることができる。私は、燐光体として準備された一本のフラスコを持っており、およそ6週間にわたって同じように光を発していた。ところが、そのフラスコを開けることもなく、また空気を内部に入れることもないまま、凸レンズを用いて太陽光を集め、栓からはがれ落ちて水銀の上に浮かんでいた小さなコルク片を焼いた。その結果、フラスコの中にわずかな煙が生じたが、その他の点では、フラスコはもとの状態のままで、何一つ変わったところではなかった。しかし、このほんのわずかな煙が、光の鋭い明るさをどれほど著しく減少させたかは、にわかには信じがたいほどであった。しかも、光を現れさせるためには、以前よりはるかに強い揺り動かしが必要となったのである。以上のことから、アカデミーにおいて観察された光の変化は、本質的な性質として受け取られるべきものではなく、偶然に生じた原因による結果として理解されるべきであることが明らかになる。

なお付け加えて言えば、私は、一般に用いられるあらゆる水銀は、純粋であるかぎり、世界のどの場所から来たものであっても完全に互いに同一である、ということを認める。これは、すべての金やすべての銀が互いに同じであるのと同様である。まさにこの点こそが、私のこの光の説明の基礎を成しており、この光が普遍的なものであり、かつ水銀のみに由来することを主張するための根拠だからである。水銀は、より粗い別の物質を排除しつつ、第1元素の物質が通過することを可能にするのである。私はまた、私の説明から帰結するところとして、すべての水銀は常に光を発するものでなければならない、

という点にも同意する。そして実際、それは常にそのとおりなのであり、これまでに私が示してきたように、光が何らかの外的原因によって妨げられないかぎり、水銀は確かに光を放っているのである。それはちょうど、太陽が常に光り輝いているにもかかわらず、その光が日食その他の原因によって、私たちから見えなくなることがあるのと同じである。以上をもって結論すると、空気のない場所において光を発する能力を水銀に与えるのは、人々が考えているような、ある特定の水銀に偶然起こった特別な出来事ではない。むしろそれとは反対に、光を発することは、すべての水銀にとって、また仮に同じほど重い他の液体が存在するとすれば、それらすべてにとっても、自然で本質的な性質なのである。そして、もし何かが偶然的な出来事であるとすれば、それは水銀が光を発することではなく、むしろその光の出現を妨げるような事態のほうであろう。もし、これらすべてを尽くした後になお困難が残し、しかも私が行っているのと同じほど完全に新しい燐光体を作ることができないのであれば、私はもはや、かたくなに光を隠している水銀を手に入れたいと願うだけである。私は、その水銀に起きているこの光を隠す原因を取り除いてみせ、その水銀に対して、ギリシア語の称号であるフォスフォロス（光を運ぶ者）の名を、金星がラテン語でルキフェル（光をもたらす者）という名を負っているのと同じだけの正当さをもって、保持させることができると期待している。それこそが、われわれのこの論争に決着をつける方法であろう。もしよろしければ、この書簡をアカデミーにお回しください。それは私にとって大きな喜びです。心より敬意をこめて。

No. LXV

反射光学・屈折光学に関する考察

反射および屈折の本性を、平衡の原理に基づいて、正しい根拠に立った方法によって導出し確立する。
ヨハン・ベルヌーイ著

その後、疑いなく当初はただ経験のみによって、光線に関するあの驚くべき性質が知られるようになった。光線が不透明な物体の磨かれた表面に入射すると、その表面に垂直な平面内で反射し、反射角は入射角に等しくなること、また、性質の異なる一つの媒質から別の媒質へと斜めに入り込むときには、その両媒質を分ける表面に垂直な同一平面内で屈折し、垂線と屈折光線とが成す屈折角の正弦が、対応する入射角の正弦に対して一定の比を保つことである。前者の反射の性質はすでに古代の人々に知られていたが、後者の屈折の性質は、ようやく近代の人々によって知られるようになった。そこで多くの哲学者や数学者たちが現れ、これらの自然現象を説明し証明するために、さまざまな理論を考案した。しかし、万人の承認を得たものは一つもなかった。

一般に、他の説よりももっとももらしいとされて、二つの証明方法が広く認められている。一つはデカルトのもので、純粹に力学的な方法であり、運動の合成に基づいている。もう一つはフェルマーのもので、形而上学的な方法であり、自然が最短の経路によって作用するという慣習から導かれたものである。しかし、この両者はいずれも、それぞれ自分たちの反対意見を持つ人がいた。さて、デカルト流の説明が通常どのような反論によって攻撃されているかを、ここでは語らないことにしよう。ただ一つだけ、多くの人々にとって非常に受け入れがたい点がある。それは、この説を前提すると、ガラス

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum
1701年1月号 P.19
ジュルナル・デ・サヴァン
1703年11月19日号 P.596
パリ版 P.992、
オランダ版にも収録

や水のように、明らかにより密な性質をもつ透明体の中を、光線が、空气中よりもいっそう簡単に、しかも速やかに進むことになってしまう、という点である。そしてこの点について、デカルトが「空気はより毛羽立った繊維質の構造をしているため、より固体的な物質よりも、かえって光線を遅らせるのだ」と言ったとしても、それでは済まされない。彼はいったいどんな根拠をもって、純粋なエーテルが、粗い空気よりも毛羽立っているなどと主張できるだろうか。実際、光線がエーテルから空気へ進む場合にも、空気からガラスや水へ進む場合と同じ現象が起こる。どちらの場合にも、光線は垂線の方へ屈折するのである。一方で、フェルマーの仮説もまた、それ自身の困難によって圧迫され、多くの人々の不満を持っている。とりわけ、最終原因を自然学から排除すべきだと考える人々にとっては、受け入れがたいのである。もっとも、この考え方自体がまったく新しいというわけではない。実際、入射角と反射角が等しいことの証明に関して言えば、これはすでに古代の人々が用いていた。プトレマイオスは「鏡論 (De Speculis)」第1巻でこれを用いており、また機械学者ヘロンも「カトプトリカ (反射光学)」において同様であったことが、ヘリオドロスによって証言されている。彼は「光学について

(De Opticis)」第13章でこれに言及しているが、ヘロン自身のその著作は、時の損耗によって失われてしまった。それゆえ、われらが最高のライプニッツ (ライプツィヒ学術誌 *Acta Eruditorum* 1682 年 P.187 を参照) が次のように推測したのも、決して理由のないことではない。古代の幾何学にきわめて精通していた近代の学者たち、フェルマーとウィレブルルト・スネルは、反射光学における原理を、単に屈折光学へ移し替えただけなのではないか、ということである。実際、スネルの定理、これについてはイサーク・ヴォッシウスがその著「光の本性と性質について」P.37 で言及している。入射角と屈折角の補角の正割が、一定の比を保つという主張は、それらの角そのものの正弦を、互いに逆比として取ることと、まったく同じ内容に帰着する。そしてこの同値性は、先に引用した同じ箇所 (ライプツィヒ学術誌) において、きわめて鋭敏なライプニッツによって証明されている。一般に次のことはきわめて簡単に示されるからである。任意の角の正弦は、その補角の正割に対して、互いに逆比例する。

きわめて洞察力に富むホイヘンスは、ここ数年のうちに、反射光学および屈折光学に属するこの現象について、独自の説明を与えた。それは、彼のきわめて洗練された著作「光について」の中で、波動の性質から導き出されたものであり、これほどまでに興味深く、鋭利な説明は、ほとんど考え出し得ないほどである。しかし、この説でさえも、光は瞬時に伝播すると主張する人々の好みには合わない。すでに挙げたもの以外の、いくつかの別の証明の試みについては、クロード＝フランソワ・ミヨ・ド・シャルの「数学的世界」第2巻 P.536 以下および P.617 を見る。しかしそれらはいずれも、きわめて不自然に作為的なものである。それらはもっぱら経験事実に合わせて作られているように見えるからであり、仮にその経験事実がまだ確立していなかったとすれば、それらからは同様に、ア・プリオリには何一つ確かな結論を導くことができなかったであろう。ロベルヴァルによる屈折の説明方法、「王立科学アカデミー数学・物理論文集」P.74 に載っているが、それは完全に退けられるべきである。

この説は屈折光学の根本原理そのものに反しているからである。実際、この説からは、入射角および屈折角の正弦、あるいはそれらの補角の正割が一定の比を保つのではなく、それらの正接が一定の比を保つことになってしまう。これは明白に経験と矛盾する。ここから同時に明らかになるのは、この点に関して、ロベルヴァルが同書中でデカルトを批判したことが、うまくゆかなかったということである。

したがって、私の知る限りでは、いまだかつて純粋な証明、もっぱら演繹的であり、最終結果を仮定するか、あるいは光線の運動を瞬時的であるにせよ逐次的であるにせよ前提とするような、いかなる特定の仮説にも結び付けられていない証明を与えた者は存在しない。さらに、そのような証明とは、これ

まで列挙してきた反論や、これまでこの説あるいはあの説に対して提出されてきたその他の異論のいずれにも左右されないものでなければならず、むしろ抽象的に提示され、最終的にどの仮説が真であると見出され、あるいは採用されようと、常に有効であり続けるものでなければならない。

この種の純粋な証明を屈折について与えようとする試みは、エリゴヌがその「数学教程」第5巻パリ版 P.132 において行っているが、そこでは傾斜平面の原理を用い、これに斜めに入射する光線を比較している。しかし実のところ、彼の企ては失敗に終わっている。彼自身は否定しているとはいえ、その証明からは、デカルトの場合と同様に、光線はより希薄な媒質からより稠密な媒質へ進むときには垂線から離れる方向に屈折し、逆に稠密な媒質から希薄な媒質へ進むときには垂線へ向かって屈折すべきであるという結論が、明白に導かれてしまうからである。さらに彼は、明らかにそれ自体が循環論法

(τὸ χρῶμα εἶναι) で、少なくともそれと大差なく自明性に欠ける仮定を一つ採用している。加えてまた、この理論からは、光線がいまだ同一の均質な媒質の中にあるあいだでさえ、等しい簡単さで進行するのではなく、垂直に近いものほど簡単に、斜めのものほど困難に、発光点から放射されることになるが、これはきわめて不合理である。光線において垂直性や斜行性が問題となるのは、あらかじめ性質を異にする別の媒質との関係においてのみであり、光線はその媒質に衝突する以前には何らの変化も受けないからである。実際、光線はあらゆる方向へ等しい簡単さで拡散する。もっとも、きわめて鋭敏なニュートンとともに、別の媒質の中に、光線が衝突以前からすでに一方へ他方よりも強く引き寄せられるような何らかの力を仮定しようとするのであれば話は別であるが。「数学的原理・自然哲学」(第I巻第XIV節命題96の注解)を参照すること。そこにおいてニュートンもまた、反射および屈折の本性を説明しているが、それは真にというよりも、むしろ巧妙になされているにすぎない。彼の仮定する引力的な力とは、いったい何であり、またいずこから生じるのかが説明されておらず、ただ既成のものとして前提されているからである。もっとも、ニュートン流の説明がきわめて優美であり、数学者を十分に満足させるものであることは、私もこれを認める。

しかし今や、われわれ自身の説明を提示しよう。これは、厳格な自然学者のみならず、精確な数学者をも同様に満足させ得ると期待するものである。そのために、自然学からは、見解の相違はあるにせよ、すべての光学者が簡単に認めうる事柄以外には何一つ仮定せず、また数学からは、すでに他所で証明済みのことのみを用いることにする。まずは屈折から論じる。屈折が説明されれば、反射の本性はほとんど自ら導かれ、いっそう簡単に理解されるからである。第一に、ある作用から生じる反作用は、常にその作用に対して反対であり、かつ等しいということは確実である。作用する側が受ける力は、作用を受ける側に伝えた力と大きさが等しく、方向が反対である共通の作用、それが打撃であれ、圧迫であれ、張力であれ等々は、双方に等しく及ぶからである。たとえば、金槌が釘を打つ力と同じだけの力で、釘もまた金槌を打ち返すし、同一の重りが下にある台を押す力と同じだけの力で、その台から押し返される。同様に、弦は引き伸ばされると同時に、その伸張に対して等しい力で抵抗する、等々である。また第二に、二つの力は、それが小さいものであれ大きいものであれ、等しいものであれ等しくないものであれ、互いに自由に作用し合うとき、それらのモーメントが等しくなるような状態、位置へと自ら合成され、かくして釣合いが成立する、ということもまた明らかである。以上の二つの自然法則は、いっさい証明を必要としないものであるが、これらに基づいて私は次のように論じる。平面 CD によって区切られた、性質(密度・抵抗)の異なる二つの媒質 ACD と BCD があるとしよう。発光点を A、照らされる点を B とし、光線 AE が屈折線 EB を経て B に到達すべきものとする。さて、第1法則によれば、

光線 EB は、媒質 BCD の抵抗によって、B から E の方向へ、ちょうどその抵抗を克服しようとするのと同じ大きさの力で押し返される。同様に、光線 AE もまた、媒質 ACD の抵抗によ

て、E から A の方向へ、A から E へと進もうとしてその抵抗を克服するのに必要な力と等しい力で打ち返される。したがって点 E において、BE および AE の方向に沿って、二つの不等な力、それぞれの媒質の抵抗に比例する力の衝突が生じる。ところがこの点 E は、第 2 法則により、それらの不等な力がモーメントを等しくし、釣合いに帰着するような位置に置かれねばならない。ゆえに問題は結局こうなる。線 CD 上に、与えられた力が AE および BE の方向に沿って互いに拮抗しつつ、相互に釣合いを保つような点 E を決定せよ、ということである。これを見いだすために、しばしの間、重心の性質を考察することにしたい。そうすれば、それが我々の問題にいかにか美しく、かつ有用に適用できるかが明らかになるであろう。実に自然に何らかの本能を帰することが許されるならば、静力学的原理を好み、機械学からこの道筋を借り受けて、それによって、あたかも最も簡単な道を通るかのよう、自らの目的へ到達しようとしたように思われるのである。

それゆえ、CD を一本の剛体の棒として考えよう。この棒は軸のように、リング（または小さな滑車）E を受け入れるが、そのリングはきわめて滑らかに、いかなる摩擦もなく、最小の力によって、直線 CD に沿って前後いずれの方向にも自由に動くことができるものとする。さらに、このリングに、二本の紐 EAM および EBN が結び付けられているものとしよう。これらの紐は滑車 A および B を回り、その端には与えられた二つの不等な重りが吊り下げられている。こうしてリング E は、EA および EB の方向に沿って、二つの力によって同時に引かれることになるが、これは、先に述べたように、光線が点 E に入射する際、不等な与えられた力によってその点を押すのと、まったく同じ仕方である。ただ一つの違いは、光学の場合には力が AE および BE の方向に沿って「押す」ことによって作用するのに対し、ここではそれと反対の

EA および EB の方向に沿って「引く」ことによって作用する点にある。しかし、押されるか引かれるかは本質的に同じことである。なぜなら、二つあるいはそれ以上の力が互いに釣合いを成しているなら、それぞれの力の向きを元の方向とは反対にしても、なお同じく釣合いを保つことは、常に成り立つからである。したがって私は次のように言う。リング E は、棒 CD 上において、法線 RS を引いたとき、入射角を表す角 AER の正弦と、屈折角を表す角 BES の正弦との比が、引く力（張力）の逆比例、

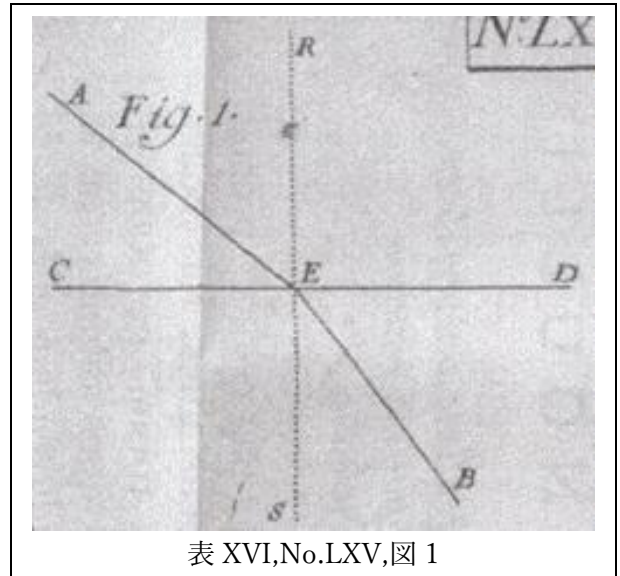


表 XVI, No. LXV, 図 1

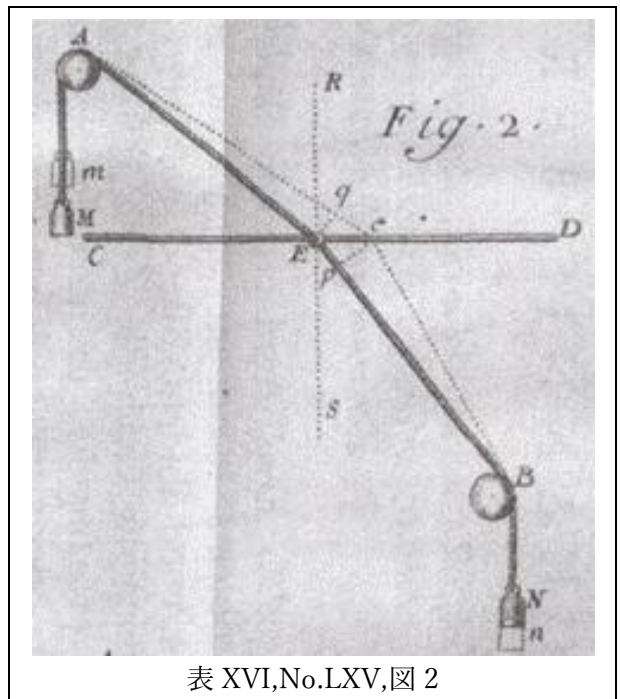
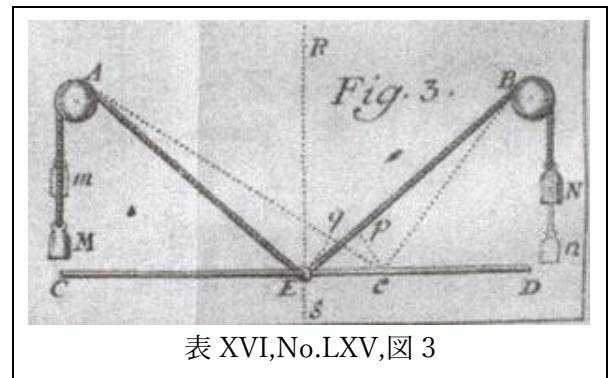


表 XVI, No. LXV, 図 2

透明媒質の抵抗あるいは密度を表す力の逆比例になり、言い換えれば、重り N と重り M の比になるような位置へと引き寄せられる。これは、共通重心の最大下降という原理から、さまざまな方法で証明できるが、私はここでは最も簡潔かつ最も優美な仕方でそれを示す。

リング E が、無限に小さい線分 Ee によって E から e へ移動すると仮定しよう。すると、重りをつけた二本の糸は、それぞれ mAe および nBe という位置を取るようになる。このとき、中心を A および B とし、半径を AE および Be として描かれる弧 Eq および ep は、直線の微小線分として扱われるものとする。したがって、重り M と N の共通の重心は、可能なかぎり最も低い位置へ下降するのである。ゆえに静力学から明らかなように、一方の重り M の上昇 Mm は、他方の重り N の下降 Nn に対して、重り N が重り M に対する比に等しい。しかるに、上昇 Mm は eq に等しく、下降 Nn は Ep に等しい。さらに、 eq と Ep とは (Ee を半径、全正弦とみなすとき)、それぞれ角 qEe および角 peE の正弦であり、これらの角は、前者が角 AER に、後者が角 SEB に、常に等しい。したがって、角 AER の正弦は、角 BES の正弦に対して、重り N と M の比に等しい。ここから、入射角と屈折角とは、与えられた比、媒質の密度の逆比例であることが明らかとなる。(証明終わり)

このようにして、我々の証明方法によって、光線の屈折に関する性質が確立されたので、同じ方法は簡単に反射光学にも拡張される。反射光線は入射光線と同一の媒質の中にとどまるからである。したがって、ここでは媒質の抵抗、密度を表していた不等な重りの代わりに、ここでは等しい重りを仮定しなければならない。それは、反射後も媒質の抵抗が同一であるためであり、両者はすでに棒 CD の上に置かれたものとして、リング E を引くと考えられるからである。前に仮



定した他の条件をすべてそのままにすると、上昇 Mm と下降 Nn は互いに等しくなるが、それは重り N と M 自身が等しいからであり、したがって eq も Ep に等しい。さらに、三角形 Eqe および Epe は直角三角形であるから、角 peE は角 qEe に等しいが、この角 peE は常に角 REB に等しく、また角 qEe は常に角 AER に等しい。ゆえに、角 REB (反射角) は角 AER (入射角) に等しいことが示された。(証明終わり)

私はこれまで、屈折および反射が、屈折面および反射面に垂直な平面内で生じるものとして仮定してきたが、この点はユークリッドやアルハゼン、ならびにその他の若干の古代の著者たちによっても、証明なしに前提とされている。これに対して、ウィテロや、近代の著者の中ではケプラーは、この点を証明しようとしてはいるものの、実際には何も証明していない。しかし実際には、この点が私の原理から自ずと帰結することを、直ちに示すこともできたのである。点 E が単に直線 CD 上にあるのみならず、ある一つの連続した面全体の上を、あらゆる方向へ自由に移動し得るものとして考えられ、しかもその後、二つの力 M および N によって引かれると仮定するならば、その点が、点 A および B とともに、屈折面または反射面に垂直な平面内に位置する場所に到達するまでは静止しないであろうことを、誰が直ちに理解しないであろうか。もしそうでなかったならば、他のいかなる平面においても、重り M と N の重心は、可能な限り最も低い下降位置を得ることができないからである。

さらに言えば、ここで、自然が最も簡潔な道を選ぶとする、形而上学的仮説そのものが、私の平衡の原理から、きわめて都合よく、しかも長い証明を要することなく導き出され、むしろ自発的にそこから

流れ出ることを示すのは、無益ではあるまい。入射角および反射角、あるいは屈折角といったものを考察する必要すらなく、この結論に到達できるのであり、私の知る限り、いまだ誰によっても成し遂げられていない。ホイヘンス自身でさえ、この原理を彼のいう波動の性質から直接に証明することはできず、まず先に、入射角と屈折角の正弦の間の比が一定であることを証明せざるを得なかったからである。「光についての論考 (Tractatus de Lumine)」P.40 を参照。フェルマーおよびライプニッツは、逆の順序によって、一方を他方から導くことによって、この点を証明したが、結局のところ両者は同一の結論に帰着する (フェルマー「数学著作集」P.158、学術誌 Acta Eruditorum 1682 年 P.185 を参照)。一方は他方によって確立されるからである。しかし、我々においては、いずれも他方を仮定することなく証明される。しかも、前者、これらの角の性質については、すでに明らかとなった。いまや後者、光線が通る最も簡単な道についても、さらに明らかになるであろう。

静力学から明らかのように、二つ、あるいはそれ以上の重りから成る系の共通の重心は、各重りとそれぞれの懸垂点からの距離との積 (重りの大きさ×距離) をすべて合計した量が最大となる時、最も低い位置にある。したがって $M \times AM + N \times BN$ は、取り得るすべての場合の中で最大となる。ここで、一定量である $M \times MAE + N \times NBE$ から、この最大値 $M \times AM + N \times BN$ を差し引けば、残りの $M \times AE + N \times BE$ は、すべての場合の中で最小となる。ゆえに、反射光学において、重り M と N (図 3 を参照) を等しいものとして置くならば、これを M で割ることにより $AE + BE$ 入射光線と反射光線の長さの和が、すべての場合の中で最小であることが従う。一方、屈折光学においては、M および N (図 2 を参照) が媒質の抵抗を表し、 $M \times AE$ および $N \times BE$ は、それぞれ光線 AE および EB がその媒質を通過する際の貫通の困難さを表す (光線の困難さは、媒質の抵抗と経路の長さから成り立つからである)。このとき、経路 AE と EB による困難さの総和 $M \times AE + N \times BE$ は、取り得るすべての中で最小となる。光線は点 A から点 B へ、この経路を通して最も簡単に到達する。(証明終わり)

そして、これがホイヘンスが労を費やして、しかもフェルマーがさらに多大な労力をもって証明した命題であり、これに対して我々は、ほとんど三語にも満たないほど簡潔に証明したのである。彼らは、光線が点 A から点 B に至るまでに要する時間という語を用いたが、その代わりに我々は困難さという語を用いた。これは意図的になされたものであり、光が瞬時に伝播すると仮定する場合であっても、あるいは連続的に伝播すると仮定する場合であっても、いずれの仕方によっても証明が成り立つようにするためである。このことから、我々の基礎づけは、いっそう大きな確実性を獲得していると考える。他の人々が、自らの基礎原理そのものからというよりは、むしろそこから派生した、間接的で遠回りな結果を通して掘り起こした当の事柄が、いかなる外来的な仮説をも援用することなく、ただちにその上に築き上げられているからである。しかも彼らはその際、物理学から、あるいはさまざまな仮定を借用しているが、それらは常に他者によって疑問視され続ける類のものである。

No. LXVI 等周問題についての書簡からの抜粋

これまで人々は、これらの問題の著者が、1698年12月15日付の「学術誌」(No.XLVII.P.150を参照)において、グローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏が彼に提示した二つの条項を受け入れるであろうと期待してきた。それらの条項は、問題の著

者がこれを受諾したとしても、彼にとっては何ら危険を冒すことなく、むしろ提案者の側にすべての危険が帰するような性質のものであり、それほどまでにベルヌーイ氏が彼に対して譲歩を示していたからである。また、それは両者の間に長らく続いている論争を、最も迅速に終結させる手段となるはずであった。しかし、この期待が裏切られたのを見て、人々は、問題の著者がすでに自らの立場に不安を抱き、これらの問題を解決したと主張する方法自体について、みずから誤っているのではないかと恐れているのではないかと、という疑念を抱き始めている。人々がこの考えをいっそう強めるに至ったのは、彼がさまざまな箇所であまりにも粗雑に自己矛盾を犯していることが認められたからである。その一例を示すために、読者は、1694年のライプツィヒ学術誌 *Acta Eruditorum* の P.276, L.8 と、1698年8月4日付学術誌 P.360, L.13 (No.XLV, P.145を参照) とを比較してみるとよい。前者の学報において、弾性板、あるいはある液体を満たした布の湾曲について論じながら、彼は次のように述べているからである。「同一の周長をもち、同一の直線に立脚する等周図形のすべての中で、その弾性曲線は、重心がその直線から最も遠く離れているものである。」しかし学術誌においては、彼はこれと正反対のことを直接に主張している。「私はむしろ、それは誤りであり、重心が軸から最も遠くにある等周図形は、液体を満たした布の形ではなく、別の形であると主張する」と彼は述べている。これは、自分自身に対して反証を突きつけるための、実に激しい試みである。彼の最大の論敵でさえ論駁するために、これほどまでに攻撃的で、これほどまでに強い表現を見いだすことはできなかったであろうし、彼が自らを論駁する際に用いたこれらの言葉以上のものは、他にあり得なかったであろう。

学術誌 *Journal des Sçavans*
1701年、2月21日号
パリ版 P.86、オランダ版 P.134

この点を指摘しようとしたのは、不整合だらけの主張を果たして信頼の根拠として用いてよいのか、ひいては、グローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏に対して、この問題の著者がこれまでに述べてきた一切の主張を信用し得るのかどうかを、読者に知らせるためである。また、指定された学術誌において言及している誤った推論を、軽率な推測によって相手に帰しているのは、果たして彼自身ではないのか、という点についても、あらゆる状況証拠に照らして疑問が残るからである。しかし、これらのことはあくまで余談として述べるにとどめておく。必要が生じた場合には、後日にあらためて、問題の著者の著作の中に、幾何学の最初の公理にさえ反するような、さらなる矛盾や誤り、見落としが存在することを示す用意がある。しかし、そのことによって、彼が正当な推論によって成し遂げたかもしれない、数学における他の発見の美しさを、いささかも損なおうとするものではない。最も偉大な人物であっても、つまづきを犯すことはある。したがって、それ自体において彼を責めるべきではない。ただし、もしそれが不当であるにもかかわらず、他人の同様の過失を非難しようとするのでなければ、という条件においてである。

差し当たり、ここでは次の点を公に注意喚起するにとどめておく。グローニンゲン大学教授ベルヌーイ氏は、王立科学アカデミーの判断に身を委ね、その等周問題に関する方法を、同アカデミー書記官の手にすでに提出した。これらの方法は、彼がすでにおよそ3年前にライプニッツ氏に伝えていたものと

同一であり、ライプニッツ氏はそれを常に承認してきたのであって、その証拠として提示し得る書簡が存在し、また必要とあらば公に表明することを約束している。したがって、今や残されているのは、問題の著者が、これほど長らく約束されてきた方法を公に示すことだけである。(No.LXXV を参照)

№. L X V I I

ヤコブ・ベルヌーイ氏の新しい方法

あらゆる代数曲線において、接触円の半径、曲率を、迅速に決定する

この方法は、根の等価性にも、また 1694 年の学術誌 Acta Eruditorum において我々が示した諸定理にも基づくものではなく、ある特異な推論から導き出されたものであり、いかなる微分の補助を用いることなく、あらゆる代数曲線における曲率半径を一般的に与えるものである。しかもその手際と迅速さはきわめて著しく、これ以上簡単なものは考えられないほどである。方程式の各項ごとに、何らの予備的計算も行ふことなく、即座に、ある別の項を置き換えるだけで足りるからであり、その具体的な仕方は、以下に述べるところからも明らかになるであろう。

任意の代数曲線を考え、その接線がすでに求められているものとする。横座標を $AB = x$ 、縦座標を $BC = y$ 、およびサブノルマルを $BD = z$ とし（これらはいずれも、点 C が与えられているとする）、いま求めるべきものは、接触円の半径、曲率半径 CE である。

規則、曲線の性質を表す方程式全体を一方の辺にまとめ、もし x と y のいずれも含まない項が存在するなら、それを削除する。その後、残りの各項のうち、 x のみを含むものはそれぞれ fx^m で表し、 y のみを含むものは gy^n で表し、 x と y を同時に

含むものは $hx^r y^s$ で表すものとする。ここで、文字 f, g, h はそれぞれ当該項の係数を表し、文字 m, n, r, s は、 x および y のべき指数を表す。そして、ある分数を作る。

	分子	分母
各項 $\left\{ \begin{array}{l} fx^m \\ gy^n \\ hx^r y^s \end{array} \right\}$	代入 $\left\{ \begin{array}{l} +mfx^{m-1}z \cdots \\ -ngy^{n-1} \cdots \\ +rhx^{r-1}y^s z \\ -shx^r y^{s-1} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} +(m-mm)fx^{m-2}yy \\ +(n-nn)gy^{n-2}zz \\ +(r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} \\ +(s-ss)hx^r y^{s-2}zz \\ -2rshx^{r-1}y^s z \end{array}$

与えられた方程式 $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$ （すべてのものが帰着される標準形）に代えて、

$$\frac{+mfx^{m-1}z - ngy^{n-1} + rhx^{r-1}y^s z - shx^r y^{s-1}}{+(m-mm)fx^{m-2}yy + (n-nn)gy^{n-2}zz + (r-rr)hx^{r-2}y^{s+2} + (s-ss)hx^r y^{s-2}zz - 2rshx^{r-1}y^s z}$$

と書く。すると、分数の分母と分子の比は、線分 CD と接触円の半径 CE との比と同じになる。

例 I、あらゆる種類の放物線に対する方程式は $x - y^n = 0$ である。ここで x を fx^m に、 y^n を gy^n に対応

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1700 年 11 月号 P.508

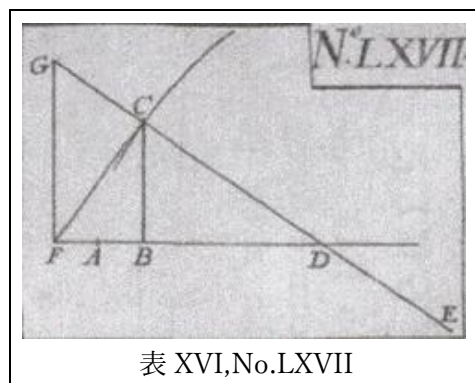


表 XVI, No. LXVII

させると、 $f=m=1, g=-1, n=n$ となる。これらの値を代入すると分数 $(z+ny^n):((nn-n)y^{n-2}zz)$ が得られるが、これは $(z+nx):((nn-n)y^{n-2}zz)$ と書ける。放物線の性質より $ny^{n-2}z=1$ であるから $(z+nx):(n-1)z$ となる。したがって $(n-1)z:(z+nx)=CD:CE$ 、 $z:(z+nx)=CD:(n-1)CE$ である。放物線のサブタンジェントが $BF=nx$ であることから、簡単な作図法が得られる。接線 CF が軸と交わる点 F から軸に垂直な直線 FG を立て、延長した DC がこれと交わる点を G とすると、 $DG=(n-1)CE$ となり、 $CE=\frac{1}{n-1}DG$ である。

例 II、曲線の方程式を $y^3+x^3+xyx-xyy+a^3-aa y+aax-axx+ayy=0$ とする。定数項 a^3 を無視し、各項を整理して、

$$\begin{array}{llll} +y^3 & \text{を} & gy^n & \text{に} & g=1, n=3 \\ +x^3 & \cdots & fx^m & \cdots & f=1, m=3 \\ +xyx & \cdots & hx^r y^s & \cdots & h=1, r=2, s=1 \\ -xyy & \cdots & hx^r y^s & \cdots & h=-1, r=1, s=2 \end{array} \quad \begin{array}{llll} -a^2 y & \text{を} & gy^n & \text{に} & g=-aa, n=1 \\ +a^2 x & \cdots & fx^m & \cdots & f=aa, m=1 \\ -axx & \cdots & fx^m & \cdots & f=-a, m=2 \\ +ayy & \cdots & gy^n & \cdots & g=a, n=2 \end{array}$$

これらをすべて代入すると次の分数式ができる。

$$\frac{-3y^3+3xxz+2xyz-xyx-yyz+2xyy+aa y+aaz-2axz-2ayy}{-6yzz-6xyy-2y^3-4xyz+2xxz+4yyz+2ayy-2azz}$$

分数の分母と分子の比は、線分 CD と接触円の半径 CE との比と同じになる。

観察 I、 x, y, z, AB, BC, BD, CD のあいだに関係式が与えられているときには、その関係を用いて、分数式からそれらの量のうち一つ、あるいは複数を常に消去することができ、その結果、求める量を多くの場合より簡単な形の項で表すことができる。これは上で、例 I において実際に起こったとおりである。

観察 II、与えられた方程式に含まれる分数や無理量については、それらが単に量 x および y の単純なべきを示しているにすぎない場合には、あらかじめこれらを除去する必要はない。例えば $aa:x$ と

$aa x^{-1}$ 、また $\sqrt{ax}$ と $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ 、さらに $\sqrt[3]{xyx}$ と $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ などは、本法においては同等に取り扱われる。

観察 III、むしろ、分数や無理量は、たとえそれらが二項式あるいは多項式の根号を含む場合であっても、決して除去する必要はない。そのような量に対応して、分数中に何を代入すべきかを同様に定めることができるからである。例えば、方程式中に無理量 $\sqrt{x^m+a^m}$ が含まれている場合、簡略のためこれを p とする。このとき、分数の分子においては $(mx^{m-1}z):np^{n-1}$ を代入し、分母においては $+((m-mm)x^{m-2}yy):np^{n-1}+((n-1)mmx^{2m-2}yy):nnp^{2n-1}$ とを置く。同様の操作は、他の場合についても同じく適用される。

観察 IV、これとほぼ同様の方法によって、接線を求めるための規則も与えることができる。もっとも、同一の結果は通常の微分計算によっても、さほど困難なく導かれる。いま再び、次の形の方程式が与えられているとする。 $fx^m+gy^n+hx^r y^s+a=0$ 。このとき、サブノルマル $BD=(-mfx^{m-1}-rhx^{r-1}y^s):(+ngy^{n-2}+shx^r y^{s-2})$ で与えられ、サブタンジェント $BF=(-ngy^n-shx^r y^s):(+mfx^{m-1}+rhx^{r-1}y^s)$ となる。さらに、軸上の線分 $AF=(-ngy^n-shx^r y^s-mfx^m-rhx^{r-1}):(+mfx^{m-1}+rhx^{r-1}y^s)$ によって与えられる。

これと同様の規則は、すでに学術誌 (Acta Eruditorum) 創刊年において、高名なるツィルンハウス (Tschirnhaus) によって示されている。ただし彼は、方程式を整理する際に、 y の最大ベキに着目すべきことを要求している点において、本法と異なる。しかし本法においては、それは必須ではない。方程式のすべての項を一方の辺にまとめるだけで十分である。

以上が、今回公にしたかった事柄である。これらの正しさを検証しようとする者は、曲率半径がすでに他の方法によって知られているさまざまな曲線に対して、本規則を試みてもよい。他方、この発明の技法そのものに、より好奇心をもって立ち入ろうとする者には、これを一つの謎として、自ら解くべき課題として提示しておく。もっとも、その解答については、いずれ私自身が示すことになるだろう。

No. LXVII

ヨハン・ベルヌーイ

任意の曲線 (代数的曲線および超越曲線を含む) において、
曲率円の半径を迅速に構成するための新しい方法。

併せて、代数的曲線において同一の量を、通常の微分計算によって解析的に決定する方法。

私が偉大なるブラキストクローネ問題の考察に初めて取り組んだとき、その解法のために直に見出した二つの方法を互いに比較しているうちに、偶然にも、ある一つの公式が私の前に現れた。それは、きわめて簡潔であると同時にきわめて普遍的であり、代数的曲線のみならず超越曲線を含むあらゆる曲線において、接触円の半径 (曲率半径) を表現するものであった。しかもこの公式は、一次の微分量のみから成っており、これまで他の人々によって伝えられてきたすべての公式が、必ず微分の微分、二次の微分量を含んでいたのとは対照的であった。そのため私は、この新しい発見を、きわめて特異なものとして、最初の衝動においてはささか喜ばずにはいられなかった。しかし、ほどなくして、それが通常の公式からあまりにも明白に導かれるものであることを理解し、果たしてこれを自分の覚書に書く価値があるかどうかさえ、疑うに至ったのである。しかし、この公式が、あらゆる曲線に対する接触円の半径を、幾何学的にしかも普遍的かつきわめて迅速に構成するという、我々の方法の端緒を与えた以上、その源泉をここに簡潔に明らかにすることをためらうものではない。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1701 年 3 月号 P.136

任意の曲線を考え、その座標を x および y とする。一般的に表す微分方程式が $dx = udy$ で与えられているとする (ここで u とは、 x, y および定数から任意に構成される量を意味する)。さらに、曲線の微小要素を dt とおくとき、曲率円の半径は常に $dt^3 : dy^2 du$ によって与えられると主張する。これを次のように簡単に証明できる。 dy を定数とみなすとき、曲率円の半径が $dt^3 : dy ddx$ に等しいことは既知である。一方、 $dx = udy$ であるから、 $ddx = dudy$ となる。したがって、 ddx の代わりに $dudy$ を代入すれば、先に述べたとおり、曲率円の半径は $dt^3 : dy^2 du$ となることが得られる。以上により、本結果は、通常の量、有限量のみを用いて、きわめて一般的な曲率半径の構成法を我々に与えるものである。超越曲線であれ代数曲線であれ、与えられた曲線 AC を考え、その任意の点 C における接触円半径 (曲率半径) を定めるものとする。図に示されているとおり、次のように諸直線を引く。接線 CF が軸と交わる点 F から、軸に垂直な直線 FG を立て、これを曲線の法線 DC を延長したものと交差させ、その交点を G とする。さらに、与えられた曲線については、接線、サブタンジェント、法線、サブノルマル等

が既知であることを前提とする。新たな曲線 LM を次のように構成する。その縦座標 BM が、与えられた曲線の縦座標 BC、そのサブタンジェント BF、および任意に選ばれた一定量 P に対して、第 4 比例となるようにする。このことから、この新たな曲線もまた定まることになり、その接線、サブタンジェント等も同様に求められる。したがって、FB と NB との比が、GD とある第 4 比例量 CE との比に等しくなるように定める。このとき、この CE が、点 C における所与の曲線の接触円半径（曲率半径）であると主張する。

この証明は、等式のただ一つの連鎖によって完結する。その等式は、一部は作図から、他の部分は三角形の相似から導かれている。

$$\begin{aligned}
 CE &= NB \times GD : FB \quad (\text{作図によって}) \\
 &= NB \times CF \times FD : FB \times CB \quad (\text{三角形 FCB と GDF が相似}) \\
 &= NB \times CF^3 : FB^2 \times CB \quad (\text{三角形 CFB と DFC が相似}) \\
 &= NB \times CF^3 \times P : FB \times CB^2 \times BM \quad (\text{作図によって}) \\
 &= dx dt dt^2 P : P du dx dy^2
 \end{aligned}$$

(接線の性質によって $NB : BM = dx : P du$,

$CF : FB = dt : dx, CF : CB = dt : dy$)

$$= dt^3 : du dy^2 \quad (\text{分子・分母を } P dx \text{ で割る})$$

となる。これは前に証明したとおり曲率円の半径に等しい。したがって CE もまた曲率半径である。

(証明終わり)

例として、二つの曲線を考える。一つは代数曲線、もう一つは超越曲線である。そこで、AC を任意の種類の放物線とし、その指数を n とする。作図から明らかに、LM は別の放物線となり、その指数は $n : (n-1)$ となる。したがって、 $FB : NB = GD : CE = n : \frac{n}{n-1} = (n-1) : 1$ となる。ゆえに結局、 $CE = GD : (n-1)$ である。

[図 2] において AC を通常対数曲線とする。LM もまた同様に対数曲線となり、しかもそのサブタンジェントは元のものと同じであるが、位置は先のものとは逆向きになり、同じ軸の上に置かれる。したがって NB が FB に等しいので、ここから直ちに、対数曲線においては曲率半径 CE が至るところ GD に等しいことになる。これはこの曲線のきわめてすぐれた、しかもこれまでまだ観察されていなかった性質であり、しかも通常のアキメデスの放物線と同じ性質を共有しているという点で、なおさら注目に値する。その放物線においてもまた、CE は至るところ GD に等しいからである。さらに付け加えて指摘しておくべきこととして、この対数曲線における曲率半径 CE は、両方向において無限大へと発散する。したがって、その途中のどこかに最小値が存在する。そしてそれは、サブノーマルがサブタンジェントの半分に等しくなる点で生じる。

以上をもって、いかなる曲線に対しても適用される曲率半径の普遍的な幾何学的構成についての論述は十分であるとする。これと同一量の、代数曲線における解析的表現について述べるならば、先に得ら

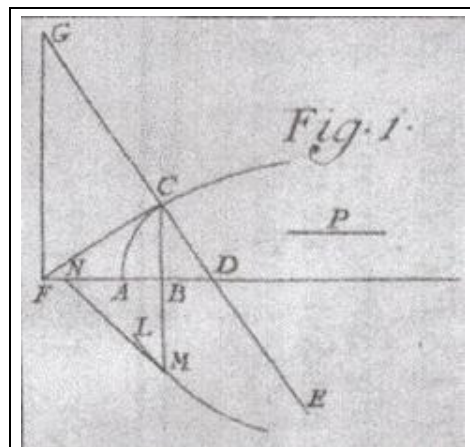


表 XVI, No. LXVIII, 図 1

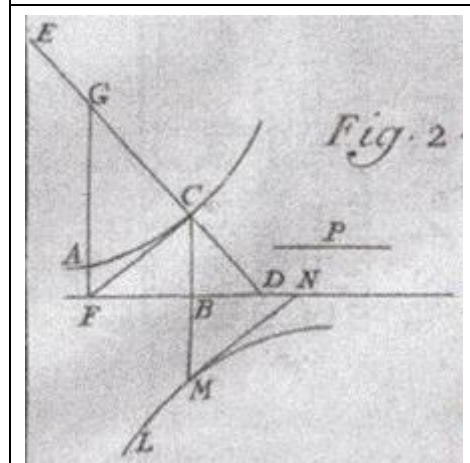


表 XVI, No. LXVIII, 図 2

れた簡潔な公式 $CE = dt^3 : dudy^2$ により、通常の微分計算を用いることによって、きわめて簡明に結果が得られる。これは以下に述べるところによって明らかとなるであろう。

すべての代数曲線の普遍的方程式は、次の形で与えられる。 $fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$ 。ここで、 fx^m は変数 x のみを含む各項を表し、 gy^n は変数 y のみを含む各項を表し、さらに $hx^r y^s$ は x と y の双方を同時に含む各項を表すものとする。 x, y を曲線の座標として取り、 a を定数とし、 f, g, h をそれぞれ対応する項の係数、 m, n, r, s を変数 x および y のべきの指数とする。法線 $CD = v$ 、サブノルマル $BD = z$ とする。次に、曲率半径の長さを定めるための、同様に普遍的で、純粋に代数量のみから成る文字的表現を与えなければならない。そこで、次のように行う。先に述べた方程式を通常の方法に従って微分すれば、 $mfx^{m-1}dx + ngy^{n-1}dy + rhx^{r-1}y^s dx + shx^r y^{s-1} dy = 0$ となる。したがって、 $(mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s)dx = (-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1})dy$ が成り立つ。簡略のため、次のように定める。 dx の係数を p 、 dy の係数を q とする。このとき $pdx = qdy$ が成り立ち、 $dx = qdy : p$ となる。さて、あらゆる曲線に対して曲率半径を一般的に表現する我々の公式 $dt^3 : dydy^2$ において、 du の代わりに比 $q : p$ の微分を代入する。 $u = q : p$ であるから、 $du = (pdq - qdp) : pp$ となる。さらに $p : q = dy : dx = z : y$ が成り立つことから、 $du = (z dq - y dp) : pz$ と表すことができる。 $dt^3 : dudy^2 = pz dt^3 : (z dy^2 dq - y dy^2 dp)$ を得る。さて、係数 p および q の式 $p = mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s$ 、 $q = -ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}$ において微分を求めると、 $dp = (mm - m)fx^{m-2}dx + (rr - r)hx^{r-2}y^s dx + rshx^{r-1}y^{s-1}dy$ 、 $dq = -(nn - n)gy^{n-2}dy - (ss - s)hx^r y^{s-2} - rshx^{r-1}y^{s-1}dx$ となる。したがって、先に得られた p, dp, dq の値をそれぞれ代入すると、 $dt^3 : dudy^2$ は、 $(mfx^{m-1}z + rhx^{r-1}y^s z)dt^3$ を分子とし、 $(m - mm)fx^{m-2}ydx dy^2 + (r - rr)hx^{r-2}y^{s+1}dx dy^2 - rshx^{r-1}y^s dy^3 + (n - nn)gy^{n-2}z dy^3 + (s - ss)hx^r y^{s-2}z dy^3 - rshx^{r-1}y^{s-1}z dx dy^2$ を分母とする比として得られる。さらに、 dt, dx, dy の代わりに、それぞれに比例する量 v, y, z で置き換える。 $dt : dx = v : y$ 、 $dx : dy = y : z$ が成立するから、この置換を行い、項を整理し、必要な簡約を施すと、 $CE = dt^3 : dudy^2$ という曲率半径は、 $(mfx^{m-1}v^3 + rhx^{r-1}y^s v^3)$ を分子とし、 $(m - mm)fx^{m-2}y y z + (n - nn)gy^{n-2}z^3 + (r - rr)hx^{r-2}y^{s+2}z + (s - ss)hx^r y^{s-2}z^3 - 2rshx^{r-1}y^s z z$ を分母とする比として得られる。したがって、この分数の分母が分子に対して成す比と同じ比を、単位が求めるべき曲率半径 CE に対して成り立つ。

この結果は、分数を $wv : z = FD$ で割り、さらに「分母が分子に対する比は、 FD と CE に対する比と同じ」と述べるならば、いくらか簡潔に表現することができる。ここで注意すべきことは、この分数は分母に関する限り、本年の Acta 前巻 P.509 (No.LXVII, P.248 を参照) において提示されたものと完全に一致しているという点である。しかし、分子に関しては、ここで与えた我々の表式は2項のみから成っているのに対し、あちらのものは4項を含んでおり、したがって本稿のものの方がより簡潔である。このことは、比類なき微分計算およびそのきわめて高名な創始者の称揚として述べられるべきであり、それによって当該計算法が本来備えている卓越性が正当に認められ、また、無理解あるいは嫉妬から、この方法はかかる問題やその他の問題には適用できないと大げさに言う不当な批判者たちから擁護されるべきである。実際には、微分計算は、巧みに用いられるならば、これらの問題のみならず、はるかに多くの問題にまで真に適用され得るのである。

なお、接線・法線その他について定められ得る諸規則に関しては、通常の微分計算からきわめて簡単に導き出されるものであるから、その作業は初心者委ねることとする。しかし、サブノルマルについ

て得られる結果は、試みることを好む者がいれば、Actaにおいて引用された、曲率半径を決定するための規則が果たして一般的に妥当であるか否かを検討するうえで有用である。それを本稿において提示し証明した私の方法と比較すれば、サブノルマル BD の値が導かれるからであり、その値が（実際に私が確かめたように）法線に関する一般規則が与える値と同一であるならば、前者の規則もまた一般的に成立するものと判断されるであろう。

No. LXIX ヨハン・ベルヌーイ

角または弧の多分割、二つの普遍方程式によって提示し、
サイクロイドのすべての可積分帯域を一般的に決定する

先に刊行された年の Acta Eruditorum の P.268 (No.LX,P.220-221 を参照) において、私は角の分割に関する問題を、一般的に解くべきものとして提示した。それを解決することによって、可積分なサイクロイドの帯域が無数に存在する場合の決定という問題全体が完結するからである。個々の帯域

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1701 年 4 月号 P.170

ごとに、その都度きわめて煩雑かつ煩わしい計算に立ち戻らねばならない、という事態を避けるためである。そして私は、いかなる大きさの角であっても、事前にいかなる計算を行うことなく、任意に倍化・分割することを可能にする、このような普遍的な公式をすでに自らが有していることを述べた。私はそこから、このきわめて困難で、しかも古来あらゆる時代にわたって切望されてきた問題において、何らかの成果を挙げようとする者が誰かしら現れ、我々双方の成果を結び合わせた共同研究から、はるかに大きな実りが生まれることを期待していたのである。しかし実際のところ、そこから新たに得られた結論は、ただ次の一点に尽きる。角の分割問題は、数と数との比があらかじめ定められた場合には代数的であるが、任意に与えられた比に関しては、一般には超越的な問題である、ということである

(No.LXI を参照)。確かにこれはその通りである。しかし、それでもなお、一般に与えられる方程式、言い換えれば公式が存在しうることを妨げるものは何もない。その公式とは、未定のまま提示された問題の解を余すところなく収めてしまい、しかも特定の場合においては、他には何も要求せず、ただ項の即時的かつ形式的な代入だけで足りるようなものである。これは、あらゆるこの種の一般公式が必要とする性質である。このことは、代数曲線の曲率半径を定める方法そのものからも明らかである。その方程式は、未定の形で取られれば超越的であるが、特定の場合には代数的となるからである。同様に、2 項式の未定のベキもまた超越的である。しかし、それゆえに、任意に与えられたベキを、事前の計算なしに提示する一般的な方法を教える級数によって、それを表現することはできないと言えるであろうか。それゆえ私は、弧の未定の乗法および分割のために、そのような公式を求めていたのである。ところが今や、私は二つの公式を得ている。そのうち第一のものは、証明とともに、すでにしばらく以前から高名なるロピタル侯と共有してきたものであり、以下に示すのがそれである。

円の半径を 1 とする。与えられた弧の弦を a とし、補弧（半円－与えられた弧）の弦を $\sqrt{4-aa}$ とし、簡略のためこれを b とおく。また、倍弧または分弧の弦を x とし、その半円に対する補弧の弦を $\sqrt{4-xx}$ とし、簡略のためこれを y とおく。さらに、倍数または分数を n とする。私は次のように主張する。弧を n 倍する場合には、

$$x = ab^{n-1} - \frac{n-2}{1}ab^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2}ab^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}ab^{n-7} + \frac{n-5.n-6.n-7.n-8}{1.2.3.4}ab^{n-9} - \dots$$

となる。また、弧を分割する場合には、

$$a = xy^{n-1} - \frac{n-2}{1}xy^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2}xy^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}xy^{n-7} + \frac{n-5.n-6.n-7.n-8}{1.2.3.4}xy^{n-9} - \dots$$

の根として与えられる。この級数の進行の性質はそれ自体から明白であり、その一様性から、どのようにに継続すべきかも簡単に理解できる。しかも、この進行は、その係数が0に到達するまで続けられねばならない。そのような項は、ここで仮定しているように、 n が整数であるかぎり、この進行の中に必ず存在する。たとえば $n=5$ とすると、この級数は3つの項になる。したがって5倍弧の弦

$= ab^4 - 3abb + a$ となり、また5分弧の弦は、方程式 $a = xy^4 - 3xyy + x$ の根に等しい。その他の場合も同様である。

さてここに、第二の一般公式を示す。同じ文字を保持したまま、今度は直径を単位として取るならば、弧を n 倍する場合について次の式が得られると私は主張する。

$$x = nab^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^3b^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}a^5b^{n-5} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7}a^7b^{n-7} + \dots$$

あるいは、 y の値を用いるほうが好ましいのであれば、

$$y = b^n - \frac{n.n-1}{1.2}a^2b^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}a^4b^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{n-6} + \dots$$

となる。また、弧の分割の場合については、 x は次の方程式

$$a = nxy^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3y^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5y^{n-5} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7}x^7y^{n-7} + \dots$$

の根であると私は主張する。あるいはまた、(これは同じことを意味するが) x は次の方程式

$$b = y^n - \frac{n.n-1}{1.2}x^2y^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4y^{n-4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6}x^6y^{n-6} + \dots$$

の根である。再び $n=5$ を例として取ると、5倍弧の弦 $= 5ab^4 - 10a^3bb + a^5$ となり、また、5分弧の弦は次の方程式 $a = 5xy^4 - 10x^3yy + x^5$ の根に等しい。あるいは、次の方程式 $b = y^5 - 10xy^3 + 5x^47$ の根に等しい。これらすべてを、先の一般公式によって得られた結果と比較すると、前者では半径を単位とし、後者では直径を単位としていることに留意すれば、両者の間に至るところで見事な一致がある。この後者の級数の法則もまた、それ自体から明らかである。その係数は二項式の n 乗における係数と同一であるが、交互に取られており、また符号も先のものと同様に、「+」と「-」が交互に現れる。

この後者の公式は、表現の点においては、先行する公式に比してやや冗長に見受けられる場合もあるが、それにもかかわらず、なお前者よりも採用されるべきものである。本公式は、先行する公式と同様に、指数 n が整数でない場合にまで適用されるのみならず(この点だけでも、すでに無限個の可求積ゾーンを扱うには十分であるが)、さらに分数の場合にも、さらには任意の無理数の場合にまでも適用範囲を拡張するからである。これらの場合においては、展開の進行は、有限な和から構成される無限級数へと帰着する。したがって、角または弧のいかなる分割に対しても、方程式の根を表現する、純粋に既

知の項のみから成る級数を、簡単に与えることが可能となる。与えられた角または弧を n 等分することは、 $1:n$ 倍することと同じある。したがって、一般的な級数展開において、弧を乗ずる場合に用いた

$$x = nab^{n-1} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^{n-3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 b^{n-5} - \dots$$

という形の中で、 n の代わりに $1:n$ を代入すれば、純粹に既知の項のみから成る無限級数が生ずる。そしてその級数の総和は、結果として

$$a = nxy^{n-1} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 y^{n-3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 y^{n-5} - \dots$$

という方程式の根となり、任意の弧の一般的な分割を与えることになる。同様にして、もし n の代わりに $\sqrt{n}$ または $\sqrt{1:n}$ を代入するならば（ここで $\sqrt{\quad}$ によって、任意の次数の平方根＝一般の根を意味するものとする）、与えられた弧に対して、たとえいかに無理な比であっても、あらかじめ与えられていた比をもつ弧の弦を決定する級数が得られる。これらの事柄は、これまできわめて大きな不明瞭さに包まれていた。無理数というあらかじめ与えられていた比において、互いに可測でない弧同士を、いかなる他の方法によって決定し得るのか、私には思い当たらないからである。

さて、ここで再びサイクロイドの可積分なゾーンの問題に立ち戻ると、前述の事柄から、そのようなゾーンが無限に多数、同時に代数的に記述され得る方法が明らかである。私は「代数的に」と言っているのである。それらを決定するのに、ある超越曲線を用いる者がいるとしても、そうした者は、円周の直線化を仮定して円積問題を解いたと誇る者以上のことを、何ら成し遂げてはいないからである

(No.LXI を参照)。そしてこの意味においては、サイクロイド上のいかなる面積も、ゾーンは言うまでもなく可積分であるとは言えない。いま任意の半分の弓形 AIB を取るとき、それは常に線分 AI と IB とを辺とする長方形の面積か

ら、 $\frac{1}{2}$ AH と LB とを辺とする長方形の面積を減じ、三角形 HIL の面積を加えたものに等しい。しかし、これは真の意味で求積と呼ばれるものではない。直線 IB および LB はたしかに直線ではあるが、

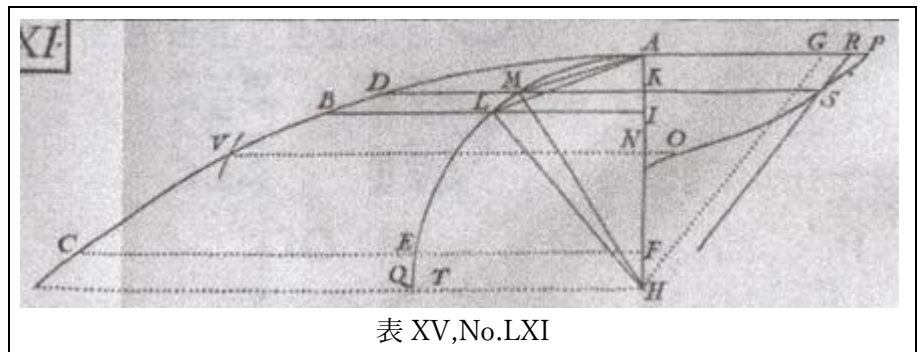


表 XV, No. LXI

代数的に与えられた量の支配下ではなく、AI や HI に対して代数的に表現可能な関係をしていないからである。同様にまた逆の立場から言っても、仮にサイクロイドのある面積、たとえば領域 KDBI が代数的に求積可能であるとしても、それがある超越曲線 OSP と直線 RS との交点によってしか決定されない限り、それは問題を解決するのではなく、むしろいっそう複雑に混乱させている。実際、その方がより簡単に理解されるのである。結局のところ [ここに帰着するのだが]、私は同じ箇所においてすでにこの点を述べたからである。Actorum の該当年 (No.LX, P.220 を参照) において、二つの端点 KM および IL を取る。これらの点の、A と H の中点 P からの距離が、それぞれの弧 AM および AL に反比例するように定められるならば、そのとき領域 KDBI は求積可能であることになる。それは直線的かつ代数的な三角形 HAL+IAL-HAM-KAM に等しいからである。この一点にこそ、問題のすべてがかかっている。しかし、このような条件を備えたこれらの端点を、どのようにして普遍的な公式によって表現すべ

きを私は問題として提示し、何らかの解法が示されることを期待していた。しかしそれは空しく終わった。ところが現在では、上に引用した弧を倍加・分割するための我々の公式から、明瞭に理解されるのである。

さて、前の場合にならって、半径 $AH=1$ とする。また、弧 AM が弧 AL に対して $1:n$ の比、つまり $PI:PK=1:n$ とする。さらに $AK=z$ とおけば、 $PK=\frac{1}{2}-z$, $PI=\left(\frac{1}{2}-z\right):n$, $AI=\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+z\right):n$

となる。このとき $AM=\sqrt{2z}$, $AL=\sqrt{((n-1+2z):n)}$ が成り立つ。先に記載した公式において、

$$x=ab^{n-1}-\frac{n-2}{1}ab^{n-3}+\frac{n-3.n-4}{1.2}ab^{n-5}-\frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3}ab^{n-7}+\dots$$

の式中の x, a, b の代わりに、それぞれ $\sqrt{((n-1+2z):n)}$, $\sqrt{2z}$, $\sqrt{(4-2z)}$ を代入すれば、単位と数との比に対応する場合について、代数的に求積可能な無数のサイクロイド帯を同時に定める一般方程式が得られる。しかも、個々の特別な場合においては、項を単に代入するだけで足り、他の計算は一切不要である。そこで、例として前と同様に $n=5$ を代入すると、 $\sqrt{((4+2z):5)}=(5-10z+4zz)\sqrt{2z}$ を得る。この方程式の根 z は、 AK をどれだけの高さで切り取るべきかを示しており ($KP:PI=5:1$ となるようにしたとき)、領域 $KDBI$ は求積可能となる。

後者の公式においても事情は全く同様である。

$$x=nab^{n-1}-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^3b^{n-3}+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}a^5b^{n-5}-\dots$$

という公式において、直径を 1 と定め、 x, a, b の代わりにすでに得られている値

$\sqrt{\left(\left(\frac{1}{4}n-\frac{1}{4}+z\right):n\right)}$, $\sqrt{z}$, $\sqrt{(1-z)}$ を代入すれば、再び一般方程式が導かれる。この方程式は、無

数の求積可能なサイクロイドの帯を同時に決定するためのものであり、具体的な例への適用においては、項の単なる代入以外には何も要求しない。同一の例として $n=5$ とすれば、

$\sqrt{((1+z):5)}=(5-20z+16zz)\sqrt{z}$ が得られる。この式は、先に求められたものと明らかに同一である。それは、直径の単位の代わりに半径の単位を二つ置き、また直径の平方の代わりに半径の平方を四つ置けば、簡単に理解される。

以上で本件については十分である。もし、我々の公式の普遍性を検証しようとする者がいるならば、すでに挙げた例にとどまらず、他のさまざまな特殊な場合においてそれを試みる。それらは、通常の方法によって簡単に調べることができる。しかし、発見そのものにこれ以上深入りして探究する必要はない。この点について、私は誰か特定の人物を名指しして挑発するつもりはない。

これらそのものの証明でなくとも、少なくとも類似のものの証明を与えてくれれば、それで十分である。したがって、この課題は、なお彼自身にとって未解決の問題として残されている。

さて残るのは、重心が代数的なべきで与えられるようなサイクロイドの立体扇形を見出すことである。これは私が 1700 年の Acta Eruditorum (No.LX,P.221 を参照) において提示した問題であるが、私はこれが困難というよりも、むしろ計算がやたらと多い問題であることを認める。その方法自体はすでに同書において開示してある以上、困難ではない。しかし、そのただ計算がやたらと多いという理由のみから、私はこの方法によって他人の手で自分自身を検証してもらうことを提案した。自分の計算の中に、ひょっとすると誤りが忍び込んでいないかどうかを確かめるためである。その間に、同年の Acta Eruditorum の P.552 (No.LXI,P.223 を参照) に掲載された解法は、到達すべき方程式の中には含まれ

ているとはいえ、満足すべきものではない。これを不思議に思ってはならない。これは有用な根のほか
 に、問題を満たさない無用な根をも含むからである。解析者がそれらを十分に識別しないならば、簡単
 に雲を女神ユーノーと見誤る（偽物を本物と見誤る）のである。そこで、事実をありのままに述べるな
 らば、私は自分の計算を幾度も繰り返して見直し、精査した結果、その中にいかなる誤りも犯されてい
 ないことを確認した。しかし、無用な根を特別な方法で排除したところ、有用な根が二つ残ったもの
 の、それらはいずれも虚数であった。それらは次の方程式の中に含まれている。 $xx - 8ax + 24aa = 0$ 。
 ここで x は、サイクロイドの頂点が、扇形の最大の広がりからどれだけ離れているかを表す距離として
 取られている。一方、 y 、扇形の尖端がその最大の広がりからどれだけ離れているかは、次の方程式に
 よって定められる。 $3yy - 6ay + 8xy - 12ax + 6xx = 0$ 。このようにして、抽象的な解析の立場からすれ
 ば、この問題は確かに解かれうる。しかし、幾何学の立場から、しかも厳密に言うならば、重心が純粹
 に代数的な量によって定められるような、実在するサイクロイドの立体扇形は、まったく存在しないの
 である。(No.LXXXIX.を参照)

No. LXX

積分計算に関する問題の解法。

この計算に関して、いくつかの簡略法を付す。

グローニンゲンの教授、ベルヌーイ氏による。

1702年8月5日付でグローニンゲンから書かれた同氏の書簡のより抜粋したものである。

(この書簡はラテン語でも存在するが、より簡略な形で、ライプツィヒ学術誌

Acta Eruditorum の 1703 年 1 月号 P.26 にも収録されている)

問題

微分形 $pdx:q$ を考える。ただし p および q は、ただ一つの変数 x と定数とから、任意の仕方で組み立てられた有理式を表すものとする。求められているのは、その積分、代数的和である。あるいは少なくとも、それを双曲線または円の求積へと還元することである。この二者のいずれかは常に計算可能だからである。

パリ王立科学アカデミー紀要 1702 年版
P.289、パリ版 P.385、オランダ版同所

解法、 p を q で割り、その余りに含まれる x の最高次数が、 q に含まれる x の最高次数よりも小さくなるまで、この除法を続ける。ただし、もし初めから p に含まれる x の最高次数が q に含まれるそれよりも小さい場合には、除法を行う必要はない。次に、この除法によって得られた商の積分を取る。これは常に可能である。その商は (x に関して) 常に整式かつ有理式だからである。しかし、余りの積分については、これこそが真に困難な点であるが、以下のようにして求める。この余りを r とする。

$rdx:q = adx:(x+f) + bdx:(x+g) + cdx:(x+h) + \dots$ と仮定する。 $rdx:q$ は、 q に含まれる x の最高次数がもつ単位数と同数の対数微分の和に等しい、ということである。ここで注意すべきことは、 $a, b, c, \dots$ が、同様に $f, g, h, \dots$ と同じく、未定の定数量であるという点である。そしてそれらの値を得るためには、 $adx:(x+f) + bdx:(x+g) + cdx:(x+h) + \dots$ という和を、可能なかぎり最小の共通分母にまとめなければならない。そうすれば、この表現は、 $rdx:q$ という与えられた形と相似となり、両者の分母において、 x が同じ次数で現れることになる。 r における x の次数が、他方の分子における次数よりも低い場合には、不足している次数の項を、係数を 0 として補わなければならない。これを行ったうえで、これら二つの和の分子どうし、また分母どうしにおいて、それぞれ対応する項を互いに等しく置く必要がある。そうすれば、第二の式に含まれている未定係数の数だけ方程式が得られる。そしてそれらの未定係数は、与えられた式に含まれる r および q の係数の値を用いることによって、最終的に決定される。ただし、もしそこに矛盾が生じる場合は別である。その場合は、残っている分数の中に、なお完全に積分可能な部分が含まれていることを意味する。したがって、その多項式部分を除法によってあらかじめ分離しておけば、残りの部分については、項ごとの比較は常に成功する。なお、私が「係数」という語によって意味するのは、単なる数値だけではなく、 x のいかなる次数に付随するものであれ、あらゆる定数的な量を含む。

別の方法、 $rdx:q = sdx:t + adx:(x+f)$ と書けるとする。ここで、 t とは x を含む多項式であり、その項は次数が順に下がっていき、最後は純粋な定数項に至るものである。しかもその最高次数は、 q の最高次数よりちょうど 1 だけ小さいものとする。そのほかの項はすべて定数係数を伴っている。同様に、 s とは、定数を係数とする x のべきの列 (多項式) を意味する。その項の次数も順に下がっており、その最高次数は t の最高次数よりちょうど 1 だけ小さいものとする。この方法によって、

$sdx:t+adx:(x+f)$ は $(sx+sf+at)dx:(tx+tf)=rdx:q$ を満たす。そしてこのとき、分母の中の x の次数は同じ次数まで上がることになる。このように前述の方法で残りを処理していけば、そこに仮定した未定定数の値が求まる。その結果、 $rdx:q$ は $sdx:t+adx:(x+f)$ の形に分解される。ここで t に現れる x の次数は、 q に現れる次数よりもすでに一段低くなっている。同様にして $sdx:t$ を $vdx:w+bdx:(x+g)$ の形に分解する。そしてこの操作を繰り返し、最終的には分母が単純な一次式 (x の単純根) だけになるまで進める。そうなれば、最初に与えられた $rdx:q$ は最終的に $adx:(x+f)+bdx:(x+g)+cdx:(x+h)+\dots$ の形に完全に分解される。したがって、残る課題はただ一つ、これら最後に得られた分数の積分が (実数の場合であれ虚数の場合であれ、それらが対数曲線の作図、あるいは双曲線の求積に依存することは明らかであるが) いかにして指数的な量、巡回的な量によって表され得るかを示すことである。以下にこれを示す。

$adx:(x+f), bdx:(x+g), cdx:(x+h), \dots$ は、それぞれ $x+f, x+g, x+h, \dots$ の対数の微分である。したがってその積分 $\int(dx:(x+f)), \int(dx:(x+g)), \int(dx:(x+h)), \dots$ は、対数そのものとなる。ゆえに、 $\int(dx:(x+f))=l(x+f)$ となる。ここで l は対数を表し、 d が微分を表すのと同様である。よって、 $\int(adx:(x+f))+\int(bdx:(x+g))+\int(cdx:(x+h))+\dots=al(x+f)+bl(x+g)+cl(x+h)+\dots$
 $=\text{Log}.\left((x+f)^a \cdot (x+g)^b \cdot (x+h)^c \dots\right)$ (対数の性質により) となる。これが示すべきことである。

系

このことから次のことが理解される。有理型の微分方程式、あるいはディオファントス的手法その他の方法によって有理形へと変換し得る微分方程式であって、しかもその変数およびその微分量が他のあらゆる量から分離されているものは、常に代数方程式、あるいは指数関数的方程式へと還元することが可能である。そしてこの事実は、逆接線法 (接線関係から曲線を求める方法) において極めて大きな有用性がある。実際、方程式 $sdx:t=\sigma dy:\theta$ を仮定し、ここで x, y を変数とする。ただし s, t は定数および任意の x のべきのみから成り、同様に σ, θ も定数および任意の y のべきのみから構成され、しかも全体は根号 (無理式) を含まないものとする。さらに、 $s:t, \sigma:\theta$ の除法から得られる商のうち、純粋に積分可能な部分 (分数項を含まない絶対的な部分) の積分を、それぞれ X, Y とおくならば、最終的に次の形を得る。

$$X+\text{Log}.\left((x+f)^a \cdot (x+g)^b \cdot (x+h)^c \dots\right)=Y+\text{Log}.\left((y+\phi)^a \cdot (y+\gamma)^b \cdot (y+\lambda)^c \dots\right)$$

さらに、 X, Y が乗じられている単位を、ある一定の数 (対数の底を n とする) とみなすならば、対数をべきへと還元することによって、次の指数方程式が得られる。

$$n^X \cdot (x+f)^a \cdot (x+g)^b \cdot (x+h)^c \dots = n^Y \cdot (y+\phi)^a \cdot (y+\gamma)^b \cdot (y+\lambda)^c \dots$$

しかもこの関係式は、場合によっては純粋に代数的方程式へと退化する。たとえば X, Y が 0 となり、かつ係数 $a, b, c, \dots$ と同様に $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ が互いに有理数の比で表せる場合である。

さて、この方法の美しさと普遍性をいま実際に感じ取らせるために、一つの優れた例を挙げよう。これは、ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の 1698 年 5 月 P.232 (No.LI, 第 III 節, P.173 を参照) に提出されている二つの問題のうちの第一の問題である。私はこれらの解をただちに見出し、同年 10 月号の同学術誌 P.473 (No.LII, P.180 を参照) においてその解答を与えた。ただし、そこで注意すべき点として、本来 $\int\left((-a^3dz-4azzdz):(3aaz+2z^3)\right)$ とすべきところが、誤って

$\int((a^3dz+4azzdz):(aaz-6z^3))$ や $\int((a^3dz+4azzdz):(aaz-2z^3))$ のように印刷されているが、これらは正しくない。この問題の主原因は、同一の軸上に描かれ、各々のパラメータがその頂点から同一の軸上のある固定点までの距離に等しいようなすべての放物線を、直角に横切る曲線を求めるという問題であるが、これは単に通常の放物線に限られるものではない。むしろ、それは任意の次数の放物線すべてにまで拡張され、しかもその場合に求められる曲線は、常に代数曲線または指数曲線として与えられるのである。実際、任意の放物線の変数パラメータを x 、指数を m とし、さらに求める曲線の座標を $y=xz$ とおくと、次の関係式が得られる。(1) $dx:x=(-mmz^{2m-2}-1)dz:(mz^{m-1}+z+mmz^{2m-1})$ ただし $dx:x=(1+mmz^{2m-2})dz:(mz^{m-1}-z-mmz^{2m-1})$ ではない。したがって、われわれの方程式は、たとえ指数 m が無理数であったとしても、いかなる根号も含まない形で表されることになり、前述の普遍的規則によって、常に代数方程式、あるいは少なくとも指数方程式へと帰着させることができる。ゆえに、この方法によって求められる曲線もまた、つねに代数的曲線、あるいは指数曲線として与えられるのである。

なお追加しておくべきこととして、計算の簡単さと簡潔さは、変数の選び方に大きく依存する。たとえば、放物線の縦座標を用いる代わりに、その横座標を y と呼び、さらにその可変パラメータを $x=yz$ とおくなれば、次の関係式(2) $dy:y=(-m+1)z^{(m-2)m}-mm)dz:(mz^{(2m-2)m}+mmz+mm)$ が得られる。しかし、[他の条件をすべて同一に保ったまま] もし $y=tx$ と仮定すれば、今度は(3) $dx:x=(-t^{(2-2m)m}-mm)dt:(mt^{(2-m)m}+mmt+mm)$ が得られる。さらに、[諸条件が第一の方程式における場合となお同一に保たれているとすれば] $x=zy$ と仮定すると、最終的に(4) $dy:y=((mm-m)z^{-2m+1}-mz^{-m+1})dz:(mz^{-2m+2}+mz^{-m+2}+1)$ が得られる

第二の普遍方程式は、通常の放物線の場合にはこの問題をきわめて簡単にする。これらの放物線では指数 $m=2$ であるから、普遍方程式 (2) は次の特殊な形 $dy:y=-5dz:(6z+4)=-\frac{5}{6}dz:(z+\frac{2}{3})$

が得られる。この式は非常に単純であり、前述の規則によって、次の純粋に代数的な方程式

$y(2y+3x)^5 = (\text{任意に取った一定量})$ へと帰着する。例えばその定数を a^6 と置けば、

$x=-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\sqrt[5]{(a^6:y)}$ が得られる。したがって、求めるべき曲線は最終的に代数曲線となり、きわめて簡単に作図することができる。もし誰かが、この曲線の次数を求めるために必要な計算を実際に行い、 x, y を座標として取るならば、この曲線は 12 次の曲線であることが分かるであろう。そしてその方程式は

$$31104yxx^{10}+25920y^4x^8+8640y^6x^6-64a^6x^6+1480y^8x^4-582a^6yxx^4+120y^{10}xx+228a^6y^4xx+4y^{12}-4a^6y^6+a^{12}=0$$

となる。

注釈

前の放物線の例においても、また他の諸例においても同様に、上記の諸公式 (1) (2) (3) (4)、さらにはおそらく今後見出され得る他の公式までもが、それぞれ異なる次数を与えるのであるから、これらの公式のあいだには選択の余地があることは明らかである。そして、できるだけ次数の低い結果を与える公式を選ぶことが重要である。たとえば、放物線の指数が $m=1$ の場合、これらの放物線が通常の双

曲線に退化する場合には、公式は二つ (2) と (4) が得られる。これらの公式は、変数 z または t を 4 次までしか高めないのに対し、他の二つの公式はそれらを 5 次まで高めてしまう。もし最後の公式を選ぶならば、次の微分方程式 $dy: y = (-2z^3 - zz) dz: (z^4 + z^3 - 1)$ が得られる。この微分方程式は、その分母において z が 4 次になっていることから、前述の一般規則によって四つの単純な微分項に分解して解くことができる。そして、この規則に従って計算を正確に行えば、 $dy: y$ は次に示す四つの単純な微分量の和に等しくなることが分かる。ここで文字 n は方程式 $n^6 - 3n^5 + 3n^4 - n^3 + 4nn - 4n + 1 = 0$ の根になり、この方程式から $n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}\right)} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{283}{108}}\right)}\right)}$ となる。また、これらの根を用いて

$$\begin{aligned} & \frac{(-4nn+5n-2)\sqrt{(2n+1)}-(n+1)\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n+1)}} dz: \left(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n + (n-1)\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right):(-2n+1)\right)} \right) \\ & + \frac{(-4nn+5n-2)\sqrt{(2n+1)}+(n-1)\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n+1)}} dz: \left(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n - (n-1)\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right):(-2n+1)\right)} \right) \\ & + \frac{(-4nn+3n-1)\sqrt{(2n-3)}+n\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n-3)}} dz: \left(z + \frac{1}{2}n - n\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}\right):(-2n+1)\right)} \right) \\ & + \frac{(-4nn+3n-1)\sqrt{(2n-3)}+n\sqrt{(-2n+1)}}{(8nn-8n+3)\sqrt{(2n-3)}} dz: \left(z + \frac{1}{2}n + n\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}\right):(-2n+1)\right)} \right) = dy: y \end{aligned}$$

という形の表現になる。

しかし、ここでは根 n は二つの実数値をもつが、そのうち大きい方を用いると、 $-2n+1$ は負になる。したがって、この四つの微分項のうち最初の二つは虚数的なものとなり、それらは円弧の長さの求積に依存する作図によって構成されることになる。他方、後の二つは実数的であり、対数曲線を用いることによって作図可能である。これに反して、もし n のより小さい値を用いるならば、これら同じ四つの微分項のうち最初の二つは実数的となり、残りの二つは虚数的となる。したがって、いずれの取り方をしても、求めるべき双曲線族の軌跡の作図は、一部は円の求積に、また一部は双曲線の求積、つまり対数曲線の作図に依存することになる。

合成された微分を単純な微分へ、また逆に単純な微分を合成されたものへと変換するための簡略な方法、さらに虚数的な単純微分を実数的な合成微分へと変換する方法

問題 I、微分式 $adz: (bb - zz)$ を対数微分 $adt: 2bt$ に変換し、また逆にそれを元に戻せ。

$z = (t-1)b: (t+1)$ と置けば、 $adz: (bb - zz) = adt: 2bt$ となる。逆に、 $t = (+z+b): (-z+b)$ と置けば、 $adt: 2bt = adz: (bb - zz)$ となる。

系、同様にして、微分式 $adx: (bb + zz)$ は $-adt: 2bt\sqrt{-1}$ という虚の対数微分に変換される。

また逆にこの虚対数微分から元の形へ再び戻すこともできる。

問題 II、 $adz: (bb + zz)$ という微分を、扇形または円弧の微分 $-adt: 2\sqrt{t-bbtt}$ に変換せよ。また逆変換も行え。

$z = \sqrt{1:t-bb}$ とおくと、 $adz: (bb + zz) = -adt: 2\sqrt{t-bbtt}$ になる。逆に、 $t = 1: (zz + bb)$ とおくと、 $-adt: 2\sqrt{t-bbtt} = adz: (bb + zz)$ になる。

問題 III、 $adz:(bb-zz)$ という微分を、双曲線の扇形に対応する微分 $adt:2\sqrt{t+bbtt}$ に変換せよ。また逆変換も行え。

$z=\sqrt{1:t+bb}$ とおく。次に $t=1:(bb-zz)$ とおく。そうすれば、求めるものが得られる。

問題 IV、対数微分 $adt:2bt$ を、双曲線の扇形の微分 $adr:2\sqrt{r+bbr}$ に変換せよ。

$t=(b+\sqrt{1:r+bb}):(b-\sqrt{1:r+bb})$ とおく。そうすれば、求めるものが得られる。

系 1、同様にして、虚の対数微分 $adt:2bt\sqrt{-1}$ を、実の円弧) に対応する微分へ変換することができる。 $t=(b\sqrt{-1}+\sqrt{1:r-bb}):(b\sqrt{-1}-\sqrt{1:r-bb})$ とおけば、 $adr:2\sqrt{r-bbr}$ となるからである。

系 2、(問題 2 により) $\int(adz:(bb+zz))$ は円の求積に依存する。しかも、 $adz:(bb+zz)$
 $=\frac{1}{2}adz:(bb+bz\sqrt{-1})+\frac{1}{2}adz:(bb-bz\sqrt{-1})$ となり、これらはいずれも虚対数の微分である。ゆえに、虚対数は実の円扇形として解釈されるべきである。これらの虚量を互いに加えると、打ち消し合い完全に実数となるからである。

(No.LXXXIX、及び、第 2 巻 No. CXIV を参照)

No. LXXI ヨハン・ベルヌーイ

自らの規則の完成。これはフランス語の著書「無限小解析」第163節において公表されたものであり、分子と分母とがある特定の場（ともに0となる場合）の分数の値を決定するためのもの。

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1704年8月号 P.375

ある方法の有用性は、とりわけ次の場合に最も明白に現れる。他の道によってしか解決できないように思われる諸問題が、それらの方法ではたいいてい不成功に終わり、未解決のまま残されるのに対して、当該の方法が思いがけない助けを与えるときである。このような予期せぬ援助のきわめて明瞭な例を、われわれはこの主題に関して、我らの微分計算において有している。今からおよそ十年ほど前、私はある種の代数曲線の考察に入り込んだのであるが、それらの曲線の縦座標は、ある分数によって表され、その分数の分子と分母とが、ある場合にはともに0に等しくなるにもかかわらず、なおその分数の値自体は何らかの実数として存在する、という性質をもつものであった。しかもその値は、一見しては簡単に決定できるものではなく、分数がより多くの異なる項の複雑な結合から成るほど、いっそう決定が困難となるのである。そこで私は、この事柄を一つの問題として当時、いまやその死去を深く悼むべき高名なるロピタル侯ならびに、とりわけフランスの幾人かの数学者たちに提示した。そして特に次の例、 $y = \left(\sqrt{2a^3x - x^4} - a^3 \sqrt{aax} \right) : \left(a - \sqrt[4]{ax^3} \right)$ について、 $x=a$ としたときの y の値を定めてほしい、と求めたのである。単に代入を行うだけでは、ただ $y=a0:0$ という形しか現れず、そこからは確かに何も結論することができないからである。彼らは、この事柄をより厳密に熟考したうえで、自らが取り組むに値する問題であると十分に判断した。しかし、通常の解析によって種々の方法を試みるうちに、克服しがたい困難が立ちはだかり、しかも、彼らがきわめて精通していた微分計算が、この場合に何らかの助けを与え得るなどということは、夢にも思い至らなかった。この問題全体が純粋に代数的なものである以上、それはまた代数的にのみ解かれるべきものである、と彼らは考えていたからである。しかし、この通常の解析から、目的に何らかの寄与しうと思われるものをすべて用い尽くしたにもかかわらず、しかも自らの解答をさまざまな方法で試みてみると、それらが互いに矛盾していることを見て取った。あるときは $y=a$ 、またあるときは $y=2a$ を求めるべき値として提示するなどして、いずれを採用すべきか確信を持てなかったのである。そこでついに、彼らは自分たちが真の解から大きく隔たっていることを認め、私からその解を喜んで教えられることを望むに至った。

私はこれに対して次のように答えた。もし通常の解析から何らかの解法を求めようとするのであれば、まず与えられた分数を y に等しいものとして、純粋に有理項のみから成る方程式へと還元すべきである。そしてその後、その方程式を（常に可能であるように） $x-a$ で割り、最後に、そこから得られる式において、 x の代わりに a をただ代入すれば y の値が得られるのである。

しかし同時に私は追記した。もっとも、この方法がうまくいくのは、分子・分母に含まれる項の複雑さがそれほど大きくない例においてであり、たとえば次のような場合である。

$y = \left(-xx + a\sqrt{ax} \right) : \left(a - a\sqrt{ax} \right)$ という例では、分母に由来する有理式でない項を除去すれば、 $x^4 - 2ayxx - a^3x - 2aayx - ayyx + aayy = 0$ という方程式が得られる。これをさらに $x-a$ で割ると $x^3 + axx + aax + 2ayx - ayy = 0$ となる。そこで $x=a$ とおけば、 $3a^3 + 2aay - ayy = 0$ が得られ、この方

程式を解けば、求める分数 $(-xx+a\sqrt{ax}):(a-a\sqrt{ax})$ の値は、 $x=a$ の場合において $y=3a$ が得られるのである。しかし、もし例がそのようなものであって、しかも多くの、しかも互いに異なる次数の項を含む場合、たとえば $y=(\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a^3\sqrt{aax}):(a-\sqrt[4]{ax^3})$ のような例では、三つの異なる無理量が含まれている。そのときは、この方法によって成功を期待すべきではない。無理量を除去するための労力があまりにも莫大であり、その結果、この方法はほとんど不可能なものになってしまうからである。

そこで私は、別の方法をすでに用意していると述べた。それは、いかに多くの、どれほど複雑な項の絡み合いがあっても決して無効にされることがなく、最も複雑な例に対しても、最も単純な例に対するのと同じ簡単さをもって適用されるものである。しかし、前に称賛したあの学識のある人々は、この問題が純粹に代数的なものである以上、すでに述べたように、微分計算から何らかの有用性もたらされるとは疑いもしなかったもので、いったいその秘訣がどこに潜んでいるのかを知りたがった。そこで私は、彼らの探究の努力をいっそう促すために、直ちにはそれを明かさず、彼らがより強く求めるに及んで、ついに次の点にその本質が存することを示したのである。与えられた分数の分子と分母とは、共通の軸の上に描かれ、かつその軸上のある一点において互いに交わる二つの曲線の縦座標を表すものとみなすことができる、ということである。しかもその点とは、横座標の原点から距離 a だけ離れた点、 x の代わりに a を代入すると分数の各項が0になる点である。したがって、その点において両曲線の縦座標はともに消滅し、それらはそれぞれの微分へと退化することになる。ゆえに、分子および分母の代わりにそれらの微分を代入すべきであり、そうすれば、特異の場合 $x=a$ において、もとの分数と同一の値をもつ新たな分数が得られるのである。したがって、この新しい分数は、 x の代わりに a を代入するだけで、他のいかなる操作をも要することなく、直ちに求める値を与えることになる。そして実際、上の例 $y=(\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a^3\sqrt{aax}):(a-\sqrt[4]{ax^3})$ においては、きわめて簡単に $y=\frac{16}{9}a$ が得られるのである。

この予期せぬ簡単さに打たれた高名なるロピタルは、この規則を、私の他の諸成果とともに、のちに「無限小解析」の中に収めた。これを引用したパリの「エフェメリデス」(1702年8月3日)において、極めて博識なソーラン(SAURINUS)は、それが誰によって発見されたかを知らぬまま、この規則を本来以上に一般的なものとして高く評価している。しかし、真理への愛ゆえに、この規則にある種の欠陥が存在することを隠してはならない。しかもその欠陥は、彼らのいずれも気づかなかったものである。ゆえに私は、これを明らかにして除去し、かくして自らの規則を完成の極致へと導くことにしよう。次の点に注意すべきである。与えられた分数の各項を微分して得られる新しい分数が、なお同じ困難に悩まされる場合がありうる、ということである。特異の場合 $x=a$ において、その新たな項もまた0になるような項を再び含むことがあるのである。このことは、各項の微分そのものが、その場合において他の量に比して無限小となるとき、必然的に生じる。言い換えれば、同一の軸上に描かれたこれらの曲線が、その交点において軸となす角が斜角ではなく、直角あるいは零角(接するか平行になる)となるときに、まさにその事態が起こるのである。例として、次の分数を考える。

$(a^3\sqrt{(4a^3+4x^3)}-ax-aa):(\sqrt{(2aa-2xx)}-x-a)$ ここで $x=a$ のときのその値が求められるべきものである。さて、規則の指示に従ってこの分数の各項を微分すれば、新たな分子として $axxdx\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{(a^6+2a^3x^3+x^6)}-adx$ 、また新たな分母として $xdx\sqrt{2}:\sqrt{(aa+xx)}-dx$ ができる。

ところが、与えられた場合 $x=a$ においては、前者は $adx - adx \cdot 0adx$ となり、後者は $dx - dx \cdot 0dx$ となる。したがって、この新しい分数もまた $0adx : 0dx \cdot 0a : 0$ へと退化する。これは何ら確定した値をもたないのであり、かくしてこの規則によつては、ここまでのところ何の進展も得られないのである。

この不都合に対して救済策を与えるためには、共通の軸の上に描かれた二つの新たな曲線を考察すべきである。それらの縦座標は、先の曲線の微分量がもつのと同一の比を有するものとする。そして、もしこれらの曲線が再びその共通の交点において、軸となす角が直角または 0 角（接する）であるならば、さらに別の二曲線を改めて考察しなければならないが、その縦座標は直前の曲線の微分量と同一の比をもつものとされるべきである。この操作は、交点において軸を斜めに切る二曲線に到達するまで、何度でも繰り返されねばならない。与えられた分数の値が 0 または無限大である場合を除けば、最終的には必ずそのような二曲線に到達するからである。もっともその例外の場合には、一方の曲線のみが軸を斜めに横切り、他方は軸に接するか、あるいは法線的にこれを横切ることになる。

以上のことが理解されれば、次の点は簡単に明らかである。与えられた分数の各項を一度微分したのちに、なお x の代わりに a を代入すると 0 になるような項が現れる場合には、それらの項をさらに再び微分すべきであり、またそこから新たに生じる項も、もし $x=a$ の場合に再度消滅するならば、同様に微分されるべきである。そしてこの操作は、ついにその場合において消滅しない項から成る分数が得られるに至るまで、このように引き続き繰り返されるべきである。

この手続きの理由は明白である。最初の二つの曲線における縦座標の微分量は、交点において軸に関して、他の縦座標の微分量と互いに比較可能でありうるからである。この場合には、先の例

$y = \left(\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax} \right) : \left(a - \sqrt[4]{ax^3} \right)$ のように、ただ一度の微分で十分である。あるいはまた、それらの微分量が、他の微分量に比して単純に無限小または無限大となりうる場合もある。この場合には、第二の微分を行うべきであり、たとえば次の別の例

$y = \left(a\sqrt[3]{4a^3 + 4x^3} - ax - aa \right) : \left(\sqrt{2aa - 2xx} - x - a \right)$ のような場合がこれに当たる。もし第一回の微分から生じた項 $axxdx\sqrt[3]{4} : \left(\sqrt[3]{a^6 + 2a^3x^3 + x^6} - adx \right), xdx\sqrt{2} : \sqrt{aa + xx} - dx$ 、両辺を dx で割れば、 $axx\sqrt[3]{4} : \left(\sqrt[3]{a^6 + 2a^3x^3 + x^6} - a \right), x\sqrt{2} : \sqrt{aa + xx} - 1$ 。さらに再び微分すれば、

$2a^4xdx\sqrt[3]{4} : (aa + xx)^{\frac{5}{3}}, aadx\sqrt{2} : (aa + xx)^{\frac{3}{2}}$ が得られる。これらを分数の形にまとめ、かつ $x=a$ を代入すると、提案された分数 $\left(a\sqrt[3]{4a^3 + 4x^3} - ax - aa \right) : \left(\sqrt{2aa - 2xx} - x - a \right)$ の求める値として $2a$ が得られる。また、それらの微分が他の微分に比して無限に小さい（あるいは無限に大きい）場合もありうるが、その場合には第三回の微分を施さねばならない。そして無限小（または無限大）の次数に応じて、必要とされる微分回数はさらに増大する。この目的のための例は簡単に多数挙げられるが、ここに列挙することは不必要に長く、ただ無駄にややこしくなるだけである。

さらに言えば、上において私は、提案された分数の諸項が（ $x=a$ の場合に）他の項に比して微分量を無限に大きく含むとき、その微分によって新たな項が生じ、しかもその場合それらが再び 0 になると述べたが、これは次の意味に理解されたい。それらの項が 0 に帰するのは、あくまでも複雑な式の簡素化が完了した後においてである。さもなければ、実際には新しく生じた項は（注意深く見れば簡単に分かるように）むしろ無限大となり、分子は $m:0$ 、分母は $n:0$ という両者とも明らかに無限大となる。し

かし、式を簡素化することによって $\frac{m:0}{n:0} = \frac{0m}{0n}$ の形となり、これらの項は、今や無限大から消滅する（無限小となる）項へと変わるのである。

No. LXXII 解くべき問題

代数曲線（通常は幾何曲線と呼ばれる）が与えられているとき、それを、同様に幾何的ではあるが種類の異なる無数の他の曲線へと変換せよ。しかもそれらの各々が、与えられた曲線と同じ長さであること。

学術誌 Journal des Sçavans
1703 年、2 月 12 日号 P.112
パリ版 P.182、オランダ版

この問題は、グローニンゲンの教授ベルヌーイ氏に、ある数学者によって提出されたものである。そして彼（ベルヌーイ）は、これを改めて幾何学者たちに提示し、本年の残りの期間、1704 年の初めまでを、その解決の期限として与える。

No. LXXIII 問題の解答

ヨハン・ベルヌーイ氏によって、1703 年 2 月のフランスの雑誌に提起された問題に対する解答。
これを G. チェイン（Cheyne）がジョン・クレイグ（Joh. CRAIG）に伝達した。

問題

与えられた幾何学的曲線と長さの等しい、他の無数の曲線を幾何学的に求めること。

解答

与えられた曲線の座標を v, s とし、求める曲線の座標を x, y とする。問題の条件より $dv^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$ が成り立つ。

$dx = dv - mdz$ とおく。すると $dy = \sqrt{(ds^2 + 2mdvdz - m^2z^2)}$

となる。この式において、 ds の代わりに、 v, dv および既知量

によって表されたその値を代入する。また dz には、 v, dv および定数から構成された値を仮定し、 dx, dy の値が可積分となるようにする。このようにして、求める曲線の座標 x, y が得られる。（証明終わり）

例題 I、 放物線の弧に等しい曲線を求めること。

放物線の焦点と放物線の横との長さを $2a$ とする。 $2as = v^2$ であり、 $ds^2 = a^{-2}v^2 dv^2$ となる。ゆえに $dy = \sqrt{(a^{-2}v^2 dv^2 + 2mdvdz - m^2 dz^2)}$ が可積分となるように、 $mdz = a^{-2}v^2 dv$ と仮定する。すると $dx = dv - a^{-2}v^2 dv, dy = dv\sqrt{(3a^{-2}v^2 - a^{-4}v^4)}$ 。これらの積分は、すでに知られた方法によって求められ、 $x = v - v^3, y = \frac{v^2 - 3a^2}{3a^2}\sqrt{(3a^2 - v^2)}$ が得られる。

例第 II、 円弧と等長な曲線を求めること。

円の半径を a とする。円の関係より $s = \sqrt{(a^2 - v^2)}$ とおく。ゆえに $ds^2 = v^2 dv^2 : (a^2 - v^2)$ となる。したがって、求める曲線の微分量は $dy = \sqrt{(v^2 dv^2 : (a^2 - v^2) + 2mdvdz - mdz^2)}$ である。可積分となるように $mdz = 4v^2 dv : a^2$ と仮定すると、 $dx = dv - 4v^2 dv : a^2, dy = (-3a^2 v + 4v^3) dv : a^2 \sqrt{(a^2 - v^2)}$ とな

Philosophical Transactions
第 289 号（1704 年 1 月 2 月号）、
第 2 論文、P.1527

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1705 年 4 月号 P.190

る。これらの積分は、通常の方法によって求められ、 $x = v - 4v^3 : 3a^2$, $y = \frac{a^2 - 4v^2}{3a^2} \sqrt{(a^2 - v^2)}$ となる。

例題 III、楕円の弧に等しい長さをもつ曲線を求めること。

縦の長さを $2r$ 、横軸を $2a$ とする。楕円の関係により $s = \frac{r}{a} \sqrt{(a^2 - v^2)}$ とおく。ゆえに $ds^2 = r^2 v^2 dv^2 : (a^4 - a^2 v^2)$ となり、曲線の微分量は $dy = \sqrt{(r^2 v^2 dv^2 : (a^4 - a^2 v^2) + 2mdvdz - mdz^2)}$ である。これが可積分となるように、 $mdz = (2a + 2r)v^2 dv : a^3$ と仮定すると $dx = dv - (2a + 2r)v^2 dv : a^3$, $dy = dv \sqrt{(r^2 v^2 : (a^4 - a^2 v^2) + (4a + 4r)v^2 : a^3 + (2a + 2r)^2 v^4 : a^6)}$ になる。これらの積分は、通常の方法によって求められ、 $x = v - (2a + 2r)v^3 : 3a^3$, $y = \frac{2a^3 - ra^2 - 2av^2 - 2rv^2}{3a^3} \sqrt{(a^2 - v^2)}$ となる。

例題 IV、三次放物線に等しい長さをもつ曲線を求めること。

その方程式を $3a^2 s = v^3$ とする。これより $ds^2 = v^4 dv^2 : a^2$ が得られ、求める曲線の微分量は $dy = \sqrt{(a^4 v^4 dv^2 + 2mdvdz - m^2 dz^2)}$ となる。これが可積分となるように $mdz = v^2 dv : 2a^2$ と仮定すると、 $dx = dv - v^2 dv : 2a^2$, $dy = \frac{v dv}{2a^2} \sqrt{(3v^2 + 4a^2)}$ になる。これらの積分は、通常の方法によって求められ、 $x = v - v^3 : 6a^2$, $y = \left(\frac{vv}{6aa} + \frac{2}{9} \right) \sqrt{(3vv + 4aa)}$ となる。

量 mdz に対して他の無数の適切な値を仮定すれば、与えられた曲線に等しい長さをもつ曲線を無限に見いだすことができるであろう。しかるに、この問題がある種のディオファントス的问题と親近性を有することを簡単に理解されるであろう。ディオファントス的问题とは、二つの平方の和を、その辺が有理数であるような別の二つの平方に分割することであり、これに対してベルヌーイの問題とは、二つの平方の和を、その辺が可積分であるような別の二つの平方に分割することにほかならない。ディオファントスの問題の解法がただ通常の数式学だけに依存するのと同様に、ベルヌーイの問題の解法はただ通常の微分法の逆方法（積分法）のみを必要とする。両者の技巧は、求めるべき辺を適切に仮定することに依存している。ディオファントスの場合にはそれらが有理的であることを仮定し、ベルヌーイの場合にはそれらが可積分であることを仮定するのである。

NO. LXXIV

ヨハン・ベルヌーイの曲線に沿った運動

この方法には、複数の曲線をすべて一つの等しい曲線へと集約すること、あるいは互いに差し引くことに関して顕著な有用性がある。さらにここから、1702年2月12日付のパリのフランス学術誌 (Diario Gallico) に提起された「曲線の変換に関する問題」の真正の解法が導き出されるのである。

私が、ある代数曲線とその長さにおいて等しい無数の他の代数曲線へと変換するという問題を解いてから、すでに4年目になる。この問題は、ベルギーのある卓越した数学者によって私に提示されたものであった。その後、これが曲線の測定および比較に対して顕著な有用性があることを見て、私は

1703年2月にフランス学術誌 (Diario Gallico) において公に提起し、ちょうどその時に始まったばかり

ライプツィヒ学術誌
Acta Eruditorum の
1705年8月号 P.347

りの1年の全期間を通じて、その解答が一つでも二つでも現れるならば、深奥な幾何学が軽視できない進展になるだろうという期待があった。しかし、あらかじめ定めた期限にはいかなる解答も現れなかったのであるが、期限を既に越えて、1年半が経過したにもかかわらず、私はなお自らの解答を公にしていなかった。これについては、率直に言って、私の怠慢によるものか、あるいは失念によるものか、しかもその状態はさらに長く続いたであろう。もし、きわめて著名なるヨハン・クレイグ (Joh. Craig) の最新の解答が、1704年ロンドン「哲学紀要 (Philosophical Transactions)」第289号にまず公表され、続いて同年四月の「Acta Eruditorum」最新号に転載されたのを私が目にして、これをきっかけにその怠慢を振り払うことがなかったならば、おそらくさらに長く続いたであろう。

この解答について私がいかなる見解を抱いているかは、私自身の解答を提示するに先立って、まず簡潔に明らかにしておくのが私の務めである。そして、これを行うことを私は躊躇しないであろう。私がある友人に私見を私的に書き送ったところ、それを理解したかの最も高名なる著者ニュートンが、全面的に私の見解に賛同していることを、私は確信しているからである。ゆえに、私が彼の解答において不足している点と考える点を、友好的かつ率直に提示したとしても、きわめて鋭敏なるクレイグ (Craig) がこれを不快に受け取ることはないであろうと期待する。その解法は簡潔なものであるから、ここにその全文をそのまま転記しておく。与えられた曲線の座標を v, s とし、求める曲線の座標を x, y とする。問題の条件より $dv^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$ が成り立つ。ここで $dx = dv - m dv$ とおけば、 $dy = \sqrt{(ds^2 + 2mdvdz - m^2 dz^2)}$ となる。この式において、 ds の代わりには、それを v, dv および既知量によって表した値を代入し、また dz には、 v, dv および既知量から成る適当な値を仮定して、微分量 dx, dy の値が可積分となるようにする。そして、求める曲線の座標 x, y が得られる。(証明終わり)

これ以上に簡潔に処理することはおよそ不可能であったであろうという点は、私は否定しない。しかし、その過度の簡潔さそれ自体がかえって疑わしいのである。実際のところ、少しでも注意して読む者であれば、直ちに次のことが何の根拠もなく仮定されているのを見抜くだろう。「 dz には、 v, dv および既知量から成るそのような値を仮定し、微分量 dx, dy の値が可積分となるようする」と。この仮定は、問題そのものに劣らず困難に見える。これをむしろ一層困難であると言ったとしても、あながち真理から外れていない。それは暗黙のうちに、問題に対して必要以上のある条件を付け加えているからである。曲線が全体として全体に等しいだけでなく、部分もまた部分に等しくされるべきである、という条件である。しかし、この後者の条件は、問題においては要求されていない。与えられた曲線に等しい曲線を提示するだけで十分なのであって、両者において対応する部分が等しいと定められる必要がないからである。さて、その高名なる学者が挙げている諸例については、それらが正しく解かれているかどうかを検討する暇はなかったのであるが、それらは問題の一般的解法を証明するものとは、決して言えない。それはちょうど、ある者が自ら解いたいくつかの2次方程式や3次方程式の例をもって、任意の次数の方程式を解く一般的方法を示したと主張しようとするのと同様である。

きわめて博学なるクレイグ自身も、ある意味自らの解法の不完全さを認めているように見受けられる。結びの部分において、彼は、二つの平方の和を他の二つの平方に分割し、その辺が有理数となるように求めるディオファントス型の問題が、我々の問題と深い関係を有することを示しているが、彼はこれを必然的に、二つの平方の和を、辺が可積分であるような他の二つの平方に分割する問題と同一視すべきものと考えたのである。そして彼は、きわめて適切にも、我々の問題の解法はただ微分法の逆方法のみを要し、求める辺を適切に仮定する技巧、それらが可積分となるように取ることに依存すると言っている。このことによって彼が我々に十分示唆しているのは、ちょうどその微分法の逆方法自体がいま

だ完全に完成されておらず、この点に関してなお幾何学者たちによって莫大な改良が求められているのと同様に、その方法を必要とする彼の解法もまた、完全なものと呼ぶことはできない、ということである。さらにまた、彼自身がそう呼んでいるところの「辺を適切に仮定して可積分となるようにする技巧」というものは、疑いもなく極めて困難な秘術なのである。ゆえに、その点は一般解において仮定されるべきものではなく、むしろ証明されるべきものであった。そしてそれが果たされ、私をその結論へと導いた別の新しい発見とともに、私の解法を公表することをいささかも躊躇しない。

しかし、この箇所においては、我々がその功をわが高名なるライプニッツ氏に負っていることを隠してはならない。彼はより好ましい見通しのもとにこの問題に取り組んだからである。彼は、昨年の初め頃に、ある種の解法の試みを私に書き送ってきたが、それは決して不正確なものではなかった。むしろ、それに欠けていたのはただ一つ、計算の労苦、しかもそれは簡単には克服しがたい複雑さへと導くように見えたのである。ただを取り除く方法を示すことだけであった。さて、このきわめて洞察力ある学者が採用した方法は、一本の筆が共通の絡み合った糸を張りつつ、それを用いて第三のある曲線を描くことによって、二つの曲線を同時に展開させることに依存する。そして、その第三の曲線が代数的曲線であり、かつ進展させられる曲線の一方もまた代数的であるならば、他方も必然的に代数的曲線となる。これら共進展曲線の差それ自体も、常に直線によって代数的に決定可能なものとして与えられるからである。このことから、かの高名なるライプニッツは、共進展二曲線は長さにおいて等しくなり得る、その差が消滅することを予見した。したがって、与えられた代数曲線に対して、それに等しい別の代数曲線を見出すためには、任意にある代数曲線を（ただし種別を特定し、かつ適切に配置して）仮定しさえすればよく、その曲線が鏡の役割を果たすようにすればよいのである。与えられた曲線の接線を入射光線のように等角に反射し、それらの交点によって、いわば集中する曲線のようにして新たな代数曲線を形成するような曲線である。かくしてこの曲線は、与えられた曲線とともに、先に仮定された任意の曲線に対して、糸によって描かれるべき二つの共進展曲線を成すことになる。そして、計算において問題となっているのは、ただ特別な場合、共進展曲線間の差が0となる場合に限られるから、彼は任意に仮定した曲線について、その種類であれ、パラメータであれ、位置であれ、あるいはその他の何であれ、適切な仕方を選定すべきであると言っている。その結果、前提条件のもとでその差が消滅し、したがって与えられた進展曲線に対して、それと等しいもう一つの曲線が見出されることになる。

この点について、私はこれ以上詳しい説明を加えないことにする。この事柄は、その地位にふさわしく、当の高名なる学者自身によってこそ最も適切に論じられるべきものだからである。ゆえに、共同の学問の利益と発展のために、これまでただ軽く大まかな概要だけにとどまっている自らの方法を完成させ、そして、あの任意の曲線、鏡の役割を担うべき曲線が、煩雑で骨の折れる計算を用いることなく、いかにして具体的に決定され、あるいは配置され得るのか、また共進展曲線の差が所与の値に等しくなるか、あるいは0となるようにするための簡便な道を、われわれに示してくださるよう、謹んでお願いするものである。

これから私の新しい発見を提示するにあたり、幾何学者の慣例に従って、まずいくつかの定義および公準から示す。

定義 I

極端法線とは、ある曲線の両端の各端点において、それぞれ垂直に引かれた直線をいう。したがって、BN および AN は、曲線 ACB の極端法線である。

定義 I I

同一の側に向かって凹なる曲線の振幅とは、その両端点において引かれる法線が構成する角である。したがって、角 BNA は曲線 ACB の振幅にほかならない。

定義 I I I

曲線を等しく広い部分、等しい振幅をもつ部分に分割するとは、各部分の両端における法線が互いに等しい角を構成するように、それを分割することである。

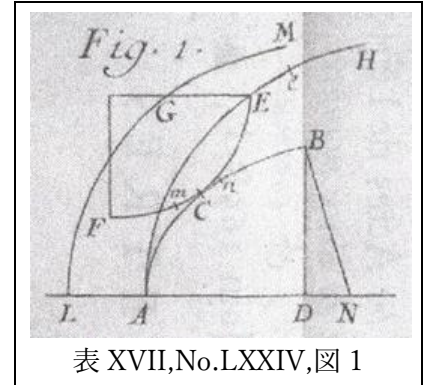


表 XVII, No. LXXIV, 図 1

定義 I V

一つの曲線が他の曲線の上を這うとは、可動の曲線が不動の曲線の上を平行運動によって移動し、その間つねに一方が他方に連続して接し、しかも互いの凸部が相對している場合である。なお、可動の曲線をペレプタンス、不動の曲線をペレプタンダと呼ぶものとする。

定義 V

曲線が他の曲線の下を這うとは、同様の運動がなされるが、ただこの点のみが異なり、今度は這い進む曲線が、その凸性によって、這い進むあいだ連続して、這われる曲線の凹部に接し続ける場合である。

これら二つの運動をより明瞭に理解するために、ある意味で船が横にずれて流されることにたとえることができる。例えば船が風の力によって北から南へ運ばれているあいだ、同時にまた、ある隠れた水流の運動によって別の方向へと引き流されるような場合である。このように考えれば、船の両側のそれぞれにおいて船が絶えず接している二つの曲線を想定することができ、その結果、一方の曲線は船によって「上を這われ」、他方は「下を這われる」ことになる。

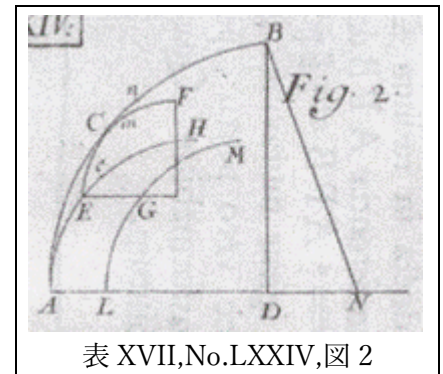


表 XVII, No. LXXIV, 図 2

それゆえ（図 1, 図 2）、曲線 ACB を不動「這われる曲線」とし、また別の曲線 ECF を可動「這う曲線」と仮定しよう。まず最初に、その頂点 E を頂点 A に一致させ、かつ軸 EG を軸 AD に、あるいはそれと一直線上に置く。次いで曲線 ECF を、曲線 ACB に沿って平行運動によって移動させる。軸 EG と軸 AD とも常に平行に保たれるように動かすのである。このとき、（図 1）には「上を這う運動」が、（図 2）には「下を這う運動」が得られる。

定義 V I

這い進む曲線 ECF の平面内に位置する任意の点によって描かれる曲線である。例えば、頂点 E によって描かれる曲線 AEH、あるいは軸上の点 G によって描かれる曲線 LGM である。私は、この運動によって描かれる曲線をレプトリア曲線と呼ぶ。

定義 V I I

這われる曲線および這い進む曲線、つまり ACB と ECF のうち、それぞれの部分 AC と EC については、すでにその役割を果たし、前者は這われることによって、後者は這い進むことを受けることによってその機能を終えたので、これらを同一の這行運動によってその役目を終えた部分と呼ぶことにする。

公準 I

与えられた代数曲線に対しては、その接線および法線もまた代数的に与えられるものと仮定する。

公準 I I

与えられた代数曲線は、任意の等しい振幅をもつ部分へと代数的に分割できると仮定する。

補助定理 I

這われる曲線および這い進む曲線がともに代数的であるならば、そこから生成されるレプトリア曲線もまた代数的である。

これは公準 I・公準 II から明らかである。同一の這行において役目を終えた部分、弧 AC と EC とは等しい振幅を有することが確定している。ゆえに、弧 AC を任意に取れば、それと同じ高さ（振幅）をもつ弧 EC を代数的に決定することができる。したがって、レプトリア曲線 AE 上の点 E もまた定まる。

補助定理 I I

すべてのレプトリア曲線、あるいは同一の這行運動によって描かれたいかなるそれらの部分も、互いに等しくかつ相似である。

これは運動の平行性から明らかである。這い進む曲線 ECF の平面内に、軌跡を描く任意の二点 E および G を取る。これらを直線 EG によって結べば、這行運動によってこの直線は各瞬間ごとに微小な距離だけ、しかも以前の位置に平行な位置へと移されることは明白である。その結果、この直線の両端はそれぞれ平行かつ等しい微小線分を描くことになる。これらは曲線 AEH および LGM の要素（微小部分）であるから、命題は成立する。

系 I、すべてのレプトリア曲線、あるいは同一の這行運動によって描かれたそれらの任意の部分の両端に引かれる接線は、互いにすべて平行であり、かつまた、同一の這行において対応して役目を終えた曲線または部分の接触点を通る共通接線とも平行である。

系 II、レプトリア曲線は、同一の這行において役目を終えた這われる曲線および這い進む曲線の部分と、常に同一の振幅を有する。ここからすでに、きわめて有用ではあるが簡単なさまざまな系が導かれる。

定理 I

すべてのレプトリア曲線、あるいはその任意の部分は、その長さにおいて、同一の這行運動で役目を終えた這われる曲線と這い進む曲線の部分の和、または差に等しい。運動が上を這う運動によって行われる場合には和に等しく、下を這う運動によって行われる場合には差に等しい。

証明、這い進む曲線 ECF がごく近接した次の位置へ進むものと想定し、その頂点 E が点 e に到達すると同時に、可動曲線上の点 m が固定曲線上の点 n に対応して移るものとする。このとき明らかに、微小線分 Ee は、系 I により微小線分 Cn および Cm に平行であり、図 1 においてはそれらの和 $Cn + Cm$ に等しく、図 2 においてはそれらの差

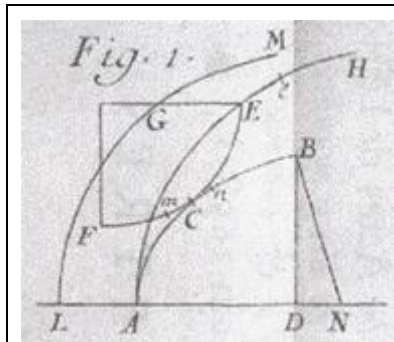


表 XVII, No. LXXIV, 図 1

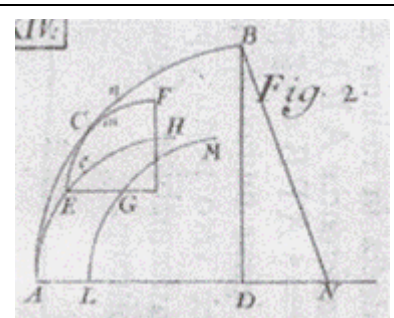


表 XVII, No. LXXIV, 図 2

$C_n - C_m$ に等しい。運動の平行性によって、点 E の進行 E_e は、点 n と m との距離に等しくなるからである。そしてこの距離は、微小部分 C_n と C_m が同一直線上にあると見なされるとき、図 1 ではその和に、図 2 ではその差にほかならない。しかし、 E_e 、 C_n 、 C_m はそれぞれ曲線 AE、AC、EC の微小要素である。ゆえに、これらの要素を総合して取れば、レプトリア曲線 AE は、図 1 では這われる曲線と這い進む曲線の和 $AC + EC$ に等しく、図 2 ではそれらの差 $AC - EC$ に等しい。(証明終わり)

補足説明

ここで読者諸賢は、あの卓越した二人の学者、最も偉大なるライプニッツと、生前きわめて鋭敏であったホイヘンスが成し遂げた功績を思い起こすだろう。前者は展開の運動を、後者は牽引の運動を導入し、これらはいずれも曲線の研究にとって顕著な有用性をもたらしたのであった。しかし今や、公平な判断において問うが、われらの「這行運動」もまた、これら二つに加えられるべきではないだろうか。その簡単さと単純さの点から見ても、また有用性の点から見ても、これがあらゆる面において驚くほど優れていることを見出すであろう。そもそも、自らに常に平行であるような運動ほど、より簡単で単純なものがあるだろうか。また実用にいっそう適した運動がほかにあるだろうか。さらに、その有用性の大きさは、まもなく与えられる難問の解決の助けになるほか、曲線に関するより難解で、これまでほとんど絶望視されてきた事項の認識および構成へと我々を導くきっかけになることも明らかである。これらのうち、ここでは一つないし二つだけを指摘しておこう。まず第一に、二つまたはそれ以上の代数曲線が与えられているとき、それらの面積の和または差に等しい面積をもつ別の新たな代数曲線を、いかに簡単に見出し得るかは、誰の目にも直ちに明らかである。共通の横軸に対して、与えられた各曲線の縦座標の和または差に等しい新たな縦座標を立てさえすればよいのである。しかし、面積ではなく、与えられた代数曲線の弧長を別の新たな代数曲線に合成すること、与えられた諸曲線の弧長の和または差に等しい長さをもつ代数曲線を発見することは、これはこれまで誰によっても成し遂げられたとは、驚くべき簡潔さをもってこの事柄を解決する我々の方法に期待されているように思われる。まず与えられた曲線のうち二つを取り、その一方にオブレプティオ（滑走運動）を行わせれば、他方はその二曲線に等しい長さをもつレプトリア曲線となる。さらに、これに同様の方法で第三の与えられた曲線を加え、再びオブレプティオ（滑走運動）の操作を行えば、これら三曲線の長さに等しい別の新たなレプトリア曲線ができる。同様の仕方で第四、次いで第五、さらにそれ以上を順次加えてゆけば、ついには、与えられたすべての曲線に同時に等しい一本の曲線が得られる。しかも、補題 I によれば、与えられた曲線が代数曲線であるならば、この曲線もまた代数的なものとなる。また、もし曲線の差を行う必要が発生した場合には、そのときはオブレプティオ（滑走運動）の代わりにスブレプティオ（逆滑走）を用いるべきであることは、あえて注意するまでもない。

以上のことが成り立つ以上、今後はもはや、単に互いに異なる曲線のみならず、種類の異なる曲線であっても、それらを一つの曲線〔それらが代数的である場合には、ここでは代数曲線を意味する〕に集約し、あるいは相互に減じ、または一部を減じ一部を加えることになんら問題はない。さらに、その和であれ差であれ、あるいは部分的に差を取り部分的に和を取ったものであれ、それらに等しい一本の曲線を構成することが可能となる。例えば、任意の数の互いに異なる楕円を一つに合成することのみならず（これは従来きわめて困難であった）、楕円と双曲線および放物線とをも、我々の方法によって簡単に一つへと結合できる。与えられた三つの円錐曲線の長さにただ一つで等しい代数曲線を、多大な労力なしに提示できるのである。以上より、次の抽象的定理が導かれる。

定理 I I

任意の本数および任意の形状をもつ曲線 ADL, ACM, ABN を考え、さらに別の曲線 APR をとる。その曲線 APR において、その横座標 AO は、それぞれ曲線 AB, AC, AD に対応する部分に応じた横座標 AE, AF, AG の和 $AE+AF+AG$ に等しく、またその縦座標 OP は、対応する縦座標 EB, FC, GD の総和に等しいものとする。このとき、曲線 AP の長さは、曲線 AB+AC+AD の全長に等しい。もし AO がある幾つかの横座標のみの和であって、他の横座標を引いたものであり、かつ同様に OP が対応する縦座標の和であって、他の縦座標を引いたものであるとするならば、そのときにもまた曲線 AP は、ある曲線群の総和から他の曲線を引いたものに等しい長さをもつことになる。例えば、 $AO=AG+AF-AE$ 、かつ $OP=GD+FC-EB$ とすれば、曲線 AP は $AD+AC-AB$ に等しくなる。最後に、いずれの場合においても、曲線 AP は、曲線 AB, AC, AD がもつると同一の振幅のある曲線となる。

証明、この証明は、前掲の定理から簡単に導かれる。むしろ、微分計算を直接に用いることによって直ちに求めることができる。ゆえに、それらの詳細は省略し、われわれのいわゆる這行運動へと立ち戻ることにする。この運動は、もう一つ注目し値する結果を我々にもたらす。それは、曲線の長さの測定を円弧によって行うという発見であり、私はこれをすでに 1695 年 8 月の本誌 (Acta) (No. XXVI を参照) において公に示し、同年 11 月には高名なる二人の学者、ライプニッツおよびチルンハウス

(No. XXVIII, No. XXIX を参照) によって大いに賞賛されたものである。そのとき私は、ある一本の糸の展開によって描かれる二つの曲線が、その展開する糸上の任意の二点を用いて記述されるならば、それらの曲線の長さの和または差は、ある円弧に等しくなることを示した。ゆえに今ここで示したいのは、当時特別の証明によって裏づけたこの定理が、実のところ、現在扱っているこの這行曲線に関する一般理論の、きわめて特殊な場合にすぎない、ということである。

いま、這行されるべき曲線を任意に ACB とし、他方、這行する曲線 ECG を円とする。また、這行曲線 LOM を描く点を、その円の中心 O にとるものとする。このとき直ちに明らかなのは、この場合の這行曲線 LOM は、曲線 ACB 自身が記述されるのと同じ展開によって記述される曲線にほかならない、ということである。点 O と C とは常に一定の間隔を保ち、しかもそれぞれ曲線 LOM および ACB に対して垂直な位置に存するので、これら両曲線を互いに等距離の曲線とする。したがって、両点は共通の展開糸上に必然的に位置すると簡単に理解されるからである。ゆえに、我々は次のことを得る。曲線 LO は、重畳的這行によって和に等しく、また減畳的這行によっては、曲線 AC と円弧 EC との差に等しい。したがってまた、この円弧 EC 自体も、いずれのやり方によっても、曲線 LO と AC の差に等しいことになる。さらに、もし這行する円 ECG が、這行される曲線 ACB よりも小さい凸性をもつ場合、言い換えれば、円 ECG の曲率が曲線 ACB の曲率を内に包含する場合、C における接触円の半径よりも、当該円の半径が大きいときには、AC と EC の差は、より大なるものとしての円弧 EC の側に属することになる。この結果、すでに互いに凹部を向かい合わせる位置にある曲線 AC と LO の和は、円弧 EC に等しくなる。しかし、這行されるものを包含

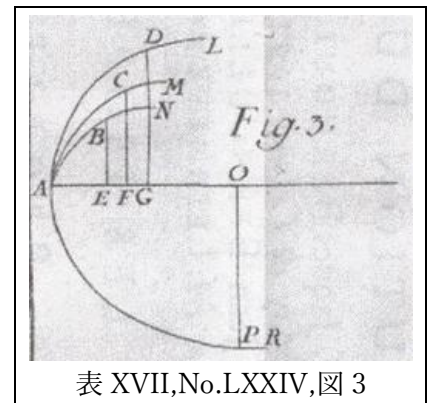


表 XVII, No. LXXIV, 図 3

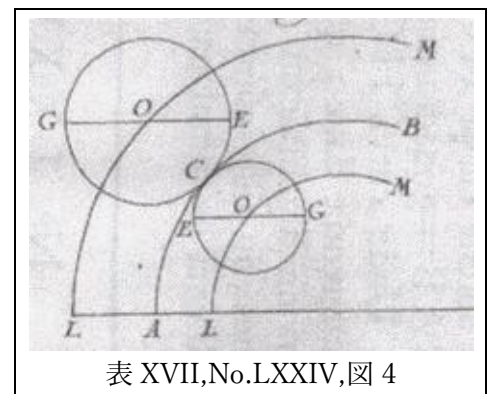


表 XVII, No. LXXIV, 図 4

するような形で這行するものが配置される場合には、減畳的這行の運動はあまり自然でなく、かつ実行もしにくい。そこで、これらはその役割を交換することができる。今度は円を這行される側とし、先の曲線のほうが這行する側の機能を担うようにすればよい。一般に、這行する曲線を這行される曲線へ、またその逆に転換しても、描かれる這行曲線には、その位置を除いては変化を生じないからである。

このようにして我々は、先に引用した Acta の定理の真理を、この新たに見出された這行運動の理論からの系として導出した。さらにここで注意すべきは、展開によって描かれる曲線が、実は這行曲線の一種にほかならないという根拠である。その理由は、円 ECG はその各部分が互いに相似であるゆえに、回転運動によってであれ、あるいは這行運動によってであれ、曲線 AC の上を進むとき、その中心 A によって同一の曲線 LOM を、いずれのやり方でも記述するのである。しかし、回転による場合には、周知のごとくその曲線は展開によって描かれたものとなる。ゆえに、私が示そうとしたこと、展開によって記述される曲線は這行曲線の一種にほかならないことが確証される。

これ以上読者を長く引き留めないために、私はいよいよ「フランス日誌」に提示された曲線の変換に関する問題の、真の解法へ進むことにする。この問題については、ただ偉大なライブニッツだけは別として（彼はこの課題にかなり適切に取り組んではいたが）、今日に至るまで、いまだ誰によっても完全に解明されたことがない。しかも驚くべきことに、万事が自分には簡単であり、多くの事柄を自分だけが見通していると思ひ込み、他人を挑発しながらも節度や分別を欠いていた人々でさえ、この問題を解決するには至っていない。もっとも、なぜ彼らの鋭さがこの点では鈍ってしまったのか、その原因をここで詮索するつもりはない。

問題

与えられた代数曲線を、それと長さが等しい他の無数の代数曲線へと変換すること。ただし、それらの曲線は与えられた曲線とは、全体としても部分としても互いに異なっているものとする。

解法 I、潜行（すべり込み）運動による解法。

与えられた代数曲線 ACB があるとする。これは仮定 II により、振幅（弧長）に関していくつかの等しい部分、たとえば AP と PB の二つに分けられているものとする。そのうちの一つ、たとえば AP を、点 P における接線を軸として回転させ、曲線の凸向きが反対になるようにして、 aP という位置を取らせる。この位置において、 aP を曲線の残りの部分 PCB の上に沿って滑らせる（這行させる）。この滑り運動のあいだ、つねにその姿勢を保ち、かつ $\alpha C\pi$ が最初の aP に常に平行となるようにして進ませるのである。ここから描かれる這行曲線 $P\pi Q$ は、曲線 $\alpha C\pi$ の平面内に任意に取った一点、たとえば π を通るものとして、求める曲線の一つとなる。定理 I より $P\pi Q = \alpha C\pi + PCB$ であり、しかも $\alpha C\pi = aP = AP$ だから、

$P\pi Q = AP + PB = APB$ となるからである。さらに補題 I によって、曲線 $P\pi Q$ は代数曲線である。したがって、与えられた代数曲線と長さが等しい別の代数曲線がここに得られたことになる。しかも同じ方法を用いれば、その曲線に等しい第 2 の曲線、第 3、第 4 という具合に、この操作をいくらでも続けていくことができる。しかもこれらの曲線はすべて互いに異なる形をしている。這行曲線の端の部分

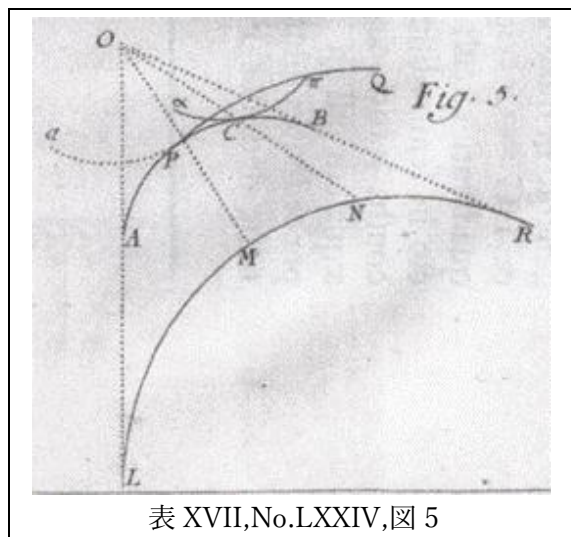


表 XVII, No. LXXIV, 図 5

$P\pi$ は常に、 $PC+\pi C$ に等しく、与えられた曲線 APB の両端のあいだにある、ある中間部分に対応するからである。このことは必然的に、曲線全体およびその各部分が元の曲線とは相似でないことを示している。ただし唯一の例外がある。与えられた曲線の凸性が一様で、そのすべての部分が互いに相似である場合、言い換えれば、与えられた曲線が円である場合である。この場合だけは例外として扱い、後にそのための特別な解法を与えることにする。したがって、与えられた任意の曲線は円を除いて、それ自身と長さの等しい無数の別の曲線へと変換される。そして、もとの曲線が代数曲線であるならば、それらもまたすべて代数曲線となる。(証明終わり)

系 I、最初に得られた曲線 $P\pi Q$ の振幅は、与えられた曲線 APB の半分である。第 2 の曲線はその $\frac{1}{4}$ 、第 3 は $\frac{1}{8}$ 、第 4 は $\frac{1}{16}$ の振幅をもつというように続いていく。これらの曲線の振幅は、 $\frac{1}{2}$ ずつ減っていく等比級数の形で次第に小さくなっていくのである。このことから、曲線を近似によって直線化するための新しい方法が、自然にここに示される。直線とは、振幅が無限に小さい曲線にほかならないからである。したがって、与えられた曲線 APB と長さの等しい我々の曲線は、操作を重ねて次々に作られるにつれて振幅がますます小さくなり、その分だけ直線にいつそう近づいていくのである。

系 II、もし与えられた曲線を、振幅が等しい三つの部分に分け、それらを上で述べた方法によって一つの曲線にまとめるならば、再び元の曲線と長さの等しい新しい曲線が得られる。そしてその曲線も同様にしてさらに別の曲線へ、またその曲線もさらに別の曲線へと（望むだけ何度でも）変換していくことができる。同じ理屈で、もし最初に与えられた曲線を振幅の等しい四つの部分に分ければ、やはり元の曲線と長さの等しい曲線が無限に続く新しい系列が得られる。さらに、与えられた曲線を五つに分割しても、また別の曲線の系列が得られるし、六つ、七つ、八つというように、等しい振幅の部分に分けるたびに、つねに新しい曲線の列が次々に生じる。このようにして、この問題にはただ一通りの方法で満足に答えたのではなく、無数の方法によって解決されたことになる。そしてそれらの各方法は、それぞれ与えられた曲線と長さの等しい無数の曲線を生み出す。さらに、これらの方法どうしを組み合わせれば、無限にある方法の数は、いわば「無限の中の無限」ともいうべきほど増大する。しかもそれらをさらに際限なく組み合わせていけば、つねに新しい段階の無限が現れ、先のものはほとんど吸収されてしまうかのように見えるのである。

系 III、さらに別のやり方によっても、最初の這行を行うことができる。部分 AP（あるいはその反転した位置 aP ）の配置を変えて、最初から各部分の端点どうしが隣り合うように接するのではなく、たとえば部分 aP の端点 a が、部分 PB の端点 P に接するように位置を取り直すのである。そしてこのような配置のもとで、這行運動を開始すればよい。この場合に得られる這行曲線 $P\pi Q$ も、またその後に同様に描かれる他の曲線も、先に述べた場合と同じように構成されるが、以前のものとは異なる形をもちながら、しかも与えられた曲線 APB と長さは等しくなるからである。ところでこの

方法は、とりわけ曲線の両部分 PA と PB が等しく、かつ互いに相似である場合に有効である。たとえば、曲線 APB がある円錐曲線の一部であり、点 P がその頂点であるような場合がこれに当たる。このとき、先の方法で描かれる這行曲線 $P\pi Q$ は、単に新しい別の円錐曲線にはなるものの、部分 PA や PB とまったく相似なものにしかない。しかしそれでは問題の要求を満たさない。この問題が求めている

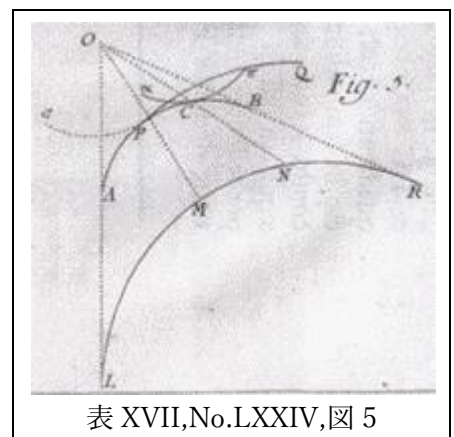


表 XVII, No. LXXIV, 図 5

るのは、与えられた曲線と長さは等しいが、形は相似でない曲線だからである。ここで一般に注意しておくべきことがある。這行する曲線と這行される曲線とが同一であるか、あるいは単に互いに相似であり、しかも這行の開始時に相似な点どうしで接している場合には、そこから生じる這行曲線もまた、つねにそれらに相似なものになる、ということである。この理由は、少し考えれば簡単に理解できる。したがって、解法の中で曲線 $P\pi Q$ は曲線 APB や部分 AP に相似ではないと述べたときも、その言明は次の制限のもとで理解してほしい。もし与えられた曲線が、互いに等しく相似な二つの部分 PA と PB から成っているならば、その場合にはまず部分 aP の位置を入れ替え、具体的には部分 aP の端点 a を部分 PB の点 P に接するように移してから這行を行うべきである。そうしないかぎり、そこで描かれる這行曲線 $P\pi Q$ は、部分 AP または PB とまったく相似なものになってしまうのである。

解法 II、潜行（すべり込み）運動による解法。

与えられた代数曲線を ACB とする。まずこれに相似で、しかもその長さが2倍である別の曲線 LMNR を作ることにしよう。この作り方はすでによく知られている。任意に取ったある点 O から、与えられた曲線上の各点 A, P, C, B に向けて直線 OL, OM, ON, OR を引き、それぞれが OA, OP, OC, OB の2倍になるように取ればよい。つぎに、曲線 LMNR を這行される側、曲線 APCB を下からすべり込む側として用い、点 B を L に合わせるか、あるいは点 A を R に合わせて配置し、そこで潜這行を行う。ここから生成される這行曲線は、与えられた曲線 APB に等しいと私は主張する。それは我々の定理 I によれば、LMNR と APB との差に等しいからである。しかるに、この差は作図により APB 自身に等しくなる。（証明終わり）

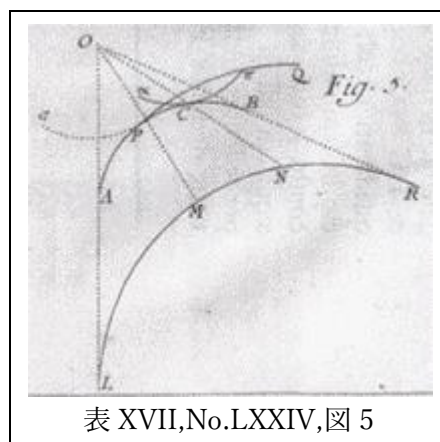


表 XVII, No. LXXIV, 図 5

注意すべきは、潜行を開始するにあたり、点 A を R に、あるいは点 B を L に重ね合わせるべきであると私が述べたことである。もし逆に A を L に、または B を R に重ね合わせてしまうならば、生成される這行曲線は与えられた曲線 APB と同一のものになってしまうからである。もっとも、この不都合は、かかる注意を払ったとしても、ある特定の場合にはなお起こりうることを私は認める。与えられた曲線 APB が、その二部分 PA と PB とを互いに等しくかつ相似である場合である。しかし、この不都合はさまざまな方法で取り除くことができる。たとえば、曲線 AP の半分だけに対して、3 倍の比で相似な曲線を作図すればよい。どの点においても OL と OA、また OM と OP の比が常に 3:1 となるようにするのである。このようにして、A を M に、あるいは P を L に重ね合わせ、もし AP が ML の上を潜るように動くならば、そこから生じる這行曲線は AP に相似でしかもその2倍のものとなる。したがって、その長さは全体の APB に等しくなる。さらに、この作図法は前の方法よりもいくらか利点をもっている。公準 II を必要としないからである。曲線を等しい振幅の部分に分割する作業は、実際にはときに手間を必要とすることがあるが、この方法ではそれをうまく避けることができる。なお、この技巧は、あらかじめ相似な曲線を作図することに基づき、与えられた曲線に等しいがそれとは異なる曲線を得るための方法は、擦行運動の場合にも同様に適用できることを知っておくべきである。与えられた曲線 APB に相似で、ただし長さがその半分にすぎない曲線 LMNR を作図するとする。これは、極 O から引いた直線 OA, OP, OC, OB をそれぞれ二等分することによって得られる。そののち、曲線 LMNR を逆の順序でそれ自身の上に擦行させる、LMNR を2度描き、その一方を他方の上に擦れながら重ねて進ませるのである。このとき、這行の開始を、一方の端点 L を他方の端点 R に合わせることによって行

う。すると、ここから生じる這行曲線は（定理 I により LMN の 2 倍に等しい）明らかに与えられた曲線 APB に等しく、しかもそれとは異なる形状のものとなる。ただし、もし部分 PA と PB とが互いに等しくかつ相似である場合には例外であり、そのときは先に述べた方法による補正を施す必要がある。さらに、先の解法を有利とする点について次のことに注意しておくべきである。この後の方法によって得られる這行曲線では、先の方法の場合のように振幅が次第に減少して、ますます直線に近づいていくということが起こらない。むしろ反対に、そこから生じる曲線はすべて、与えられた曲線と同じ振幅をもつものとして現れるのである。

円の場合の特殊解

さて、私はついにただ一つの例外的な場合に到達する（与えられた曲線が円である場合）。この場合だけは、我々の一般解法が適用されず、その枠内に含まれないものであり、先にあらかじめ除外しておいたのである。円がどのような仕方でも他の円の上を這行しようとも、擦行しようとも、また潜行しようとも、そこから生じる這行曲線も常に円となるからである。その理由は、すでに上で述べたように、円の凸性が一様であること、その各部分の相似性が途切れることなく保たれている点にある。したがって、このただ一つの例外的な場合のためにしかも無数の他のすべての曲線についてはすでに我々が解いているのにそこで行き詰まってしまうように、円に対しては特別の解法を考案する必要がある。この解法は、かつて私が他の曲線にも比較的うまく適用した方法から取られたものであり、それについては本紀要 (Acta) 1694 年の P.396・P.397 (No.XIX,P.68-69)、および 1695 年 P.64 (No.XXIII,P.80) に見ることができる。そこでは、この方法を、代数曲線の長さに等しいパラセントリック曲線を構成するために用いたのである。そしてその際すでに私は、この方法が、与えられた曲線の微分平方を、積分可能な辺をもつ二つの他の平方に分解することに本質があると指摘しておいた。したがって、著名なクラギウス (CRAIGIUS) も、自らの解法の基礎が、すでに以前から私に知られていたことを見て取ることができるであろう。ただし、これを普遍的方法として誇示しようとは思わない。さて、以下に円の場合の解法を示そう。

円が与えられており、その円周を別の代数曲線へと変換することを考える。まず、別の円 ABE を描き、その半径 CA を、与えられた円の半径の 8 倍に取る。こうすれば、その四分円弧 AB が、与えられた円周全体をちょうど 2 度含むことになる。

半径 $CA, CB = a$ 、横座標 $CD = x$ すれば、縦座標

$DP = \sqrt{(aa - xx)}$ となる。つぎに、別の曲線 HGR を次の条件で構成する。横座標 $CF = (3aax - x^3) : 3aa$ 、縦座標

$FG = (aa - xx)\sqrt{(aa - xx) : 3aa}$ となるようにする。このように作図すれば、計算すれば簡単に分かる通り、曲線 HG の一部分に半径を掛けた量は、常に円弧に対応する円弧部分 APDC

（円弧に対する円弧区分）に等しくなる。したがって、CD を半径に等しく取れば（この場合、円弧区分 APDC は円の四分円弧 AB に退化する）、そこから

$CF = CR = \frac{2}{3}a, FG = 0$ となる。また、曲線 HGR に半径を掛けた量は、円 CAB の四分円弧に等しく、

半径の半分を掛けた円周弧 APB の四分弧に等しい。ゆえに、曲線 $HGR = \frac{1}{2}APB$ （作図により）与え

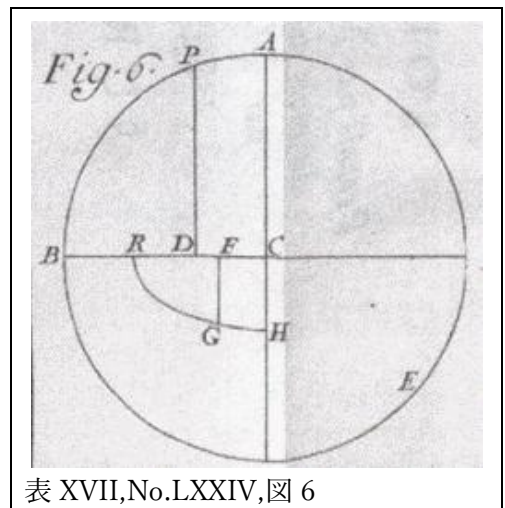


表 XVII, No. LXXIV, 図 6

問題の解法

(この解法はラテン語で書かれたもので、封印された包みの中に収められ、1701年2月1日にベルヌーイ氏の名においてヴァリニョン氏によりパリ王立科学アカデミーへ提出された。そして同時に、その包みは、同氏の兄がこの同じ問題についての解析(Voies 第66号)を公表した後でなければ開封しないように、との要請も添えられていた。しかし、この公表をめぐって種々の困難が生じ、さらにその後ベルヌーイ氏は1705年8月16日に逝去したため、その包みはアカデミーによって1706年4月17日になってようやく開封されたのである。)

問題 I

パリ王立科学アカデミー紀要
1706 年版
パリ版 P.235、オランダ版 P.304

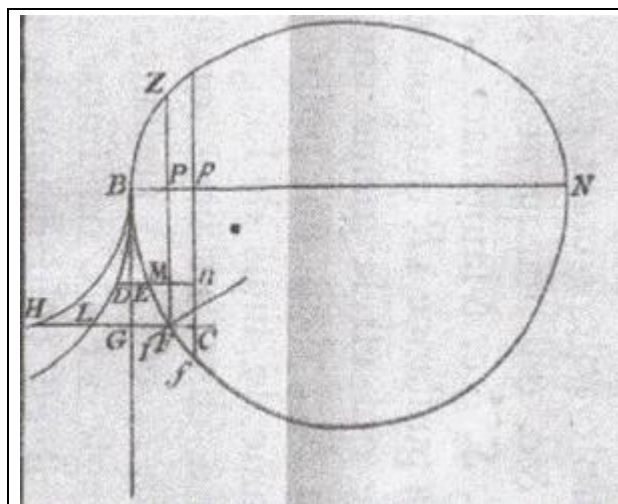


表 XVIII, No. LXXV, 図 1

求める曲線の一部を $BF\Phi$ とし、またこれによ

って、与えられた曲線 BH の縦座標に従って生成される別の曲線の一部を $BZ\zeta$ とする。私は、曲線 $BF\Phi$ の微小要素 $FO\Phi$ を、二つの微小な直線 FO と $O\Phi$ から成るものとみなし、同様に曲線 $BZ\zeta$ の微小要素 $ZL\zeta$ も、二つの微小な直線 ZL と $L\zeta$ から成るものとみなす。さて、最大値を与えるべき曲線は、そのすべての部分において同じ最大性の法則を保っているはずであるから、点 F と Φ から二

ば元の関数そのものの線分 GH が得られる。そこで、この線 GH = X とおくことにする。いま先ほど得られた等式を積分すると、 $ady = X \pm c$ となる。あるいは、同次の項を定数 dt でそろえて書けば、 $ady = Xdt \pm cdt$ と表すこともできる。ここで c は任意の定数であり、任意の微分を積分する際に積分定数として加減してよい量である。さらに両辺を 2 乗すると、

$aady^2 = dt^2 \times (X \pm c)^2 = (dx^2 + dy^2) \times (X \pm c)^2$ が得られる。これを整理すると、 $dy = dx(X \pm c) : \sqrt{aa - (X \pm c)^2}$ という関係式に到達する。これが、求める曲線を与える一般方程式である。

もっとも、この式は $c=0$ と仮定すると大きく簡単になる（条件を満たす曲線の一つを見つければ十分だからである）。このとき

$dy = Xdx : \sqrt{aa - XX}$ となり、その積分は $y = \int (Xdx : \sqrt{aa - XX})$ で表される。

そして、この関係に従って曲線を構成すれば、それがまさに問題で求められている曲線になる。

系、ここで $c=0$ と仮定すると、 $ady = Xdt$ が成り立つ。よって $dy : X = dt : a$ という比例関係が得られる。さらに dt を一定とみなすと、 dt は角 BFP の正弦に対応する値である。したがって、 $\sin(\angle BFP) : X [=GH] = dt : a$ となり、これは一定の比である、ということの意味する。ところで、もし BF が最速降下曲線であり、かつ BH が、その各点 F における速度を縦線 GH によって表す曲線であるとすれば、私はすでに以前、角 BFP の正弦が GH に対して一定の比をなすことを示している

(No.XXXVII,P.121 を参照)。ゆえに、曲線 BF は同時に次の二つの性質を備えていることが分かる。この曲線は $\int Xdx$ を最大にし、同時に $\int (dt : X)$ を最小にするような曲線でもある。しかしこの曲線は、「 $c=0$ でないときにはこの性質を持たない」という意味である。

問題 II

同じ前提で、PZ が弧 BF に関する与えられた関数であると仮定する。このとき、曲線 BFN がどのような性質をもつ曲線であるかを求めよ。

解法

もし上で用いたのと同じ方法に従えば、この問題は簡単に解くことができる。極大条件の性質により、三角形 ZLY は常に三角形 $\zeta \lambda Y$ に等しくなるからであり、 $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda \mu$ が成り立つ。さて、LM [LR - MR] は二つの弧 BFO と BFT に対応する関数の差であり、また $\lambda \mu$ [$\lambda \rho - \mu \rho$] は二つの弧 BF ω と BF θ

に対応する関数の差である。さらに、これらの関数の差は、上と同様の方法によって求められる。その関数が弧の関数であるとき、弧の微分は無視して、その微分された関数に二つの弧 BFO と BFT の差 TX を単に掛ければよい。したがって、 $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda \mu$ の代わりに、

$FI \times \Delta BFO \times TX = \Phi K \times \Delta BF\omega \times \theta \zeta$ と書くべきである。さて、いま焦点 F と Φ をもつ楕円が、糸によって $FO + O\Phi = F\omega + \omega\Phi$ となるように描かれていると仮定する（いわゆる糸による楕円の性質）。この性質から、微小線分 OX と $\omega \zeta$ は互いに等しくなる。したがって、 $TX : \theta \zeta = \tan(IFO) = \tan(K\Phi\omega)$

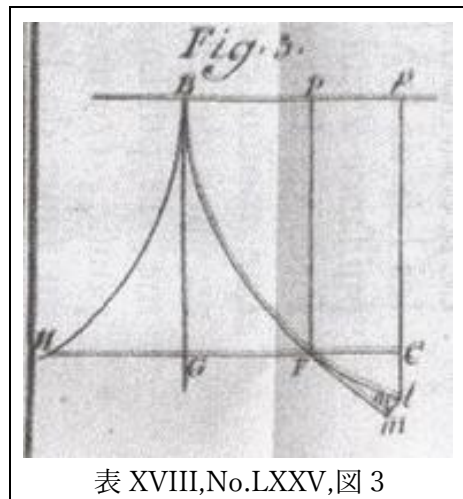


表 XVIII, No. LXXV, 図 3

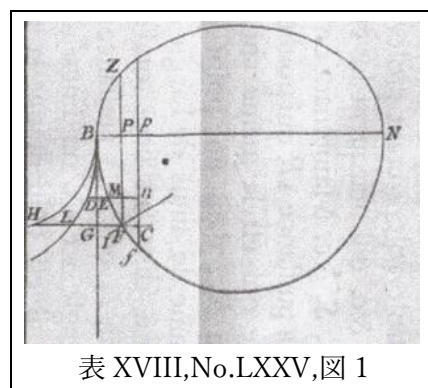


表 XVIII, No. LXXV, 図 1

解析の問題へと還元されることになり、その結果、求める曲線の本性（その性質や方程式）を表す方程式は簡単に見出されるのである。

同様の方法によって、懸垂線や最速降下線の問題もまた解くことができる。その解は、私がこれまでに別の方法によって与え、かつ見出していた解とも簡単に一致するのであり、この方法の優秀さを示すものである。なお、この方法は直接的なものであるが、私はさらに、流体の圧力に基づく間接的な方法も付け加えることにする。この方法によっても、まさに同一の解が与えられるであろう。しかも、この直接法と間接法という二つの方法の見事な一致は、それらの確実性をいっそう確かなものとして保証することになる。

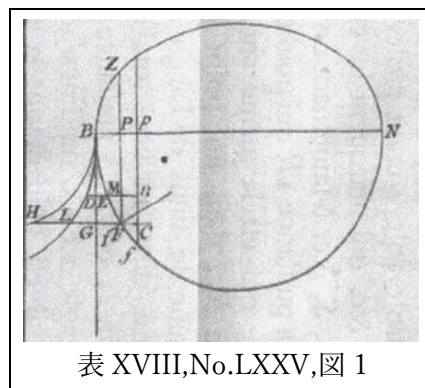


表 XVIII, No. LXXV, 図 1

液体によって上から圧迫されて張られた布 BFN を考える。その液体の重さは一様であってもよいし、一様でなくてもよい。このとき、この布は、液体ができるかぎり低くまで下降できるような曲率をとることは明らかである。そしてそれは、液体のすべての部分の重さ（重力の作用）を合わせたものが最大となるときに実現する。ここで注意すべきは、液体の重心が最も低くなるときにそれが起こる、と言っているのではないという点である。この場合には重心を考えることはできないからである。なぜなら、曲線 BFN が変化すると（たとえその長さが一定、等周的であっても）、その曲線によって囲まれる液体の量もまた変化するため、重心そのものも一定ではなくなってしまうからである。いま、領域 BFN が、鉛直の適用線 PF、pf などによって細い糸状の部分に分割されていると想像しよう。そして、曲線 BL を考え、その縦座標 GL が、液体の重力作用（重みによる効果）を、BG または PF という高さに応じて表すものとする。言い換えれば、GL や ED という縦座標は、それぞれ、深さ PF にある液体の微小部分 FC が、同じ大きさの別の微小部分 Mn（深さ PM にある）に比べて、上にある糸状の柱 PFCp の重さによってどれだけ多く押されているか、どれだけ強く圧力を受けているかの比を表している。したがって、LG が微小部分 FC（および同じ深さ、直線 GC を延長した位置にある他のすべての部分）の重力作用を表すのと同様に、DE は微小部分 Mn（および直線 EM 上にある他の部分）の重力作用を表している。ゆえに、これらのすべての縦座標を合わせて考えると、領域 BLG および BDE は、柱 PFCp や PMnp の中に含まれるすべての微小部分の重力作用を総合したものを表していることになる。そこで、いま別の曲線 BH を描き、その縦座標 GH が、それぞれ対応して領域 BLG に比例するものとする。そして点 P において $PZ = GH$ となるように取れば、新たな曲線 BZN が得られる。このとき、この曲線の縦座標 PZ は、それぞれの柱 PFCp に関して、そこに含まれる微小粒子の重力作用の総和を表すことになる。したがって、これらの縦座標 PZ をすべて合計したもの、領域 BZN 全体は、布 BFN の内部に含まれる液体のすべての部分の重力作用の総和を表すことになる。したがって、この布は、すべての重力作用を総合した量、領域 BZN が最大となるような形状・曲率をとるのであるから、次のことは明らかである。もし、重さが連続的に変化する液体を用い、しかも次の条件とする。深さ F や M にある粒子の重力作用（LG や DE）が、曲線 GH の縦座標の微分に比例するようにする（なお、私の兄の問題においては、この GH が同じ PF の関数を表している）。このように仮定すれば、布の曲率は私の兄が私に求めるよう提起した曲線の曲率 PF のあるベキ関数に関して定められる曲率と同一のものになることは明らかである。しかし、私はこの問題をすでに上において、任意の関数に対して直接法によって解いているのである。

したがって、この直接法と間接法との一致を示すために、私は、先に述べた比例法則に従って重力作用が変化する液体を載せた布がとる曲線、その曲率の本性を求めることにする。もしそこで、先に得られたのと同じ方程式に到達するならば、これら二つの方法の確実性を疑う者はいないであろう。ここでまず、きわめて簡単な一つの場合が現れる。液体の重さが一様である場合、これは通常の状態である。このとき、重力作用 LG や DE は、それぞれ深さ BG や BE に比例する。したがって、曲線 BL は直線となり、曲線 BH は通常の放物線となる。この場合、曲線 BFN は、布または帆がとる通常のたわみの曲率となる。この曲率は、私の兄がその弾性体に帰したものであり、またその本性は（私もかつて、兄と同様に見出したところであるが）次の方程式によって表される。 $y = \int (xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ 。

さて、先に直接法（問題 1 の解）によって得られた一般方程式 $y = \int (Xdx : \sqrt{(aa - XX)})$ において、この一般関数 X の代わりに、ここで仮定している特別な場合 xx を代入すると、 $y = \int (xxdx : \sqrt{(a^2 - x^4)})$ が得られる。さらに（同次項を補って整えれば）、 $y = \int (xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ となる。これによって、両方法の一致が、すでにこの点からも明らかに示されるのである。

さらに、液体の重力作用の一般法則として、曲線 BDL が任意の曲線であると仮定し、そのとき布 BFN の曲率の本性を求めたいとする。これは、かつて私が風によって膨らんだ帆の曲率を求めるために用いた方法によって解くことができる。その方法とは、液体の圧力の方向、それは曲線の各点において常に曲線に垂直であることを、二つの側方の圧力、一つは水平方向、もう一つは鉛直方向の圧力に分解して考えるというものである。そして、これら二つの圧力をそれぞれ別個に取り扱い、最も低い点において必要とされる張力、その点で帆が接線方向に引き伸ばされる力を求めるのである。この張力 a は絶対的な力であり、帆が曲線上のどの点において懸けられていようとも（言い換えれば、釘に固定されていようとも）、一定であるものと仮定される。このようにして、任意にとった一定量を用い、懸垂線を扱ったときと同様の方法で、得られる諸量から方程式を立てれば、上に直接法によって得たのと同じ方程式に到達することになる。しかし、この操作の仕方は正当ではあるものの、やや冗長であり、また、私が最近見出した別の方法ほど自然なものではない。そこで、これからその方法をここに述べることにする。

布の各微小部分 Ff は、曲線に対して垂直な方向 FI に沿って圧力を受けている。これは、その上に載る液体柱の重さ、液体の微小部分 FC の重力によって押されるためであり、その重力は線分 LG によって表される。ゆえに、この曲線は、もし糸 BRFST が、R,F,S,T, … のすべての点において、それぞれの点に垂直に作

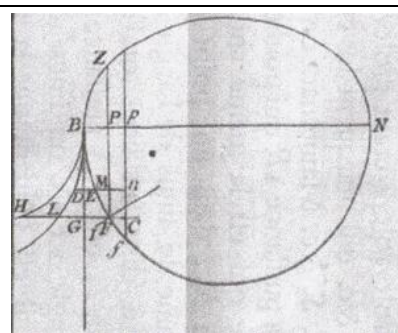


表 XVIII, No. LXXV, 図 1

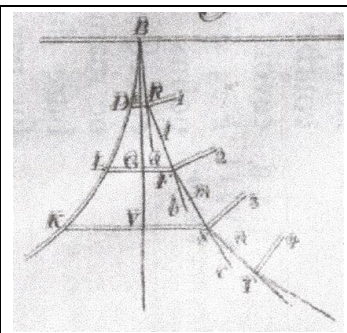


表 XVIII, No. LXXV, 図 4

用する力 R1, F2, S3, T4, … によって引き延ばされ、しかもそれらの力が対応する縦座標 ED, LG, VK, … に比例すると仮定した場合に形成される曲線と同一のものとなる。さて、私は簡単な方法によって、この曲線、したがって布の曲率が、先に直接的方法によって求めたものと同一であることを示すであろう。

曲線を、無限に多くの辺 BR, RF, FS, ST, … から成る多角形として考えることにする。これらの辺を延長すれば、角 aRF, bFS, cST, … が生じ、これらはそれぞれ点 R, F, S, … における曲線の曲率を表す。さて、力学の法則によれば、押す力 1R は、支える力 l 、R と F の中間の任意の点において糸の張力として要求される力に対して、角 aRF の正弦が角 BR1 の正弦、すなわち全正弦に対する比に等しい。同様に、点 l において支える力は、押す力 2F に対して、角 2Fm の正弦、すなわち全正弦が角 bFS の正弦に対する比に等しい。したがって明らかに、押す力 1R と押す力 2F との比は、角 aRF の正弦と角 bFS の正弦との比に等しい。同様の方法によって、力 2F と力 3S との比は、角 bFS の正弦と角 cST の正弦との比に等しいことが示されるであろう。しかし、てこの関係は同様に順次続く。ゆえに、力 1R と力 3S との比は、角 aRF の正弦と角 cST の正弦との比に等しい。さらに比を入れ替えれば、角 cST の正弦と力 3S [KV] との比は、角 aRF の正弦と力 1R [DE] との比に等しい。任意の点 R における曲率角の正弦は、線分 DE（これを BE の微分された関数を表すものと仮定する）に対して一定の比をなすのである。しかるに私は、直接的方法によって、まさにこの同一の性質を既に見いだしている。したがって、前述の方法で加重を受けた布の曲率は、等周曲線の曲率と同一である。ゆえに、直接的方法と間接的方法とは互いに一致し、相互に確証し合うのである。以上、証明すべきところであった。(第 II 巻、No.CIII を参照)

№. LXXVI

摩擦を受けた物体の発光について

ベルヌーイ氏の新しくかつ巧妙な燐光体は、1700 年および 1701 年の「アカデミー史」(No.LXII, No.LXIII, No.LXIV を参照) において既に言及されていたが、哲学者たちの好奇心を刺激せずにはおかなかった。とりわけアカデミーにおいては、この発見がその会員の一人の功績に認められるという意味において、ある種特別の権利を有するがゆえになおさらであった。この主題について行われた諸実験の中で、やがて人々は、暗所において摩擦されたある種の物体が発する光に関する実験へと至った。ベルヌーイ氏は、これらの現象については以前から長く観察を行っていたが、これまでその結果を学会に報告することを怠っていたと書き送った。以下にその結果を述べる。

パリ王立科学アカデミー史 1707 年版 P.1

これらの実験の大部分は、最も簡単に光を発する物体、たとえば冬に逆毛にしてこすった猫の背、あるいは砂糖、または砕かれる硫黄等のようなものの上で行われたわけではないので、いくつか遵守すべき条件が存在する。

第一に、互いにこすり合わせる二つの物体のうち、少なくとも一方は透明でなければならない。そうすれば、その光が持続している間に、それを透して観察することができるからである。通常その光は摩擦が続いている間しか持続しないからである。

物体の表面は平坦で、十分に磨かれ、かつ清浄でなければならない。そうすることで接触が直接的原因となるからである。

二つの物体はいずれも硬い物質でなければならない。

十分な硬さがなくとも、大きな密度はそれ自体で効果を生じる。ベルヌーイ氏は、ガラスの鏡面に対して、水銀と錫の合金をこすり合わせるにより光を得たのである。

二つの物体のうちの一方は、できるかぎり薄いものでなければならない。そのほうが摩擦によってより簡単に加熱され、より速やかに光を発し、しかもいっそう強い光を放つからである。これは、ベルヌーイ氏が厚さの異なる小さな銅板について実験し、確認したところである。

ガラスに対してこすり合わせた金は、すべての金属の中で最も発光に適したもののように彼には思われた。いかなる物質も、ダイヤモンドほど質の高い光を発するものはない。その光は、強くふいごであおられた炭の光に劣らないほどに鮮明である。なお、ダイヤモンドの厚さがいかなるものであるかは問題とならない。

このことからベルヌーイ氏は、実験においていかに熟達していたとはいえ、ボイル氏は、本来は奇跡とみなすべきでないものを、一種の驚異として見なした。それは、暗所で摩擦されると輝きを放つ一個のダイヤモンドであり、彼はこれに「アダマス・ルキドゥス、光るダイヤモンド」という壮麗な名称を与えたのである。しかし、それは何ら特別の特権的性質を有するものではなかった。もっとも、その輝きが摩擦の後もしばらく持続したことは事実であり、この点は、ボイル氏がそれを高く評価した理由の一部を、なお根拠づけるものではあった。

ベルヌーイ氏の諸実験の機会に、その子カッシーニ氏もまた、同じ題で実験を行った。

1、テーブル形にカットされたダイヤモンドをガラス板に対してこすり合わせると、燃えた炭の光に類似した光を発し、その光はダイヤモンドの表面よりも広く見えた。

2、多面カットされたダイヤモンドは、より弱い光を発した。

3、一枚のエキュ銀貨、およびその他の種々の銀板は、ダイヤモンドよりも少ない光しか発しなかった。

4、銅製のドゥーブル貨およびソル貨も、わずかながら光を発した。前述の諸実験に用いられた種々の物体は、いずれもガラスに対してこすり合わせられたものである。

5、テーブルカットのダイヤモンドを銀板に対してこすり合わせると、光を生じた。

No. LXXVI I

ヨハン・ベルヌーイ

運動によって図形を測定するための迅速な近似法の考案、這行運動の考察を提示するもの。
1707年1月15日、バーゼルにて、G・G・ライプニッツへの書簡より。

与えられた楕円を $ABDE$ とし、その共役軸を AD および BE とする。そこで、この与えられた楕円と長さの等しい別の楕円 $MPNQ$ を作る。そして、この二つの楕円がまずそれぞれの共役頂点 A と P において互いに接するようになる。大軸 AD が他方の小軸 PQ と一直線上に重なるように配置するのである。この位置において楕円 $PMQN$ を這行させるよ。不動の楕円 $ABDE$ の上を平行移動の運動によって動かすのであり、可動楕円に取った任意の直線、たとえば MN が常に自らに平行を保ちつつ、かつ両楕円の相互接触を常に維持するようにするのである。すると、楕円 $PMQN$ は周行の第1は位置 $P_1M_1Q_1N_1$ に移り、第2の後には $P_2M_2Q_2N_2$ に、第3の後には $P_3M_3Q_3N_3$ に移り、そして第4の後には再び最初の $PMQN$ の位置に戻るようになる。しかもその間に、四つの頂点 A, B, D, E は順次、それぞれの共役頂点 P, N, Q, M を受け取ることになる。この運動によって、這行する

ベルリン論文集、
第1巻、P.173

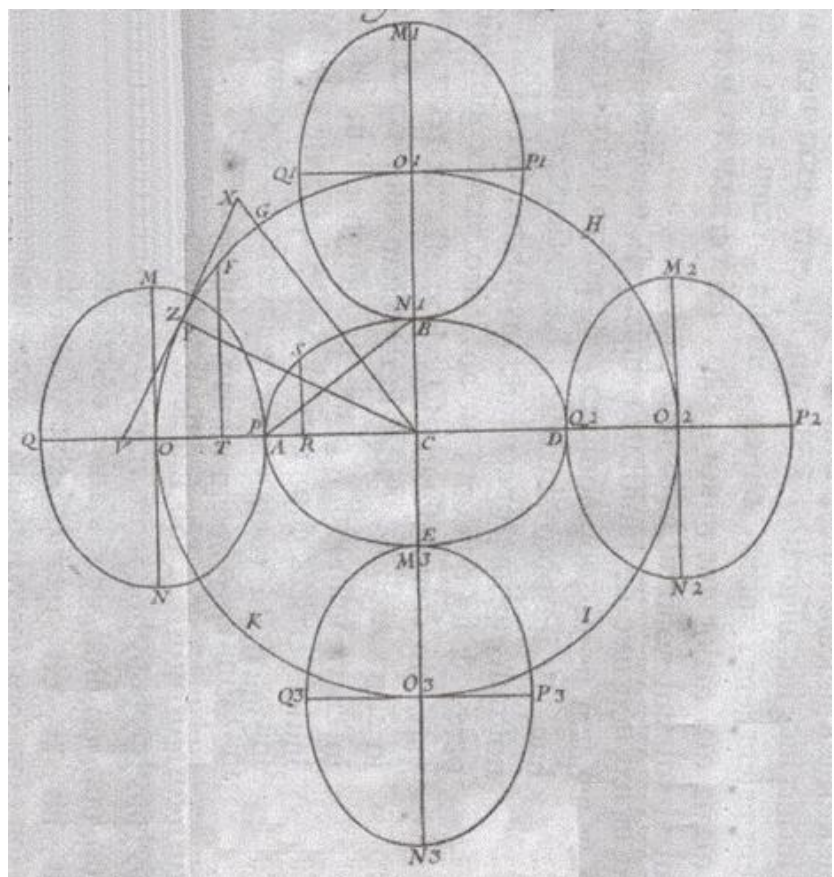


表 XIX, No. LXXVII, 図 1

る曲線の平面内の任意の点、たとえば中心 O は、曲線 $O-G-O_1-H-O_2-J-O_3-K-O$ を描くことになる。そして、ライプツィヒ学術誌 (Acta Lipsiensia) (No. LXXIV を参照) において証明されているところによれば、この曲線は楕円曲線 $ABDE$ の2倍の曲線となる。したがって、その半分 $OGHO_2$ は、与えられた楕円曲線に等しいのである。もし、描かれる曲線全体が与えられた楕円に等しくなることをより望むのであれば、まず与えられた楕円の代わりに、それと相似で共役軸が与えられたものの半分である別の楕円を採用しなければならない。そうすれば、楕円 $ABDE$ と $PMQN$ の二つを合わせたものが提案された楕円に等しくなり、したがって、描かれる曲線 $GHIK$ の全体もまたそれに等しくなるのである。ゆえに我々は、連続運動による一つの作図法を得たのであり、これは連続運動によって円が描かれる場合に劣らず、確かに幾何学的なものである。さらに、この曲線の性質を定め、その各点を求めるための代数方程式が要求されるならば、その点についてもまた与えることができる。さて、大半軸を $AC=a$ 、小半軸を $BC=b$ とし、楕円上の不定の横座標を $CR=x$ とする。このとき同楕円における縦座標は

$RS = b\sqrt{(aa-xx)}:a$ となり、簡略のためこれを $by:a$ と書くことにする。これらから横座標 CT、縦座標 TF を次の条件で定める。 $CT = x + bx^3 : \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$ 、 $TF = by:a + a^3y : \sqrt{(a^4yy + b^4xx)}$ とするのである。定められる曲線こそ求めるべき曲線であると私は主張する。それは、点 O の這行運動によって描かれたまさにその曲線に他ならない。なおつけ加えるとすれば、点 F と S とは互に対応しており、点 O が這行して F に到るとき、両楕円の相互接触は常に S において生じるようになっていく。これらのことはすべて簡単に証明される。

さて、ここで私は別の事柄へと進むが、これは注意しておくに値するものである。私のこの曲線変換の方法は、楕円線および楕円の形状をもつ他の曲線、さらにはあらゆる曲線を、任意に間隔を小さくすることのできる二つの円の限界内に包含しうることを同時に教えるという点である。しかもその二つの円は、一方が与えられた楕円曲線より大きい周長をもち、他方がそれより小さい周長をもつように取られるのである。このことが実用上どれほど有用でありうるかは明らかである。しかるに、この種のことはこれまで誰一人として成し遂げてこなかった。従来、有限かつ幾何学的な境界において、たとえば通常の楕円を、互いの差が百分の一どころか千分の一、あるいはそれ以下にすぎない二つの円周のあいだに厳密に挟み込むということを、秩序立った方法によって行った者は誰もいなかったからである。しかし、まさにこのことこそ、私の方法が見事に成し遂げるのである。

明らかに、這行によって描かれる曲線で、楕円に等長なものは、その四つの基準点 O、O₁、O₂、O₃ では、いずれも中心 C から等距離にある。さらに、これら四点の内部には、正確に中間に位置する別の四点 G、H、I、K が存在するし、これらも同様に中心 C から等距離にあるが、ただし次の相違がある。前者 (O、O₁、O₂、O₃) の中心 C からの距離は最小であり、後者 (G、H、I、K) のそれは最大である。この性質こそが、我々の曲線に特有の形状を与えるのであり、この曲線は G、H、I、K において四つの隆起（しかもかなり鈍いもの）を持ち、四つの基準点 O、O₁、O₂、O₃ の間に交互に突出する。一方、これら基準点においては、曲線はあたかも四つの圧縮を受けているかのような状態となる。したがって明らかに、中心 C を中心とし半径 CO および CG をもって描かれる二つの円は、この曲線にそれぞれ四点で接する。一方の円は O、O₁、O₂、O₃ において内接的に接し、他方の円は G、H、I、K において外接的に接する。ゆえに、前者は内接円として曲線より小さく、後者は外接円として曲線より大きいことになる。さて、内接円の半径は $CO = CA + CB = a + b$ CO であり、また外接円の半径は $CG = AB\sqrt{2} = \sqrt{(2aa + 2bb)}$ である。ゆえにここから次のように結論される。曲線 O-G-O₁-H-O₂-I-O₃-K-O という楕円（その共役軸は 4a および 4b、AD と BE のちょうど二倍である）は、半径 $a + b$ をもつ円の周長よりも大きく、しかし半径 $\sqrt{(2aa + 2bb)}$ $\sqrt{(2a^2 + 2b^2)}$ をもつ別の円の周長よりは小さいのである。この添付された図の例を取る。ここでは、そのような楕円を用いており、その共役半軸 AC と BC は 5 と 4 の比にある。したがって、より小さい円の半径は 9、すなわち $\sqrt{81}$ となり、より大きい円の半径は $\sqrt{82}$ となる。ゆえに私は、共役半軸が 10 および 8 の部分をもつ楕円の長さは、半径 $\sqrt{81}$ と $\sqrt{82}$ をもつ二つの円周の間にあると主張する。しかもこれらの数は、有理数 9 と $9\frac{1}{18}$ 、162 と 163 よりも、互いにいっそう近接している。したがって、小さい方の円周は大きい方の円周と比べて、小さい方の円周は大きい方と比べて、その差は自分自身の $\frac{1}{162}$ よりも小さい

この機会に、私はある実務家たちの著作において次のようなことを読んだのを思い出す。楕円の周長を円の周長と比較するためには、与えられた楕円の共役半軸の算術平均に等しい半径をもつ円を描くべ

きであり、そしてそのように描かれた円の周長は楕円の周長に等しい、と彼らは主張しているのである。実のところ、この円は、その周長が感覚的な見積りのみによって楕円の長さと同じと疑いなく判断されているものであるが、ここで私が与えた限界のうち、まさに下限そのものである。しかるに彼らはそれをせいぜい近似的に等しいと見なすにとどまり、厳密に取ったときに正確に大きいのか小さいのかについては確信していない。これに対して私は、事柄の真理を科学的に把握し、それがわずかに真の値より小さいことを示した。

以上は第一次の限界についてである。次に、第一次のものよりはるかに近い第二の限界を、さらにその後にはいっそう近い第三の限界を、という具合に順次見出すのであるが、その方法は次の通りである。第一の操作によって得られた我々の曲線 GHIK が自らの上を這行するものと想定する。ただし、その開始において、膨らんだ頂点 G が圧縮の頂点 O に接するようにする。言い換えれば、可動曲線における最長線 GC が、不動曲線における最短線 OC と一直線上に一致するように配置するのである。これはちょうど楕円そのものにおいて、初めに共役頂点 A と P（これらはまさに、ここで私が膨らんだ頂点および圧縮の頂点と呼ぶものに他ならない）が互いに接し、最大距離 AC と最小距離 PO とが一直線上に置かれるのと同様である。これを理解すれば、わずかな注意を払うだけで、第二のこの這行運動によって、可動曲線の中心 C、あるいはその平面内の任意の点が、新たな八膨隆曲線を描くことが認められる。それは、同数の圧縮部の間に交互にわずかに突出した八つの膨らみをもち、その八つの頂点はいずれも中心から等距離に位置する曲線である。さらに、この八膨隆曲線の長さは、それを生成する四膨隆曲線の長さのちょうど二倍であり、ちょうどその四膨隆曲線自体が、その生成元である楕円の長さの二倍であるのと同様である。ゆえに、これらの曲線の驚くべき生成を考察すべきである。楕円は実際には二膨隆曲線であり、それ自身の二倍の四膨隆曲線を生成し、四膨隆曲線はその二倍の八膨隆曲線を生じ、このようにしてこの生成は無限に続いていくのである。四膨隆曲線は、二膨隆曲線（楕円）よりも、より円の丸さに近づく。同様に、八膨隆曲線は四膨隆曲線よりもさらに円に近づき、以後も同様である。これは多角形に似ており、角の数が多くなるほど円により類似するのと同じである。しかし、その近似の仕方には大きな差異がある。多角形においては角の数を増やしていく方法では、ルドルフ・ファン・コーレン（Ludolph van Ceulen）が定めた極限に到達するまでには、非常に長く多くの段階を経る必要があるのに対し、我々の多膨隆曲線は驚くべき速さで円へと収束するからである。実際、いくつかの指標から私に明らかとなるによれば、わずか5回の操作を施すだけで、すでにルドルフの極限よりもさらに厳密な範囲に到達する。64の膨隆をもつ曲線が得られるのである。これに対してアルキメデスは、直径に対する円周の比を求めるにあたり、7:22という比を導くために96角形を用いる必要があったが、それでもなお真の値からはかなり誤差があったのである。この真理は、いま与えようとしている極限から、ある程度把握することができる。これらの極限は、八膨隆曲線が私に提供したものである。さて、これを求めるには、前に述べたことから簡単に導かれるように、その曲線の中心からの距離の最大値と最小値とを探究する必要がある。最大距離を半径として描かれた円は、その曲線に外側から8点において接し、その長さは曲線よりも大きくなるからである。これに対して、最小距離を半径として描かれた円は、曲線に内側から8点において接し、ゆえにその長さは曲線よりも小さくなるのである。最小距離に関しては、簡単に求められる。それは、生成元である四膨隆曲線の最小距離と最大距離との和に等しく、これは自明である。しかし最大距離に関しては、これが中心 C から、四膨隆の生成曲線に点 Y において接する接線 VX に下ろした垂線 CZ の2倍に等しいことを、私は証明することができる。この接線は、延長された CO および CG とともに、二等辺三角形 VCX の底辺をなすものと仮定

されている。そして同様の方法で、後続の多膨隆曲線における最小距離と最大距離も見出される。常に最小距離は、先行する生成多膨隆曲線における最小距離と最大距離との二つを合わせたものに等しく、また最大距離は、先行する最大距離と最小距離を延長して接線になり、それを底辺として形成される二等辺三角形の高さの2倍に等しいのである。この一般的基礎から、もし今、八膨隆曲線が与えるいわゆる第二の極限を導き出そうとするならば、まず次のことに注意しなければならない。八膨隆曲線は四膨隆曲線の2倍であり、かつ四膨隆曲線は二膨隆曲線（楕円）の2倍であるから、八膨隆曲線は長さにおいて楕円の4倍となる、ということである。したがって、それが与えられた楕円と等しくなるようにするためには、最初の生成曲線として、与えられた楕円に相似で、その共役軸が与えられた楕円の共役軸の $\frac{1}{4}$ である別の楕円を採用しなければならないのである。さて再び、与えられた楕円の共役軸を $4a, 4b$ とする。したがって $AD=a, BE=b$ となる。このとき私は第二の極限、八膨隆曲線に内接する円の半径は $a+b+\frac{1}{2}\sqrt{(2aa+2bb)}$ となる。また、同曲線に外接する円の半径は

$$\frac{1}{2}\sqrt{(2aa+2bb+(aa-bb)\sqrt{2})}+\frac{1}{2}\sqrt{(2aa+2bb-(aa-bb)\sqrt{2})}$$

になる。あるいは同値として

$$\sqrt{\left(2aa+2bb+\frac{1}{2}\sqrt{(2a^4+12aabb+2b^4)}\right)}$$

と表すこともできる。この理論をわれわれの例に適用し

よう。与えられた楕円の共役半軸が10と8のとき、 $a=5, b=4$ の場合である。このとき、小さい方の円の半径は $9+\frac{1}{2}\sqrt{82}$ 、大きい方の円の半径は $\sqrt{\left(41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}\right)}$ と求められる。これらの数は、有

理数である $9\frac{8}{289}$ および $9\frac{391}{14000}$ よりも互いにいっそう近接している。というのも、 $9\frac{8}{289}$ は

$$9+\frac{1}{2}\sqrt{82} \text{ よりわずかに小さく、また } 9\frac{391}{14000} \text{ は } \sqrt{\left(41+\frac{1}{2}\sqrt{6562}\right)} \text{ よりわずかに大きいからであ}$$

る。しかも、 $9\frac{8}{289}$ と $9\frac{391}{14000}$ は、36562と36563のあいだにある等しさの比よりも、なおいっそう等

しさに近く接近している。ゆえに私は、この第二の操作によって、二つの円周を定めたのである。一つは与えられた楕円より大きく、もう一つは同じ楕円より小さい円周である。しかしながら、これら二つの円周は等しさからの近似値のずれがきわめて微少であり、36000の部分に分割しても、互いに一部分すら異なるほどである。さて、もし第一の限界である162と163に、直ちにそれよりもはるかに互いに接近した第二の限界が続くとすれば、さらに第三の操作、ついで第四、さらには第五の操作を施したならば、どうなるであろうか。私の述べたことについて、疑う余地はないであろう。楕円の周長を円周の周長と同一とみなすために、これら少数の操作によって、ルドルフが円そのものの求積のために、多くの連鎖的操作によって見いだした限界よりも、いっそう狭い限界へ到達できるのである。確かに、さらなる操作は、根号の記号が複雑に絡み合い、それが限界の表現式の中にますます累積していくため、多少困難かつ冗長なものになってしまうことは認める。しかし、こうした研究を好む者にとっては、限界がある一定の法則に従って進行するかどうかを探究するならば、十分に試みる価値があるであろう。そのような場合には、計算を行わずとも、任意のところまでそれらを継続することが可能となるからである。実際、小さい方の限界を定めるに関しては、すでにそのように行われている。前に注意したように、その小さい限界は常に、先行する限界のあいだの算術平均に等しいからである。もし今、同

様の簡単さで大きい方の限界も先行する限界から導き出すことができるならば、われわれは望むところを得るであろう。さて、その第三の操作を実行して第三の上限を定めるという苦勞を、私はまだ払ってはいないが、きわめて簡単に求められる第三の下限を、先行する第二の上限と比較・併用することによって、第二の上限と下限から得られる比よりも、いっそう等しさに近い比に到達することができる。し

たがって本例において、第二の限界が $9 + \frac{1}{2}\sqrt{82}$ と $\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ であり、その比が 36562 と 36563 のあいだに含まれているとすれば、今や下限としては $\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{82} + \frac{1}{2}\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ (※

累積的な根号合成を示唆) になり、上限としては $\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ になる。これらの限界は、

56717 と 56718 という比の範囲内に含まれていることがわかるが、両者はわずかに 1 だけの差しかない。したがって、共役軸の比が 5 対 4 であるわれわれの楕円は、円周の周長に対してすでにきわめて近接するところまで還元されており、楕円より大きい円周と、同じ楕円より小さい円周という二つの円周を与えることができるのである。しかもこれら二つの円周は、56000 の部分に分割しても、互いに一部分すら異ならないほどに一致している。

内接する線が外接する線よりも小さいことは確実である。それらの線はいずれも同じ側に向かって凹であるからである。もっとも、これらの多膨隆曲線が本当にそのような性質をもつのかと疑う者もあるかもしれない。しかし、それらがそのような性質をもつことは、這行運動によるその構成そのものから明白に導かれる。さらに、円が同じ側に凹な曲線に対して複数の点で接し得るのに対し、直線にはそれができないのだから、このことを不思議に思うには及ばない。

No. LXXVII

引用・抜粋

ライプニッツがヨハン・ベルヌーイに宛てて送った返信書簡より。
1701年2月1日、ベルリンにて。

あなたの円によって楕円曲線に近似する方法は、直線的に円周へ近似する問題にも適用できるのではないかと、書き進めるうちに私は考えた。直線へと展開できる楕円状の曲線を用いることによってである。いま、ある可動の円が不動の円 AEF の上を回転することによって、エピサイクロイド線 ABCDE が描かれるものとする。いま、前記のエピサイクロイドにおける最大弦を BD とし、この弦によって弧から線分 BCD を切り取るものとする。これに対して、あらゆる点で合同な別の部分 BKD を付加すれば、こうして楕円状の曲線 BCDKB が形成される。この曲線は通常の幾何学によって直線化可能である。私は、その各点もまた通常の幾何学によって定めることができるような曲線を仮定しているのである。

この曲線を、楕円の場合と同様に這行運動によって取り扱うならば、それに等しい曲線、あるいはそれと与えられた比にある曲線ができ、それらは円に対して無限に近づいていくであろう。したがって、直線化可能な曲線を望む限り円形に次第に近づけていくことにより、逆に円の円周をもまた、直線へとますます近づけていくことができるのである。

ベルリン論文集、
第1巻、P.180

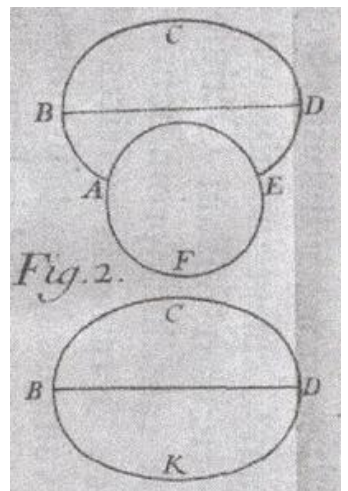


表 XIX, No. LXXVII, 図 2

No. LXXIX

引用・抜粋

ベルヌーイからライプニッツへの書簡より。
1707年3月23日、バーゼルにて

弧長が有限な任意の曲線を考える。楕円のような形でない場合であってもよい。任意の曲線（例えば放物線）の弧 BA を取る。ついで B において反対側へ、最初の弧にあらゆる点で相似かつ等しい別の弧 BD を付け加える。このとき（絶対に必要ではないが）B において共通の接線をもつように、曲率が連続となるようにしてもよい。次に、この二つの弧 BA, BD に対して、それらと全く相似で等しい別の二つの弧 EA, ED を対応させる。こうして、閉じた楕円状の図形 BAED が生まれ、その全周は弧 BA を 4 回取った長さに等しくなる。さらに、A および D において弧が角をなして連結し、B および E のように連続曲線として滑らかに接続しないとしても問題はない。さて、この図形 BAED に、全体にわたってこれと合同な別の図形 PNQM を近づけ、楕円の場合のように一方が他方の上を這行するならば、点 O はある四膨隆曲線を描くことになる。この曲線の長さは弧 BA の 8 倍となる。さらにこの四膨隆曲線は、その後八膨隆曲線へと変換され、同様の過程が以後も続いていく。もっとも、これらの多膨隆曲線が、楕円から生成される曲線のように一様な性質をもつものでないことは私も認める。それらは互いに異なる弧から成り立っているからである。しかし、それらの弧はいたるところで連続的な曲率へと滑らかに移行するのであり、円への近似という目的のためには、これで十分なのである。したがって、明らかに放物線の弧およびそれに依存する量、双曲線の面積が、円によって任意に近い精度で測定しようということである。これは確かに、これまでのところ誰も首尾よく実行したことのないことであった。この方法によれば、わずかな数時間のうちに、これら（放物線弧や双曲線面積）について、私が楕円に対して与えたものよりも、さらに厳密な近似値を計算することができるからである。なお、ここで追記しておくが、閉じた楕円状の図形 BAED を作るために、弧 BA を 4 回取ることは必ずしも必要ではない。ただし、それを完全な全周にまで帰着させようとする場合に限っては別である。任意の曲線のいかなる一つの弧であっても、それだけで、逆向きの這行を連続的に無限に反復すれば、ついには少なくとも円弧へと近づいていくからである。私が反対這行と呼ぶのは、ある弧が自分自身の上を逆向きに這行する場合、這行の開始において両端の端点が互いに反対側で接するような場合である。この方法によれば、与えられた弧は、最初の這行によって、私のいうところの同じ振幅をもつ別の弧へと変化するが、それは相似で等しい二つの弧から成るものとなる。さらに、これらが今度は反対這行によって互いの上を重なり滑動するならば、相似で等しい四つの弧から成る弧が生じ、したがって円弧の丸みにいっそう近づくことになる。第三の反対這行を行えば、相似で等しい八つの弧をもつ弧が形成され、各段階で同一の振幅を保ちながら、ますます円弧そのものへと近づいていくのである。ここでさらにただ一つ付け加えておく。円への直接的な近似にこの方法を適用するためには、短軸の長さが任意に小さい楕円を用いることができる。このような楕円は、実際には、二重に重なった直線にほかならない。これを楕円の場合と同様に這行運動によって動かすならば、四膨隆曲線の代わりに正方形の 4 辺が得られ、次いで八膨隆曲線の代わりに

ベルリン論文集、
第 1 巻、P.180

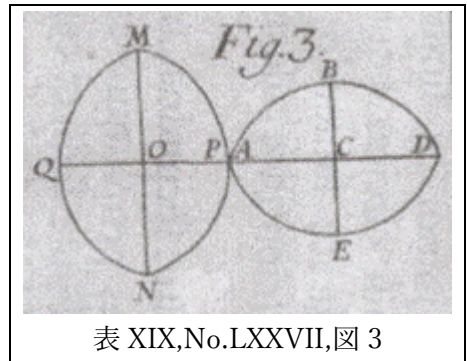
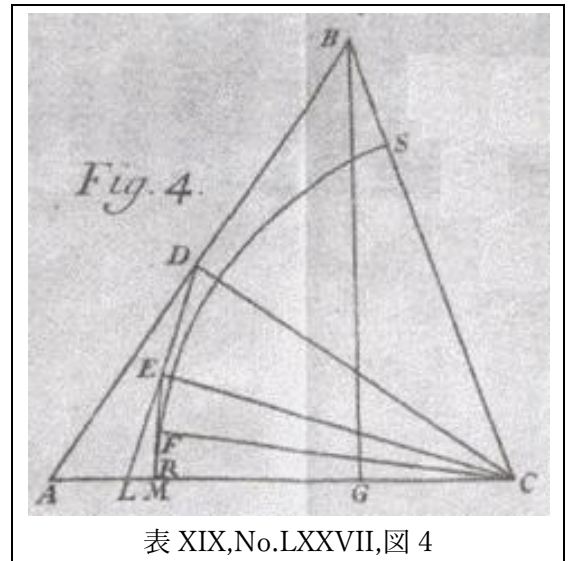


表 XIX, No. LXXVII, 図 3

八角形の周が得られることになる。楕円が直線へと移行していくにつれて、多膨隆曲線もまた正多角形へと移行し、そしてこれらはいずれには円へと至るのである。このことは、与えられた直線に等しい円弧を、連続的かつ迅速に近似して構成するという、この簡単な方法を私に与えた。いま、直線 BG が他の直線 AC に垂直であるものとして与えられているとする。任意に直線 BA を引き、点 A における角に等しい角 ABC を作れば、二等辺三角形 BCA が得られる。次に、AB に垂線 CD を引き、さらに CD に等しい長さとして CL を取る。ついで DL を結び、この DL に垂線 CE を下ろし、この CE に等しい長さとして CM を切り取る。さらに EM を結び、次に垂線 CF を引く。この操作を無限に続け、これらの垂線の最後のものを CR とする。すると、半径 CR をもって描かれる円弧 RS は、与えられた直線 BG に等しくなる。もっとも、その後に私が気づいたところでは、点 B, D, E, F, … はディオストラトスの四分線上にあるのであり、これは確かに簡単に証明できる。したがってこの点に関しては、私が何か新しいことを成し遂げたわけではない。円の長さの直線化が四分線とその直径との交点の決定に依存することは、すでに古くから知られているからである。しかし、この方法にはなお特異な点がある。ここでは CD, CE, CF, … が垂線であることにより、四分線上の点 D, E, F, … がより確実に指定されるのであり、その結果、最終点 R も、通常の方法による場合よりはるかに精密に定められる。従来の方法では切断が次第にいつそう斜めになるため、四分線上の点はいずれには非常に不確定なものになってしまうからである。しかし、この件についてどうであれ、私には次の点が優雅であり、決して軽視すべきでないものと思われる。他の人々によってすでに発見され、しかもある種の特別な成果として喧伝されてきたこの事柄が、実は我々の発見にとっては、ただごく小さな一つの系にすぎないという点である。



No. LXXX

引用・抜粋

1709 年 4 月 15 日、バーゼルにて記されたベルヌーイの書簡より。

私はこの主題（這行運動および多膨隆曲線について）を繰り返し考察し、発展させ、驚嘆すべき定理を発見した。楕円の周長を円周によって捉えるための限界（近似境界）をさらにいつそう押し進めただけでなく、望むところ

ベルリン論文集、
第 1 巻、P.183

までそれを推し進めることができ、しかも確定的で簡単な法則をも見出したのである。そして私は（まもなく付記する予定の）幾何学的定理だが、これは君の称賛に値するであろうものであって、任意に近く互いに等しく取り得る二つの円を与える。しかもそのうち一方の円周は与えられた楕円の周長より大きく、他方の円周はそれより小さいのである。しかしさらに、これよりもはるかに一般的な定理が私のもとに備わっている。それは、任意に与えられた曲線を、互いにいかにでも近接した二つの円弧の内に挟み込むことに関するものであり、しかもそれを即座に行えるのである。さて、まず定理を述べよう。半円弧 A4B を考え、その直径 AB は、ある楕円の半軸 AC および BC から合成されているものとす

る。この半円弧を、連続して2,4,8,16,⋯とさらに望むだけ多くの等しい部分に分割する。点Cから分割点のうち奇数番の点1,3,5,7へ引いた線分について、その算術平均 $[(C1+C3+C5+C7):4]$ を取り、これをMと名づける。また、点Cから分割点のうち偶数番の点2,4,6へ引いた線分に、さらに半径R、

ABを加えたものについて算術平均 $[(C2+C4+C6+R):4]$ を取り、これをNと名づける。すると、

MおよびNは二つの円の半径となり、そのうち前者の円周は与えられた楕円の周長より大きく、後者の円周はそれより小さくなる。これら二つの円は、多膨隆曲線であって楕円の周長に等しい曲線に対する外接円および内接円なのであり、その膨隆の数は、分割数の2倍に等しくなるからである。したがって、もし半円弧A4Bを八等分するならば、MおよびNは、楕円に等しい十六膨隆曲線に外接する円および内接する円の二つの半径となる。さらに一例として、楕円の軸の比が5:4であると仮定すると、計算によればMとNの比は6000001:6000000よりもさらに小さい比になることが分かった。

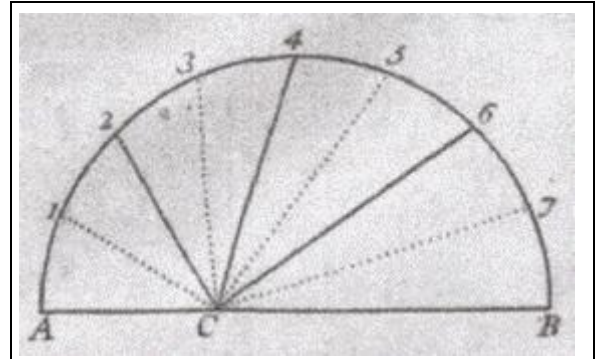


表 XIX, No. LXXVII, 図 5

No. LXXXI

曲線の長さについて

著者 ヨハン・クレイグ

補助命題

二つの平方数の和を、他の二つの平方に分解すること。

dz^2, ds^2 を二つの与えられた平方とし、その和 $dz^2 + ds^2$ を、他の二つの平方 dx^2, dy^2 に分解すべきものとする。また m および n を任意に取る二つの数とする。さて問題の条件より、 $dz^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$ である。したがって（ディオファントスにより知られているように）、次のようになる。 $dx = ((mm - nn)dz + 2mnds) : (mm + nn)$ 、 $dy = ((nn - mm)ds + 2mndz) : (mm + nn)$ 。以上が求めるところである。（証明終わり）

王立協会紀要の第 314 号（1708 年 3 月、4 月号）、第 4 論文、P.64
ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum の 1710 年 8 月号 P.352

問題

任意に与えられた曲線（それが代数曲線であれ超越曲線であれ）と同じ長さをもつ無数の曲線を作ること。

Z, S を与えられた曲線の座標とし、 x, y を、これと同じ長さをもつ求める曲線の座標とする。すると、曲線の微小要素より $dz^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$ が成り立つ。ゆえに、前の補題によって、 $dx = ((mm - nn)dz + 2mnds) : (mm + nn)$ 、 $dy = ((nn - mm)ds + 2mndz) : (mm + nn)$ となる。積分すれば、 $x = ((mm - nn)z + 2mns) : (mm + nn)$ 、 $y = ((nn - mm)s + 2mnz) : (mm + nn)$ となる。このようにして、求める曲線の一つの座標 x, y が明らかになる。同様にして、この一つの曲線から第 2 の曲線が作られ、第 2 から第 3 が作られ、この方法を続けると無数の曲線を作ることができることになる。

（証明終わり）

ここでは例はあげない。のちに（神の御心が許せば）より適切な機会が与えられ、この方法をこの種のより多くの問題へと拡張し、かつ本問題の解法を具体例によって明らかにすることになるからである。しかも、私はこの解法を一度ならず繰り返し、きわめて明瞭に示してきたので、この分野に通じた者であれば、誰でも以下に付される本問題の特殊な場合の解法から、簡単に導き出すことができるであろう。提示された曲線は代数曲線であり、しかもそれは 1704 年 1 月の王立協会紀要（No.LXXIII.を参照）において私が示したものである。これは、この問題の提起者である著名なヨハン・ベルヌーイ氏に対し、その解が、とりわけよく知られた逆微分計算の方法によって得られることを明らかにするためであった。彼は私的な書簡の中でチェイン氏に対し、同曲線是我々が 1703 年 3 月に同紀要に公表した定理によっては表すことができない、と述べていたからである。そして、1705 年 8 月の Acta Eruditorum（No.LXXIV を参照）から、先に示したその解答（前述の目的には十分すぎるほど適合していたものである）が、その博学の氏に気に入らなかったことを知ったので、私はここに、いかなる反論にもさらされないこの解法を、公に公表する。したがって、著名なるベルヌーイ氏は、曲線変換に関する彼自身の問題ほど、積分計算からより簡単に解き出される問題はほとんど存在しない、ということをも認めるしかないのである。

しかし、ベルヌーイ自身の解法において不満とする点を、簡潔に述べておこう。第 1 に、それを代数曲線のみにしか適用していないことである。第 2 に、その方法が純粋に機械的であり、彼のいわゆる這

行運動に全面的に依存していることである。確かに、ヒュイヘンスは進展運動を発見した功は不朽の榮譽に値する。彼自身およびその後の人々が、そこから幾多の卓越した定理を幾何学的に導き出したからである。しかし、ライプニッツの牽引運動も、ベルヌーイの這行運動も、ヒュイヘンスの進展運動と同等の扱いはありえない。ヒュイヘンスと同様に、これら著名な学者たちが、自らの運動によって生成される曲線を幾何学的法則へと還元しないという条件付きではあるが。

No. LXXXII

引用・抜粋

1709年1月9日、ヨハン・ベルヌーイからバーネット氏に宛てた書簡より。

私はかつて、ある数学者が私に提示した問題、与えられた曲線を長さが等しい別の異なる曲線へ（代数曲線を代数曲線へ）変換するという問題を提起し、あわせてその解法が私の手元にあることをほのめかしておいた。この問題の解を自ら与え得ると考えたクレイグ氏は、その解を1704年1月および2月のロンドン学術紀要

ベルリン論文集、
第1巻、P.184

（No.LXXIII.を参照）に掲載し、その後それは1705年4月のライプツィヒ学術誌にも転載された。しかし、同年8月の学術誌（No.LXXIV.を参照）において、私自身の解法を提示した際に示したように、クレイグ氏はその原理を仮定にして求めてしまっている。彼は自らの解法を、その問題そのものと同等、あるいはそれ以上に困難な公準の上に基礎づけているからである。彼は、二つの平方の和を、常に容易に、辺が可積分の（求積可能な図形の縦座標）ような二つの別の平方に分解できる、と仮定しているのである。クレイグ氏は、3年が経過したのち、ついに自らの公準を満たそうとして、1708年3月および4月のロンドン学術紀要にある小論を掲載したが、そこではさらに大きな間違いを犯している。彼は先の曲線に等しい新たな曲線を提示していると考えているが、実際には、単に同一の曲線を別の軸に合わせて表し直したにすぎないからである。もしクレイグ氏の解法が正しいものであったなら、その創案者は彼が最初というわけではなかったであろう。この問題は誤りに陥りやすい箇所であり、かつてはその解法の見かけの妥当さと単純さに、私自身も欺かれたことがあるからである。そのことについては証人となる友人たちもいるが、私はほどなくしてその間違いを見抜いた。さらにまた、モワヴル

（MOIVRAUS）氏も3年前にこの誤った解法に陥り、あやうくそれを公表するところであった。しかし彼は自らに疑念を抱き、まずそれを私に示し、私の指摘によって誤りを認めて公表を差し控えた。ところがクレイグ氏は、自らの解法がいかなる反論にもさらされないものだとか然と断言するばかりか、私の這行運動による方法さえ軽視している。しかもそれは、私が最も高く評価している自らの発明の一つであり、ライプニッツ氏、ニュートン氏、その他の理解ある学者たちでさえ十分には評価しきれなかったものである。さらに私はこの方法の力によって、円積問題（円の求積）よりもはるかに優れたある成果を見いだした。任意の曲線を、それに等しい円周へと、望むだけ近くまで還元する一般的方法である。しかもクレイグ氏が、私の解法を運動に依存するものとして機械的であると断じるのは、まったく当たらない。その方法は解析計算へと還元することが可能であり、さらに与えられた曲線が代数的であるならば、生成される這行曲線もまた同様に代数的となるからである。

No. LXXXIII

断片的な抜粋

一般対数術より。著者ヨハン・クレイグ。

ここでついでに読者に注意しておきたいのは、曲線の長さに関する問題について私が行った解析が1708年の王立協会紀要（No.LXXXI.を参照）に公表されているが、そこから得られる曲線は、提示された曲線と同一であるということであ

王立協会紀要の第323号（1710年10月）、第3論文、P.195

ライプツィヒ学術誌 Acta Eruditorum
の1713年7月号 P.325

る。私は、正しく構成された解析そのものにのみ関心を向けていたため、提示された曲線と自ら得た曲線とのこの一致には、まったく気づいていなかった。ところがこの点について、きわめて著名なヨハン・ベルヌーイ氏が、王立協会会員ギヨーム・バーネット氏に宛てて送った書簡の中で私に知らせてくれたので、はじめてそれを知ったのである。彼が自らの這行運動に関して私が提出した異論に対し、十分に応答したことを、私が尊ぶ純粋な真理への愛ゆえに、私は喜んで認める。

No. LXXXIV

手紙

ヨハン・ベルヌーイからモンモール氏へ

拝啓

あなたの見事な著書を、前回のお手紙（「賭博に関する解析試論」、パリ、1708年、四折判）からずいぶん後になってようやく受け取りま

「賭博に関する解析試論」
第2版、パリ、1713年
四折判、P.283

したので、それを受領して読了するまではお返事を差し控え、内容について自分の意見を申し上げられる状態になってから書こうと思いました。眼の炎症にしばしば悩まされており、とりわけ冬のあいだは長い計算を要する事柄に多く取り組むことが妨げられてしまうのですが、それでもなお、暇を見つけてご著書の主要な箇所を検討し、また自分の眼の衰えが許すかぎり、ほとんどの問題について自ら計算を行いました。実際のところ、私はその中に、理論的考察の面で非常に美しくかつ興味深い事柄を数多く見出し、また状況に応じてそこから引き出すことのできる実用上の点でも有益なものを認めました。しかし、あなたのご著作を読みながらあちこちで私が個別に行った所見について、あなたがそれをお望みとのことですので、ここにそれらをお伝えいたします。

あなたが採用しておられる一般的な方針、ある事象や別の事象が起こり得る場合の数をまず求めるという方法は、きわめて確実で適切なものです。しかし、計算する者の分別として、必要以上に場合の数を増やし、必然の範囲を越えてまで、長大で煩雑な計算にしないようにすべきです。例えば、300個のチップ（その中には白・黒・赤がそれぞれ同数含まれている）があるとして、ピエールがポールに対し、その中から白いチップを引くことに賭けるとする。両者の勝負の比率を知るために、ピエールが勝つ場合が100通り、負ける場合が200通りあると言う必要はない。各色が引かれる可能性は無差別であり、同じ容易さで引かれるのだから、厳密には考慮すべき場合は三つ、白・黒・赤にすぎないからです。したがって、同じ簡単さで起こり得る異なる色の数に着目する方が、チップの個数そのものに着目するよりも適切です。各色の個数が等しい以上、その多数性は賭ける者たちの勝敗の比率を少しも変えるものではなく、その比は常に1対2です。しかし、あなたはこの点をあまり注意深く観察していないように思われる。ここにいくつかの例を挙げます。あなたのご著書のP.8、ファラオンのゲームについての箇所で、手元に4枚のカードを持つ銀行側の有利不利を求めるにあたり、その中にポンテの札が一枚含まれている場合について、あなたは4枚のカードの全24通りの配列を数え上げ、そこから銀行側に有利なものを取り出しておられます。しかし、場合の違いを生むのは、厳密にはさまざまな配列そのものではなく、むしろ他の札の中におけるポンテの札の位置の違いにすぎない、という点への考察がなされていません。したがって、あなたのいう24通りの配列の代わりに、私が考慮すべきは次の4つの変化だけです（ここで a をポンテの札、 b をその他の各札とします）。

1.bbba、 2.bbba、 3.babb、 4.abbb

これら四つの変化のうち、第1の場合は銀行側にとって有利でも不利でもなく、第2および第4の場合は銀行側の勝ちとなり、第3の場合は銀行側の負けとなります。したがって、その期待値は

$$(1 \times A + 2 \times 2A + 1 \times 0) : 4 = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A \quad (A \text{ は賭け金を表す}) \text{ になります。さらに、もしポンテの札}$$

が銀行側の手札の中に2枚含まれているならば、考慮すべき変化は、24通りの配列ではなく、次の6通りになります。

1.bbaa、 2.baba、 3.abba、 4.baab、 5.abab、 6.aabb

第1、第3、および第5の場合は銀行側の勝ちとなり、第2および第4の場合は銀行側の負けとなります。また第6の場合には、銀行側はポンテの賭け金の半分を受け取る。したがって銀行側の期待値は

$\left(3 \times 2A + 2 \times 0 + 1 \times \frac{3}{2}A\right) : 6 = \frac{5}{4}A = A + \frac{1}{4}A$ となり、やはりあなたの求めた結果と一致します。もしポンテの札が銀行側の手札の中に3枚含まれている場合には、その変化の数は、ポンテの札が一枚だけ含まれている場合と同数であることは明らかです。単に文字 a と b を互いに入れ替える置換を行えばよいからです。

1.baaa、 2.abaa、 3.aaba、 4.aaab

ここから再び、銀行側の期待値が $A + \frac{1}{4}A$ となることが導かれます。このように場合を分類する方法によれば、銀行側が手に持つカードの枚数を p と表すとき、ポンテの札がその中にただ1枚だけ含まれているならば、銀行側の期待値は $\frac{1}{p}A$ となることが簡単に分かります。ポンテの札が銀行側の手

札の中に1枚より多く含まれている場合でも、事情はほとんど変わりません。本来検討すべきすべての配列は、カードの枚数が中程度であってもその数が膨大になるのに対し、ここでは単に二つの文字 a, b の変化の数だけを考えればよいからです。そしてその数は、ポンテの札の枚数に等しい個数の対象を、全体のカードの中から異なる仕方を取り出す組合せの数に常に等しくなります。さらに、これらの組合せの数は、すべての配列の総数よりもはるかに小さいため、その中から銀行側を完全に、あるいは部分的に勝たせる場合を選び出すことは簡単であり、したがって銀行側の期待値を定めることができます。例えば、銀行側に6枚のカードを与え、その中にポンテの札が2枚含まれていると仮定します。この仮定のもとでは、あなたがしたように、6枚のカードが取り得る720通りのすべての配列を検討する必要はまったくありません。私は、文字 a が2回、文字 b が4回現れることによって生じ得る15通りの変化を単に順に考察すれば十分だと考えます。

1.bbbbaa、 4.babbba、 7.bbbaab、 10.bbaabb、 13.baabbb
2.bbbaba、 5.abbbba、 8.babbab、 11.bababb、 14.ababbb
3.bbbaab、 6.bbbaab、 9.abbbab、 12.ababbb、 15.aabbbb

これら15の変化のうち、7つは銀行側に全額を与え、2つは銀行側に自分の賭け金に加えてポンテの賭け金の半分を与え、残りの6つは銀行側の負けになります。したがって、銀行側の期待値は

$\left(7 \times 2A + 2 \times \frac{3}{2}A + 6 \times 0\right) : 15 = \frac{17}{15}A = A + \frac{2}{15}A$ になり、あなたが求めた結果と一致します。同様に、

ポンテの札が銀行側の6枚のカードの中に3枚含まれている場合でも、文字 a と b がそれぞれ3回ずつ現れる配置の仕方は、20通りしかありません。これらを整理して計算すれば、銀行側の期待値が

$A + \frac{3}{20}A$ となることが明らかになります。この原理に従って、銀行側の手の中にあるカードの枚数がい

かなる数であれ、またその中にポンテの札が何回含まれていようとも適用できる一般式を、私は導きました。しかもそれは、あなたが一般式にしているように、 $p-2$ 枚の場合における銀行側の期待値が既知であると仮定することなく求められます（そのあなたの公式も、私自身きわめて容易に導くことができましたが）。さて、以下に私の公式を示します。 $1.2.3.4 \cdots (p-q) = m$,

$(q+1) \cdot (q+2) \cdot (q+3) \cdots p = n, (p-q+1) \cdot (p-q+2) \cdot (p-q+3) \cdots p = l$ とおく。このとき、 q が偶数であるならば、銀行側の期待値は $\frac{m}{2n} \times \left(1 + \frac{(q-1)q}{1.2} + \frac{(q-1)q(q+1)(q+2)}{1.2.3.4} + \frac{(q-1)q(q+1) \cdots (q+4)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots + \frac{(q-1)q(q+1) \cdots (p-2)}{1.2.3.4 \cdots (p-q)} \right)$ によって表されます。あるいは、次の式によっても表すことができます。

$$\frac{(q-1)q}{2l} \times (1.2.3 \cdots (q-2) + 3.4.5 \cdots q + 5.6.7 \cdots (q+2) + \cdots + (p-q+1) \cdot (p-q+2) \cdots (p-2))$$
 しかし、もし q が奇数であるならば、前述の期待値は

$$\frac{(q-1)m}{2n} \times \left(1 + \frac{q \cdot (q+1)}{1.2.3} + \frac{q \cdot (q+1) \cdot (q+2) \cdot (q+3)}{2.3.4.5} + \cdots + \frac{q \cdot (q+1) \cdot (q+2) \cdots (p-2)}{2.3.4 \cdots (p-q)} \right)$$
 になります。または別の形として、

$$\frac{(q+1)q}{2l} \times (2.3.4 \cdots (q-1) + 4.5.6 \cdots (q+1) + 6.7.8 \cdots (q+3) + \cdots + (p-q+1) \cdot (p-q+2) \cdot (p-q+3) \cdots (p-2))$$
 によっても表すこともできます。ここで注意すべきは、数 p と q は任意に取りうるが、 q は少なくとも 3 以上でなければならないという点です。これらの一般公式が、あなたが P.24 および P.25 で個別の場合について与えている公式と一致するかどうか、検討していただきたい。

さて、ここまでファラオン (Pharaon) の遊戯について述べてきたことは、同様にバセット (Basset) の遊戯 (P.66 以下) にも当てはまります。銀行側にとって有利な場合や不利な場合を計算する際、銀行の手元にあるカードのあらゆる並びを一つ一つ細かく調べ上げる必要はなく、上で行ったのと同じように、ただ二つの文字 a と b の変化だけを用いれば十分です。では、これらの話題から離れて、次の事柄に移ります。

P.32, 15 行において、ランスケネ (Lansquenet) の遊戯で手番を持つことの有利さについて論じる際、あなたは、この有利さは無限個の項から成り、しかも次第に小さくなっていく級数によってしか表すことができず、ピエールの有利さの正確な値を決して得ることはできないと述べております。これを書かれた当時には、この級数がつねに幾何級数として進んでいくものであるという点に、まだ気づけなかったように思われます。したがって、この級数は無限に続けられるとしても、その和は一般に知られている通常の規則によって、簡単に求めることができます。たとえば、あなたが P.35 で与えている級数は、和を求めることのできるものです。にもかかわらず、なぜ多数の項を加えて正確な値に近づけようとする必要があるのでしょうか。その値は瞬時に、しかも簡単に正確に求めることができ、実際には $\frac{1125}{4024}$ に等しいからです。これは $\frac{1}{4}$ よりも大きく、あなたが近似値として挙げている $\frac{4}{17}$ よりも真の値に近いことになります。とはいえ、これらがすべて項の総和を与えうる等比的な級数であることに、あなた自身も最終的には気づかれたように見受けられます。P.51 では、カットする側の有利および不利の値を正確に示しているからです。ここで、どのような種類の遊戯であっても、手番を持つ者が勝つかぎりその手番を繰り返し、負けるまで続ける場合の有利さを表す一般的な式を示しておきます。各回の手で得る利得を a 、勝ちとなる場合の数を m 、負けとなる場合の数を n とします。さらに $m : (m+n) = p$ とおくと、その人の全体の利得は $a + pa + p^2a + p^3a + \cdots$ という級数で表されます。この級数の和は $a : (1-p) = (m+n)a : n = a + ma : n$ になります。なお、この結果は等比級数を用いなく

でも、代数的な方法によって同様に導くことができます。では、そのやり方を述べます。各プレイヤーの賭け金を z とすると、手番を持つ者の最初の勝負における期待値は $(m \times z + n \times 0) : (m + n) = 2mz : (m + n)$ となります。したがって、その有利さは $2mz : (m + n) - z = (m - n)z : (m + n)$ と表されます。ゆえに、各回の手における利益を a とすれば、 $z = (m + n)a : (m - n)$ という関係になります。このようにして各プレイヤーの賭け金が定まったとして、つぎに、ピエールが勝つかぎりカードを持ち続ける権利から生じる総利益を x とおきます。すると、彼がゲームを始めるとき、 m 通りの場合では相手の賭け金を得るとともに、さらにゲームを続けることによる総利益 $(m + n)a : (m - n) + x$ を得ることになります。一方、 n 通りの場合では自分の賭け金を失い $(-m - n)a : (m - n)$ の被害になります。したがって、 x はこれらの場合の平均として

$x = (m((m + n)a : (m - n) + x) + n(-m - n)a : (m - n)) : (m + n)$ という等式で表されます。この式を整理すると、総利益は $x = (m + n)a : n = a : ma : n$ となり、上で得た結果とまったく同じになることが分かります。さて、この方法は級数によるものよりもいっそう扱いやすく、ピエールが1度負けてもゲームが終わらず、手番が互いに交代しながら無限に続く場合でも、同様に容易に彼の有利さを求めることができます。最初に手番を持つピエールの利益を t とすると、 m 通りの場合には相手の賭け金と再開による利益 $(m + n)a : (m - n) + t$ を得て、 n 通りの場合には賭け金を失い、ちょうど相手が開始時にいたのと同じ状態 $(-m - n)a : (m - n) - t$ に置かれることになります。この関係から得られる等式を整理すると $t = (m((m + n)a : (m - n) + t) + n((-m - n)a : (m - n) - t)) : (m + n) = (m + n)a : 2n$ となり、ゲームが無限に続くとは仮定した場合のピエールの有利さは、手番を失った時点で直ちに終わると仮定した場合のちょうど半分に過ぎないことが分かります。あなたが、このもう一つの仮定における利益を求めておられないことに、私は少し驚いております。この仮定こそが、より自然であり、また実際の遊戯者の意図にもいっそう適しているように思われるからです。彼らは、最初に手番を持つ者がそれを失った時点でただちに勝負を終えるつもりでゲームを始めるのではなく、むしろ手番の権利を互いにかなり多くの回数にわたって交代させることを念頭に置いているのであり、そのゲームは実質的に無限に続くものと見なして問題ないからです。

P.59,L.26 ここであなたが、トレーズのゲームにおいて手番を持つピエールの期待値を決定するために

与えている数列 $\left(1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \dots\right)$ は、たいへん美しく、かつ興味深い

ものです。それは P.58 の一般公式から簡単に導き出すことができます。私もまたこの公式を見いだしましたし、さらに別の公式も見つけましたが、それによって符号の変更を用いることなく同じ数列ができました。その方法は、カードの先行する各数の期待値が既知であると仮定するものです。すぐにお分かりになるでしょう。求めるべきピエールの期待値を S とする。ピエールの持つ札の枚数を n と表すとき、その枚数が $n-1$ の場合の彼の利益を t 、 $n-2$ の場合を s 、 $n-3$ の場合を r とし、以下同様に続けると、

$S = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} - \frac{t}{1} - \frac{s}{1.2} - \frac{r}{1.2.3} - \dots - \frac{0}{1.2.3 \dots n}$ になります。これは一つの定理と見

なして問題ないと思います。あなたの数列の方が、まず S の値を直接求めるのにより適しているからで

す。

P.63, L.13 行で、あなたは $x = \frac{1}{2}(4A+S) + \frac{1}{2}A$ としていますが誤りです。正しくは $x = \frac{1}{2}(4A+S-A) + \frac{1}{2}A$ とすべきです。したがって、ピエールの利益は $\frac{2}{3}A$ ではなく $\frac{1}{3}A$ になります。同じ理由で、P.64, L.11 から末尾までにおいて、あなたが「ピエールの利益は $2A + \frac{16}{57}A$ になる」と述べているのも正しくありません。私の計算では $A + \frac{16}{57}A$ にしかありません。

P.80、パスカル氏ご自身でさえ、その表（よく知られている「算術三角形」のことであり、パスカル氏の論考の三角形）のあらゆる用い方を十分に把握していたわけではないように思われます。ここで触れていない最も美しい性質の一つは、縦の列が 2 項式のベキ係数を表しているという点です。任意のベキ指数を p とすると、 $(a+b)^p = 1a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-3}b^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}a^{p-4}b^4 + \dots$ と表されます。これは私が以前、まったく独自の方法によって見

いだしたもので、その証明を故ロピタル侯爵にもお伝えしました。あなたが挙げている彼の遺著（解析的円錐曲線論、パリ、1707 年刊、四つ折判）の P.92 の箇所にも、そのことがいくらか見て取れます。

P.158, 159、あなたはホイヘンス氏の第 2 問題（「賭博における推論について」最終頁。3 人 A、B、C が、白 4 個・黒 8 個から成る 12 個のチップを用いる。彼らは次の条件でゲームを行う。目隠しをしてチップを引き、最初に白いチップを引いた者が勝者となる。また、最初の抽選は A、第 2 は B、第 3 は C が行い、その後は再び A、そして同様に交代で続けていく。問題は、3 人の勝つ確率はどのようになるか）を解いたと主張していますが、実際のところ、それはあなたがこの問題に与えている解釈の意味においては確かに解かれています。各プレイヤーが黒いチップを一つ引いたとき、それをすぐに壺に戻し、次の人の番のときにも常に 12 個のチップが完全に揃っているものと仮定する、という解釈です。このように仮定すれば、問題は非常に簡単になり、3 人のプレイヤーの取り分は $9 \cdot 6 \cdot 4$ の比になり、これはあなたが得た結果と同じです。しかし、ホイヘンスはこの問題を別の意味で提起していたように思われます。その解釈のほうが、むしろ自然であるように見えます。黒いチップを引いた場合には、それを壺の中に戻さないとするのです。したがって、最初の引き手が黒いチップを引いて外したなら、次に引く第 2 の者には 11 個のチップしかないことになります。さらに第 2 の者も外せば第 3 の者には 10 個のチップしか残っていない状態で引くことになります。そしてこの第 3 の者も同様に黒を引けば、次に再び引き直す第 1 の者には 9 個のチップしか残されない、このように順次続いてゆきます。この意味で問題を理解すると、問題はやや難しくなり、計算もいっそう長くなります。試しにそれを計算してみてください。私と同じ結果になるかどうかを見るために。私はこの問題の解答を、問題の提示のすぐ後に「賭博における推論 (De Ratiociniis in Ludo Aleae)」の中に、もう 12 年も前に記載しました。それを参照すると、3 人のプレイヤーの取り分の比として、 $77 \cdot 53 \cdot 35$ という 3 つの数を書いているはずです。

P.137、(任意の個数 p 個のサイコロ（各々の面の数は好きなだけあってよい）が与えられているとき、1 の目が b 回、2 の目が c 回、3 の目が d 回、4 の目が e 回、等のように出る場合の確率を求める問題) 私は、より簡単に表現でき、理解もしやすい形で表される一つの公式を発見しました。確定した

場合の数は $(1.2.3.4 \cdots p) : (1.2.3 \cdots b \times 1.2.3 \cdots c \times 1.2.3 \cdots d \times 1.2.3 \cdots e \times \cdots)$ (現代表記 $\frac{p!}{b!c!d!e!\cdots}$) で

与えられます。言い換えれば、それは一つの分数に等しく、その分子は p で表される多数の配列の総数であり、分母は b, c, d, e など表される各多集合の配列数の積です。この公式が、私がかつて発見した方法を正確に表しているという点は注目すべきです。その方法とは、任意の多項式を任意のベキに展開したとき、望む任意の項の係数を決定するためのものです。これは以前、ライプニッツ氏から私に提起された問題でもあり、私が彼に与えた解法を彼は大いに認め、また多項式を高いベキに計算するのに有効と考えました。多項式 $(t+x+y+z+\cdots)^p$ を考え、 $b+c+d+e+\cdots=p$ として、項 $t^b x^c y^d z^e \cdots$ の係数を求めるとき、その求める係数は前述のように

$(1.2.3.4 \cdots p) : (1.2.3 \cdots b \times 1.2.3 \cdots c \times 1.2.3 \cdots d \times 1.2.3 \cdots e \times \cdots)$ となります。

しかしサイコロの問題に立ち戻って、ある個数のサイコロによって、ある目がいくつ、別の目がいくつ、等々というように出る未定の場合の数がいくつあるかを知るためには、次のようにします。先に述べた分数の値を v と名づけると (ここで R を各サイコロの面の数とする)、 v に $R \cdot (R-1) \cdot (R-2) \cdot (R-3) \cdots$ という積を掛けます。ただしこの積は、指数の個数と同じだけの項になるまで続け、そして、もし等しい指数が三つあるならその積を $1 \cdot 2 \cdot 3$ で割り、もし四つ等しい指数があるならさらに $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ で割る。以後も同様に、同じ指数があるごとにその個数の階乗で割るのです。

P.159, P.160、あなたがここで第3および第4の問題として挙げている二つの問題は、ホイヘンスの著作では第4および第3の順になっています。(ホイヘンスの著作「賭博における推論について」末頁。12個のチップを用い、そのうち4個が白、8個が黒であるとする。A (ピエール) は B (ポール) と賭けを行い、目隠しをしてその中から7個の石を取り出すとき、その中に3個の白石が含まれるであろう、と主張する。問題は、Aの取り分とBの取り分との比はいかなるものになるかということである。) さて、そのうちのこの問題、すなわちホイヘンスの順序では第4、あなたの本では第3に当たるものについては、ピエールが「これから取る7個のチップの中に、ちょうど3個の白がある (多くも少なくもなく)」という条件で賭けていると解釈するかぎり、確かによく解かれています。実際、私もこの仮定のもとでは、ピエールの取り分はポールの取り分に対して35対64、あるいは280対512になると計算しました。しかし、もしピエールが4個の白を引いた場合にも勝ちと数えるべきだとすれば、これはホイヘンスの言葉「その中に3個の白があるであろう」の真の意味により近いように思われますが、ここには「少なくとも」という言葉を補うべきです。ピエールが12個の中から取る7個のチップの中に、少なくとも3個の白を引くことを約するものと解釈するなら、この意味で問題を理解した場合、ピエールとポールの取り分は14対19になります。

P.162、あなたがここでホイヘンス氏の問題5として提示している命題は、彼の問題にまったく異なる意味を与えており、もはや同じ問題ではありません。このきわめて大きな相違を示すために、ここで両者の提案された問題について、それぞれの一般的な明確な解を与えましょう。ホイヘンスの条件に従い、各プレイヤーが最初に取るジェットンの数を n 、ピエールがポールから1個のジェットンを得る勝ち方の数を a 、逆にポールがピエールから1個のジェットンを得る勝ち方の数を b とします。このとき、両者の期待値は a^n と b^n に比例します。したがって、いま問題となっている特別な場合、すなわち3個のダイスの例では、 $n=12$ 、 $a=27$ 、 $b=15$ であり、 $a:b=27:15=9:5$ となります。したがって、ピエールの期待値はポールに対して $9^{12}:5^{12}=282429536481:244140625$ となります。あなたは、おそらく、これら二つの大きな数が、実は9と5の12乗にほかならないということに気づいていないのでは

ないでしょうか。しかし、あなたの命題の条件に従って、改めて n をどちらか一方のプレイヤーが最初にそれだけ勝てば試合に勝つことになるジェットの数、最初に分配者ジャックが手に持っているジェットの半数と呼ぶことにしましょう。さらに、 a をピエールに有利な出方の数、 b をポールに有利な出方の数とします。私は、両プレイヤーの期待値は、2 項式 $a+b$ を $2n-1$ 乗に展開したときの項を 2 つの半分に分け、それぞれの半分の項の総和によって表されると考える。例えば $n=3$ の場合、ピエールとポールの期待値は、 $(a+b)^5$ の最初の 3 項の和と最後の 3 項の和の比に等しいはずで、つまり、

$a^5 + 5a^4b + 10a^3bb$ と $b^5 + 5b^4a + 10b^3aa$ に対応する部分であり、このように一般に、 $2n-1=p$ とおけば、これら二つの級数 $a^p + \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2}a^{p-2}b^2 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{p-3}b^3 + \dots$

$$b^p + \frac{p}{1}b^{p-1}a + \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2}b^{p-2}a^2 + \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^{p-3}a^3 + \dots$$

を、それぞれ項数が n になるところまで続けて足し合わせたものが、ピエールとポールの期待値の比になります。我々の特別な場合、 $n=12$ かつ $a:b=9:5$ のときには、これら二つの級数

$$9^{23} + \frac{23}{1}9^{22}5 + \frac{23 \cdot 22}{1 \cdot 2}9^{21}5^2 + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3}9^{20}5^3 + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}9^{19}5^4 + \dots$$

$$5^{23} + \frac{23}{1}5^{22}9 + \frac{23 \cdot 22}{1 \cdot 2}5^{21}9^2 + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3}5^{20}9^3 + \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}5^{19}9^4 + \dots$$

のそれぞれから 12 項ずつを取らなければなりません。そうすると得られる二つの数はきわめて巨大なものとなり、私の推測では、少なくとも前者は 25 桁以上の数になるでしょう。もしあなたが実際に計算してみたいのであれば、それは忍耐を試すに十分な仕事になります。しかし、これによって、ホイヘンス氏の第 5 問題を提示する二つの仕方のあいだに、どれほど大きな相違があるかがお分かりになるでしょう。したがって、これらは実際にはまったく別個の二つの問題であり、私はそのそれぞれについて一般的に解いておいたのです。あなたの立てた 23 個の等式が、あなた自身は問題をホイヘンスとは異なる意味で提示しているにもかかわらず、それでもなおホイヘンス氏の解と同じ結論を与えているのですから。あなたはおそらく驚かれるでしょう。しかしその理由はこうです。あなたが等式を立てる際に、実際にはあなた自身の問題設定の条件ではなく、ホイヘンスの条件に従っているからです。なぜなら、私はあなたが次のように仮定しているのを見ているからです。両者がすでに獲得したチップの差が同じであれば、それぞれの期待値も同じです。たとえば、あなたは次の二つの場合を同一視しています。ピエールが 5 枚勝ちポールが 3 枚勝っている場合、ピエールが 2 枚勝ちポールが 0 枚勝っている場合、どちらも差は「2」なので、両者の期待値は同じだと仮定しているのです。しかし、この仮定は正しくありません。あなたが与えた意味で問題を解釈するならば、この仮定は成り立たないのです。

P.177,L.12・13、「より少ない点数を必要としている者に」、ここで、ピエールのほうが不足点数が少ないと限定しているのは、特に必要ではありません。あなたの示した規則は、たとえピエールのほうがより多くの点数を必要としている場合でも、同じように正しく使えます。むしろ、ピエールのほうがより多くの点数を必要としていると仮定したほうが、計算はかえって簡単になります。というのも、その場合は数列の項数が少なくなり、合計を求める手間が少なくてすむからです。さてそれ以外の点については、私はこの問題を、より一般的に、しかもより簡潔で自然な表現によって解きます。ピエールとポールが、ある不公平な（確率が等しくない）ゲームを複数回にわたって行うとします。そのゲームにおいて、ピエールに有利な場合の数とポールに有利な場合の数の比は、 $a:b$ です。しばらく試合を行ったのち、ピエールが勝利に達するまでになお必要な試合数を p とし、ポールがなお必要とする試合数を q

とします。このとき、両者の期待値の比を求めなさいという問題です。解法。二項式 $a+b$ を $p+q-1=r$ 乗します。すると、その項の総数は $p+q$ 個になります。そのうち、最初の q 個の項の和と、残りの p 個の項の和が、ピエールの期待値とポールの期待値の比になります。最初の和は、

$$a^r + \frac{r}{1}a^{r-1}b + \frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}a^{r-3}b^3 + \dots$$

$$\text{一方の和は、} b^r + \frac{r}{1}b^{r-1}a + \frac{r(r-1)}{1.2}b^{r-2}a^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}b^{r-3}a^3 + \dots$$

であり、これは項数が p になるまで続けます。 p と q が等しいと仮定すれば、ホイヘンス氏の第5問題になります。それは、あなたがP.162で提示している意味における第5問題であり、私はすでに上で詳しく述べたところです。

P.178,L.9、「ここに一つの表があります。……など。」私は、あなたがこの表の規則性と、つねに差し引きながら進めることで、どんな試合数についても一般的な表を簡単に作れることに、気づかなかったことを不思議に思います。ピエールとポールが合意して行う試合数を n とすれば、彼らの期待値の表は次のようになるからです。

表

もしピエールが0点	彼の期待値は	$n+0$	対	$n-0$
1点	...	$n+1$	...	$n-1$
2点	...	$n+2$	...	$n-2$
3点	...	$n+3$	...	$n-3$
4点	...	$n+4$	...	$n-4$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
n 点	...	$n+n$	...	$n-n$

このように、彼らの期待値は等差数列になっており、一方は増加し、他方は減少しています。実際、あなたが6回の場合について作った表は、私の一般的な表と一致しています。

7	対	5	同じ意味	6+1	対	6-1
2	...	1	...	6+2	...	6-2
3	...	1	...	6+3	...	6-3
5	...	1	...	6+4	...	6-4
1 1	...	1	...	6+5	...	6-5

P.181,L.13、それらはまったく実用的ではありません。それどころか、これは幾何級数なのだから、普通の算術書に載っている一般的な規則によって、望むだけ多くの項を、たちどころに加えることができます。したがって、項の数を b とすれば、すべての項の和は $p(m^b - q^b) : (m - q)m^b$ となります。しかしそのほかの点では、あなたが対数を用いたのは適切です。私も、およそ12年ほど前に、同様の場面で対数を有効に用いたことがあります。それは次のような問題でした。はじめワインでいっぱい満たされた樽があり、1年間、毎日一定量を取り出し、その都度、取り出した分だけ純粋な水をすぐに注ぎ足し、1年後に、樽の中にワインと水がどれだけ残っているかを求めるという問題です。この問題の解答は、私の著作「栄養について (De Nutritione)」(No.LII.を参照)の中にあります。それはなかなか興味深い問題です。その書物は、ヴァリニョン (VARIGNON) 氏があなたに渡してくれると思いま

す。私はこの問題を、次のことを理解させるために扱ったのです。毎日食物によって体内に入ってくる新しい物質と、体内にもともとあった古い物質とが混ざり合うとき、我々の身体の中にどれほどの古い物質が残っているのかを、どのようにして決定できるか、ということです。我々の身体は、絶え間ない発散によって、知らぬ間に少しずつ物質を失っているからです。

しかし、もうこれで十分でしょう。おそらく、これ以上はあなたを退屈させてしまうかもしれません。そのため、私は、計算上の誤りや印刷上の誤りについて、いくつかの箇所で見つけたものには触れないことにします。どうか、これまで私が申し上げたことを、好意的に受け取ってください。私がいつも率直さでこれらの考えをお伝えしたのは、真理を愛するがゆえです。そして何よりも、それらの意見をお求めになったのはあなたご自身であったからです。私は、あなたのご著書を高く評価しております。それは、その著者に名誉をもたらし、同時に深い洞察力と、長く困難な計算をやり抜く不屈の忍耐を示している作品だからです。もし可能であれば、ぜひその書物をさらに拡張し、より大部で内容豊かな著作にしていだきたいものです。題材は尽きることがないでしょう。とりわけ、道徳や政治の分野にまで踏み込まれるならばなおさらです。それは、私の兄がかつてその著作の中で始めていたことでもあります。どうやらその書物は世に出ることはなさそうに思われます。(1713年、「推論の技法 (Ars conjectandi)」、バーゼルにて出版、四折判) また、戦争の困難にもかかわらず、数学がますます盛んになり、さらにはフランスにおいて名誉ある学問として扱われつつあると聞き、私は喜びをもって受け止めております。私たちの国では、同じ幸運を誇ることはできません。ヘルマン (HERMAN) 氏が去って以来、私の甥と、ごく少数のほかの人々を除いて、これらの学問において大きな進歩を期待できる人物を、私はほとんど知りません。これらの学問は、金銭的利益を生むものではないと見なされているため、軽んじられているのです。あなたが論文の最後に提示された四つの問題は、いずれも興味深いものです。しかし第1の問題は、必要とされる計算があまりにも長いために、私には解くことができないように思われます。その計算は一生をもってしても終えられないほどでしょう。第4の問題については、私はその意味を理解しておりません。第2と第3の問題は、扱うことはできそうに思われますが、多大な労力を必要とするでしょう。私は、長い時間を費やして自分の通常の仕事を犠牲にするよりも、あなたからその解答を学ぶほうを選びたいと思います。というのも、私の通常の務めは、ほかの事柄に取り組む余裕をほとんど与えてくれないからです。ニュートン氏の新しい著書をぜひ早く見たいものです。その著書が印刷され次第、送ってくれると以前から約束してくれているのですが、何の知らせも受け取っておりません。あなたがそれを受け取られたなら、その中にどのような内容が見られたかを、折にふれてお知らせくださるようお願いいたします。それでは、ここで失礼いたします。

閣下に対して

あなたのきわめて謙虚できわめて従順なるしもべより

バーゼル、1710年5月17日

ベルヌーイ

No. LXXXV

手紙からの抜粋

ヘルマン氏からベルヌーイ氏へ。1710年7月12日、パドヴァにて。

拝啓。

あなたが、与えられた向心力の法則から、それらの力が描く曲線を求めるという、向心力の逆問題を完全に解決されたことを、私は大いに喜んでおります。この問題は、直接問題よりもはるかに困難であると私は考えております。それゆえ、私もまたこの問題に自分の力を試してみようと思い立ち、幸いにもある程度成功いたしました。私の解析によって、向心力が惑星とその中心との距離の二乗に反比例する場合に、惑星が描く曲線は円錐曲線のみである、ということを発見しました。以下に示す解析によって、それを判断していただけるでしょう。私には十分に簡潔であるように思われます。

求める曲線を ABC とします。LI をその軸、S を力の中心とします。曲線上の無限小部分 BC を取り、その部分を延長して CE=BC とします。点 E から、CS に平行な直線 ED を引き、それが曲線と交わる点を D とします。さらに、DF、CG、BH を LI に平行に引き、それらが小直線 EG（これは CI に平行で、LI に垂直です）と F および G で交わり、直線 CI と H で交わるとします。最後に、DK を CI にも平行に引き、それが CG と交わる点を K とします。

私はまた、任意に与えられた曲線上に働く向心力を決定するための、簡単な方法も導き出しました。この曲線において $z = SC = \sqrt{(xx + yy)}$ とおきます。さらに、 $r = SL$ を、その軸上の線分で、接線 EL と向心力の中心 S とのあいだに含まれる部分とします。 $SI = x, IC = y$ また、サブタンジェント $IL = s$ とします。与えられた曲線の方程式を 2 階微分まで求め、 $ddx = vrrxyy : z, ddy = vrry^3 : z, dx = s, dy = y$ を代入すれば、すべて有限量からなる一つの方程式ができます。その式において v が向心力を表す。そして v を未知量とみなし、他の量 x, y, r, s, z をすべて既知量として扱えばいいのです。

もしよろしければ、この逆向心力の問題について、あなたの解析を私に教えてもらえないでしょうか。私は非常に優雅なものだと思っておりますので、お教えいただければ大変うれしく思います。

パリ王立科学アカデミー紀要

1710 年版

パリ版 P.519、オランダ版 P.682

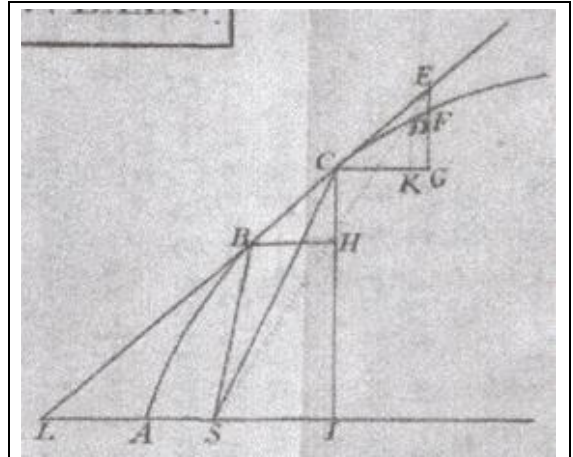


表 XX, No. LXXXV

No. LXXXVI

返信の抜粋

ベルヌーイ氏よりヘルマン氏へ、1710年10月7日、バーゼルにて。

どうかお許しください、あなたの洞察力にふさわしく、確かに良いものであるとはいえ、逆向心力問題のあなたの解法を、ここで少しばかり検討させていただきたいと思います。その後、あなたがぜひ知

りたいと書き送ってこられた、私自身のこの問題の解き方をさらに詳しくご説明いたしましょう。率直に申し上げますと、あなたの解法は、あなたが求めていたもの、またすでにご存じであったことに合わせて、あらかじめ意図して作られたものの

パリ王立科学アカデミー紀要

1710 年版

パリ版 P.521、オランダ版 P.685

ように見受けられます。実際、もしそうでなかったとすれば、あなたはどのようにして、方程式

$-ddx\sqrt{(xx+yy)}:x=(ydx-xdy)^2:(xx+yy)$ の積分を求めるために、それを次の形、

$-addx=(ydx-xdy)\times(xydx-xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$ に変形しなければならないと見抜くことができたのでしょうか。そして必要性があったということ。

さらにまた、もしそのような前提がなかったとすれば、あなたはどのようにしてこの式の積分を求め、さらにその積分の積分まで導くことができたのでしょうか。不定量 x, y, dx, dy, ddx などが互いに入り混じり、きわめて複雑に絡み合っているため、それらを分離しようとする自体、絶望すべき労苦を引き受けるようなものだからです。そして、あなたが行ったように、それらが混在したままで積分することは、もしあなたがあらかじめ、自分の念頭に置いていた円錐曲線がその微分・微分方程式を満たすであろうと推測していなかったならば、不可能であったに違いありません。しかも、あなたはその目的に合わせてこの方程式を巧みに整え、ついには代数方程式へと還元することに成功したのです。ぜひあなたの方法を、一般的な仮定の場合にも試してみていただきたいものです。向心力がどのような仮定に従う場合であっても、その軌道曲線を求める問題についてです。少なくとも、曲線空間の求積が可能であると仮定して考えてみてください。そうすれば、不定量が互いに入り混じることによって、あなたは混乱に陥ることになるのがお分かりになるでしょう。そして、その状況から抜け出すことは、ここで私が示している道とは別の方法を取らないかぎり、できないのではないかと私は思います。

さらにまた、あなたのこの個別的な解法からだけでは、その解が円錐曲線にのみ適用されることは、まだ十分には示されていません。あなたはその微分・微分方程式を最初に積分した際、両辺に任意定数を付け加えることを忘れていたからです。そのため、円錐曲線のほかにも、なお別の種類の曲線があなたの問題を満たすのではないかという疑いを、ある人に抱かせるかもしれません。この疑いを取り除くためには、任意の微分方程式の積分において、その積分式の一方の辺に定数を加えたり、あるいは差し引いたりしても、その二つの方程式によって表される曲線の性質には何ら変化が生じない、ということを示す必要がありました。そこで、私はこの欠落を次のように補うことにします。

あなたの微分・微分方程式 $-addx=(ydx-xdy)\times(xydx-xxdy):(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$ において、私はあなたがしたように単に $-adx$ を $-addx$ の積分とするだけではなく、そこに正負の任意定数を付け加えます。

$-adx \pm \text{定数}$ 、とするのであり、 $-adx \pm c(ydx-xdy)$ と置きます。そのほかの手続きはあなたと同様に行います。そうすると、あなたの先の微分・微分方程式を積分することにより、次の式が得られます(途中の変形は略)。

$$-adx \pm c(ydx-xdy) = -y(ydx-xdy):\sqrt{(xx+yy)} = (xydy-yydx):\sqrt{(xx+yy)}$$

$$-abdx:xx \pm cb(ydx-xdy):xx = (bxydy-byydx):xx\sqrt{(xx+yy)}$$

これを積分すると、 $ab:x \pm cby:x \pm c = b\sqrt{(xx+yy)}:x$ 。ここで $h=cb$ と置いて整理すると、

$ab \pm hy \pm cx = b\sqrt{(xx+yy)}$ となります。この方程式は、あなたのものには現れていなかった by の項を含んでいますが、やはりあなたの式と同様に 3 種の円錐曲線を表す方程式になっています。さて、あ

なたが見落としていた定数項 $c(ydx - xdy)$ について言えば、もしそれを xx で割ったときに積分可能でなかったならば、あるいはそのようにして積分できたとしても、そこから得られる y が複数の次数をもつ形になったならば、あなたにもお分かりのとおり、円錐曲線のほかにも、なお別の曲線があなたの問題を満たしていたことになったでしょう。そしてあなた自身は、それに気づかないままであったはずで。このことから私は、あなたも私と同様に、あなたの解法は十分に一般的でないという理由で欠陥があることを認めてくださるだろうと期待しています。

さて、ここに、あなたが知りたいと書き送ってこられた私の解法を示します。この解法があなたのお気に召さないことはないだろうと、期待しております。第1に、これはどのような仮定の向心力に対しても適用できる一般的方法であり、曲線空間の求積が与えられていれば、その軌道曲線の作図を与えるからです。第2に、ここでは不定量が入り混じることのない方程式に到達するからです。第3に、この方法では1次微分だけを用い、あなたの方法のような微分・微分（高階微分）を必要としないからです。これらすべてを最初から最後までお見せするために、そして（多少長くはありますが）あなたにも不快ではないと思われる程度の詳しさを説明するために、まず次の補題から始めることにします。

補題

もし二つの物体があり、その質量がそれぞれの重さに比例していて、同一点 A から同じ速さで下降し始め、しかも同じ中心 O に向かう等しい力を受けているとする。一方の物体は直線 AO に沿って直接下降し、もう一方は斜めに、これから描く軌道 ABC に沿って運動するとする。このとき私は次のことを主張する。力の中心 O の両側で中心から等しい距離にある点、たとえば B と E のような点を取り、中心 O を中心として円弧 BE を描くと考えれば、この二つの物体は常に等しい速度をもつ。したがって、もし EG が直線 AO に沿って下降する物体が点 E で得た速度を表すならば、その同じ EG が、軌道 ABC を描く物体が点 B で持つ速度をも同様に表すことになる。

この補題の証明は、ニュートン氏の著書「自然哲学の数学的原理」P.125（第1巻、第8節、命題40）に記載されている。しかし、そこでは説明がやや込み入っているので、ここではそれをより簡潔に示すことにする。

曲線 ABC と直線 AO とが、それぞれその微小要素 Bb、Ee に分割されているものと考えよう。これらの要素は、中心 O を中心として描かれた無数の円 BE、be によって区切られており、それらの円は互いに無限に近接しているものとする。このように考えるならば、力学によれば次のことが分かる。各点 E において EO の方向に働く力（これは対応する点 B において BO の方向に働く力と同じである）が、曲線上の対応する微小要素 Bb に沿って運動体に生じさせる効果に対する比は、Bb が Ee に対する比と同じである。さらに力学によれば、等しい質量の物体において、これらの力によって生じる速度の増加は、それらの力と、その増加を生じさせるのに費やされる微小時間との合成比に比例することが知られている。ここでいう微小時間とは、これらの力が物体にそれぞれの微小線分 Ee、Bb を進ませるのに要する時間である。また、出発点 A においては、両者の速度は等しいと仮定されているので、これらの最初の微小時間は、それぞれの微小線分 Ee、Bb の長さの比に比例する。したがって、これらの最初の微小線分 Ee、Bb に沿って生じる速度増加の比は、ここでは $Bb : Ee$ と $Ee : Bb$ の合成比となる。

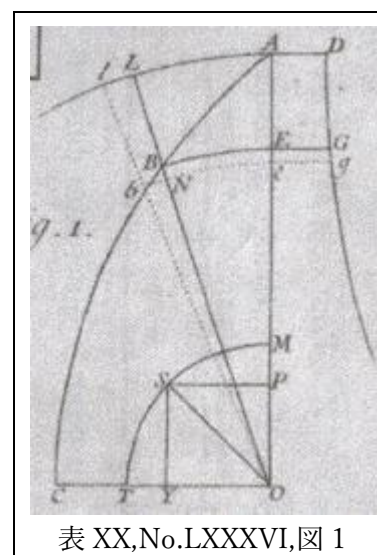


表 XX, No. LXXXVI, 図 1

Bb×Ee : Ee×Bb の比、つまり互いに等しい比となる。したがって、直線 AO と曲線 ABC のこれら最初の微小要素の終点においては、それぞれの微小線分に沿って生じる速度の増加は互いに等しいことになる。同様にして、これらの直線 AO と曲線 ABC の第 2 の微小要素の終点においても、それらは互いに等しいことが示されるであろう。さらに、第 3 の要素の終点においても、第 4 の要素の終点においても同様であり、以下同様に続く。ただしこれらはすべて、点 O から等しい距離にある対応する点どうしを二つずつ取って比較するものである。したがって、この点 O から任意に等しい距離において、直線 AO と曲線 ABC のそれぞれに沿う速度は、最初に互いに等しい速度から始まり、さらに両側で二つずつ対応する等しい速度増加が同じ回数だけ加わってできているので、やはり互いに等しいことになる。これが証明すべきことであった。

系、以上から、これらの速度を表す曲線 DGH を得ることができる。この曲線は、その各縦座標 EG によって、直線 AO に沿って A から O へ向かって落下する物体が、直線 AO 上の対応する各点 E においてもつ速度を表す曲線である。そして同時に（補題 1 より）、この同じ EG は、曲線 ABC を描く物体が、その曲線上の対応する点 B においてもつ速度をも表すことになる。このために、 $OE = x, EG = v$ とする。また、点 E（あるいは B）において O に向かって働く力、すなわち向心力を Φ とする。この Φ は、どのような力の法則であってもよく、 x と定数によって与えられているものとする。以上を前提とすると、微小区間 Ee を進む時間 $= dx : v$ 。そして、この時間に向心力 Φ を掛けたものが、物体が下降するか上昇するか、点 O に近づくか、あるいは遠ざかるかに応じて生じる瞬間的な速度の増減を与える。したがってここでは $\Phi dx : v = -dv$ 、 $\Phi dx = -v dv$ となる。これを積分すると $\int \Phi dx = ab - vv$ となる。ここで ab とは任意の定数を表し、単純な積分に任意に付け加えることのできる定数である。ゆえに $v = \sqrt{ab - \int \Phi dx}$ となり、これが求める速度曲線 DGH の方程式である。

分数を避けるために、私は vv を $\frac{1}{2}vv$ の代わりに用いている。これは任意定数 ab を自由に取ることができるためである。さて、ここに、これまで述べてきたすべての議論が意図していた問題そのものを示そう。

問題

曲線図形の求積が可能であると仮定し、また向心力の法則 Φ が x と定数によって任意に与えられているものとする。このとき、その力が運動体に描かせるべき軌道 ABC を求めよ。

解、 $OA = a$ とする。また、この半径による円弧 $AL = z$ 、その微小部分 $Ll = dz$ とする。したがって $nB = xdz : a$ となる。さらに、弧 Bb を通過する時間は、 $Nb \times BO$ に比例するものとする（これは三角形 BOb の 2 倍に等しい）。したがって、時間 $= xxdz : a$ となる。さて、この時間に速度 $\sqrt{ab - \int \Phi dx}$ を掛ければ（前の補題の系によれば）、移動距離 Bb が得られる。したがって $xxdz \sqrt{ab - \int \Phi dx} : a = Bb$ であり、また $Bb = \sqrt{dx^2 + xxdz^2 : aa}$ である。ここから次の微分方程式が得られる。 $dz = aacdx : \sqrt{abx^4 - x^2 \int \Phi dx - aaccxx}$ 。この式は、求める軌道 ABC の性質を表している。なお、この式における c は、式全体を同次にするために導入された任意定数である。以上が求めるべきものであった。

ご覧のとおり、私はここでただちに一次の微分方程式に到達します。しかもその方程式では、未知量どうしが互いに混ざり合うことはありません。したがって、曲線領域の求積が与えられていれば、そこ

から幾何学的構成を簡単に導き出すことができます。しかもこの方法は、ニュートン氏が「プリンキピア」P.127 以下に記載された方法よりも、さらに扱いやすいものです。(第1巻、第8節、命題41)

私の方程式はさらに、与えられた力がどのような仮定のもとにあっても、求める軌道が代数曲線であるか否かを示すものです。もし $aacd x : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int \Phi dx - aaccxx)}$ がある円弧に還元でき、しかもその円の半径が $OA (=a)$ と数の比で表されるならば、求める曲線は必然的に代数曲線になります。したがって、中心からの力が距離の2乗に反比例するという通常の仮定、 $\Phi = aag : xx$ を用いると、前の方程式は $dz = aacd x : \sqrt{(abx^4 - x^4 \int \Phi dx - aaccxx)} = aacd x : x \sqrt{(abxx + aagx - aacc)}$ となります。そしてこの積分はそのような円弧に帰着することができます。したがって私は直ちに、この仮定のもとでは、あなたの曲線 ABC が代数曲線でなければならないことが分かります。

さて、この仮定のもとで曲線 ABC が常に円錐曲線であることを示すには、ニュートン氏が「プリンキピア」P.55 系1 (第1巻、第3節、命題13) で証明なしに仮定していることですが、さらにいっそう巧みな工夫が必要です。そこで、私は次のようにしてそれを示します。

それでは [図2において、前の図と同じ文字は同じものを表すものとします]、点 O において AO に垂直に、直線 OQ を取って、その長さを $aag : 2cc$ とします。さらに、中心 Q をもち、漸近線 QO と QR の間に、座標の長方形 QYX または QOZ が aa に等しいような等軸双曲線 VXZ を描きます。その双曲線の任意の縦座標 XY を延長し、それが円 MST と S で交わるまで延ばします。その点 S を通って OS を引き、この直線上 (必要なら延長して) に $OB = XY$ となるように点 B を取ります。点 B が軌道 ABC 上の点になることを証明します。仮定により $OB = XY = QOZ : QY = aa : (aag : 2cc - t) = 2acc : (aag - 2cct)$ となります。そして、この構成から ABC は円錐曲線になります。これは、その座標 OF と FB の比を表す方程式を求めれば確かめられます。 $OF = x, FB = y$ とおくと、次の方程式が得られます。 $(a^4 gg - 4c^4 bb)xx = 8aac^4 bx - a^4 ggyy + 4a^4 c^4$ 。この方程式は円錐曲線を表す方程式です。放物線になるのは $OQ[aa : 2c] = OT[b]$ 、楕円になるのは $OQ > OT$ 、双曲線になるのは $OQ < OT$ の場合です。以上が証明すべきことでした。

もう一つの解法への準備

与えられた曲線から向心力を求める方法について言えば、次のような、なかなか見事な定理があります。私は以前、この定理の解法を見つけましたが、前に述べた逆問題とは独立に得たものでした。私はその解法を、1706年2月16日付の手紙でド・モアブル氏

(De Moivre) に伝えました。その手紙では、まず EPp を与えられた曲線、S を向心力の中心 (または焦点)、そして SA をこの曲線の点 P における接線 Aπ に下ろした垂線と仮定して、次のように書いたものでした。

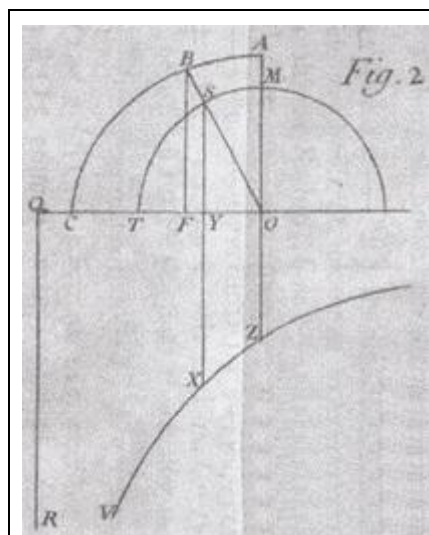


表 XX, No. LXXXVI, 図 2

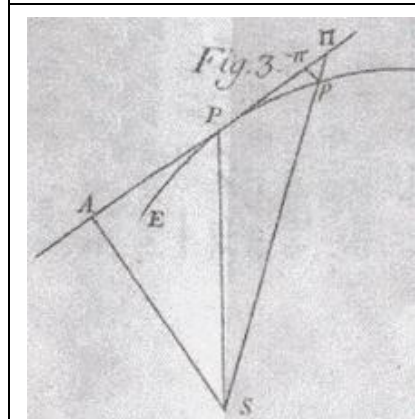


表 XX, No. LXXXVI, 図 3

力の中心 S から、 SP に無限に近い直線 $S\Pi$ を引き、この直線が延長された接線と Π で交わり、また曲線と p で交わるようにします。さらに、小さな垂線 $p\Pi$ を引きます。そこで、三角形 PSp が、動点が曲線の微小要素 Pp を通過するのに要する時間を表すものとして、これが一定であると仮定します。すると $SA \times Pp = 1$ と置くことができます。さて、点 P における展開線の直径（これを私は R と呼びます）が Pp に対してどのような比をもつかは、あなたも知っている通り、 $Pp : p\Pi = Pp^2 : R$ です。さらに、三角形 $SA\Pi$ と $p\Pi$ が相似ですから、 $SA : S\Pi[SP] = p\Pi[Pp^2 : R] : p\Pi$ が成り立ちます。したがって、 $p\Pi$ 、接線からの瞬間的な離れは $p\Pi = SP \times Pp^2 : SA \times R = SP \times SA^2 \times Pp^2 : SA^3 \times R$ ($SA \times Pp = 1$ なので) $= SP : SA^3 \times R$ となります。向心力は、距離に正比例し、展開線の直径と接線に下ろした垂線の三乗に対して合成された式で逆比例の関係にあります。

このようにして、向心力は一般的にすべて有限量の項によって表されることになります。

この定理は、向心力の逆問題に対するもう一つの解法を見つけるのにも役立ちます。その解法は、私が [もし記憶に誤りがなければ] およそ 15 年前、オランダに到着して間もなく発見したものです。確かに、この方法には 2 階差分が含まれています。しかし私は、それらを分離し、その後方程式を積分して、前の問題の方程式へ帰着させる特別な方法を持っています。そこで、もう一つの解法を、ここであなたにお伝えしようと思います。

ここでも前と同様に、 $OB = OE = x$, $AL = z$, $OA = a$, $BN = dx$, $Nb = dy$ とします。また、点 B における向心力を Φ とすれば、(私が今しがた証明した定理によれば) $\Phi = x : p^3 r$ となります。ここで p は点 O から点 B における接線に下ろした垂線の長さであり、 r は点 B における展開曲線の直径です。さて、通常公式によれば $p = xdy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ であり、また微分を一定と仮定することなく計算すると $r = 2x(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} : (dx^2 dy + dy^3 + xdxddy - xdyddx)$ になります。したがってここでは $x : p^3 r$ なので、向心力は $\Phi = (dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy) : 2x^3 dy^3$ になります。

ここで私が未定量を分離するために用いる工夫（他の方法では困難なため）は、この長い式を簡略化することにあります。その方法は、どの微分量を一定とみなすか（これは任意に選べる）を考え、その微分量を一定と仮定してこの方程式に代入することです。そうすれば、この式の四つの項のうち二つが消去され、残る項は二つだけとなります。さて、この操作は二つの方法で簡単に実行できることが分かります。 xdy を一定とみなすか、あるいは $dx : x$ を一定とみなすかのいずれかです。もっとも、前の定理においては、すでに時間に比例する量 xdy ($SA \times Pp$) を一定と仮定して、 $p\Pi$ (点 P における向心力に比例する量) を $SP : SA^3 \times R = x : p^3 r$ と導いたのでした。しかし、この公式は、仮にそのような量を何も一定と仮定しなかったとしても、結局は同じ形で得られるものです。

第 1、もし $xdy = c$ とすれば、 $\Phi = (dy^3 - xdyddx) : 2c^3$ となります。この式は、一定量 xdy を次のように微分することによって積分可能となります。 $d(xdy) = xddy + dx dy = 0$ となるので、 $dy = -xddy : dx$ になります。 dy の値を前の式 $\Phi = (dy^3 - xdyddx) : 2c^3$ に代入すると

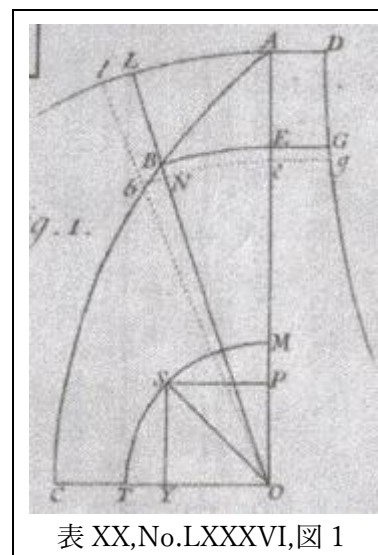


表 XX, No. LXXXVI, 図 1

$\Phi = (-dyddy - dxddx):2ccdx$ になります。したがって $\Phi dx = (-dyddy - dxddx):2cc$ となり、積分すると $\int \Phi dx = (-dy^2 - dx^2):4cc \pm n$ になります。ここで、 n は任意の定数です。

同じ方程式には、別の方法によっても到達することができます。 $\Phi = (dy^3 - xdyddx):2c^3$ に dx を掛け、さらにこれを部分に分けて扱い、それぞれを積分できる形に書き直すと

$\Phi dx = dy^3 dx:2c^3 [dx:2x^3] - xdx dyddx:2c^3 [-dxddx:2xxdy^2]$ となります。積分すると

$\int \Phi dx = -1:4xx - dx^2:4xxdy^2 \pm n = (-dy^2 - dx^2):4xxdy^2 \pm n$ となります。これは先ほどの式と同じです。

第2、いま $dx:x$ を一定と仮定します。この別の仮定を置くと、先の方程式

$\Phi = (dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy):2x^3 dy^3$ は $\Phi = (dy^3 + xdxddy):2x^3 dy^3$ に変わります。この式もまた二通りの方法で積分することができますが、ここでは第二の方法のみを用いることにします。そこでこの最後の方程式に dx を掛け、それをいくつかの部分に分けると $\Phi dx = dx:2x^3 + dx^2 ddy:2xxdy^3$ となります。ここで $dx^2:xx$ は一定ですから、これらを積分すると $\int \Phi dx = -1:4xx - dx^2:4xxdy^2 \pm n = (-dy^2 - dx^2):4xxdy^2 \pm n$ となります。これは先ほどの式と同じです。

このようにして我々の微分・微分方程式が、通常微分方程式にまで簡約されたので、もし適切に処理すれば（同次項を補うことによって）、 $bbdx:\sqrt{(nxx - xx \int \Phi dx - b^4)} = dy = xdz:a$ 、

$dz = abbdx:\sqrt{(nx^4 - x^4 \int \Phi dx - b^4 xx)}$ 、という式ができます。この方程式は、私が第一の方法によってできたものと同じ形であり、そこから同様に、軌道の普遍的な作図法、そして特に向心力が中心からの距離の2乗に反比例する場合には、その軌道が円錐曲線によって決定されることになります。

注意

私は先に、ニュートン氏が次のことを示したと述べました。ある物体が円錐曲線の一つの焦点に向かう中心力のもとでその円錐曲線を描くとき、その中心力は常に、その物体からその焦点までの距離の二乗に反比例する比に従うということです。しかしニュートン氏は、この命題の逆を証明することなく仮定にしています。ある物体が曲線を描いて運動し、その中心力がその曲線の平面内のある一点に向かい、その物体からその点までの距離の二乗に反比例するとき、その曲線は常に円錐曲線であり、その点はその円錐曲線の焦点、あるいはその一つの焦点である、としているのです。私が今与えたこの逆命題の証明が必要であることは、次のことを考えれば明らかです。ある物体を対数螺線に沿って運動させるには、その曲線の焦点（または中心）からの距離の3乗に反比例する向心力が必要であるとしても、そこから直ちに、同じ力の法則のもとでその物体が常にそのような曲線を描くと結論することはできないのです。向心力の直接公式によって簡単に確かめられるように、その物体は同じくそのような力の法則（距離の3乗に反比例する向心力）のもとで、双曲螺線 CFED を描くこともあり得るからです。この双曲螺線の性質は、次のようなものです。この螺線の各半径 CD と、同じ中心 C をもつ円 ABL の円周上に対応する横座標 AB との積 $AB \times CD$ が、常に互いに等しいということです。

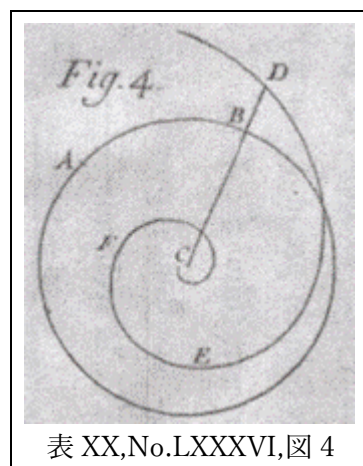


表 XX, No. LXXXVI, 図 4

PQ を、図の平面に対して垂直な平面とする。また PFHQ を、この平面と点 P および Q において交わる曲線とする。G、H、I、K を、この曲線上で物体が F から Q へ進む途中の四つの位置とする。さらに、これらの点から水平線に向かって、互いに平行な四つの縦線 GB、HC、ID、KE を下ろし、それらが水平線 PQ 上の点 B、C、D、E に達するものとする。そして BC、CD、DE、これらの縦線の間の距離は互いに等しいものとする。点 G と H から、それぞれ GL と HN という直線を引き、これらを G と H において曲線の接線とする。そして、それらは上方へ延長された縦線 CH および DI と、それぞれ L と N において交わるものとする。さらに平行四辺形 HCDM を完成させる。また、物体が弧 GH および HI を描くのに要する時

離とする。また、点 C、G、g から水平面 AK に垂線 CB、GD、gd を下ろす。そして GD と gd は接線と交わり、その交点をそれぞれ F および f とする。媒質の抵抗によって、前進する物体は本来なら長さ CH を進むはずのところ、実際には CF の長さしか進まない。また重力の作用によって、物体は F から G へ移される。したがって、微小線分 HF は抵抗の作用によって、また微小線分 FG は重力の作用によって、同時に生じるのである。ゆえに（第 1 巻補題 10 によって）、微小線分 FG は重力の大きさと時間の二乗との積に比例する。したがって（重力が一定であるから）時間の二乗に比例する。また微小線分 HF は抵抗と時間の二乗との積に比例する。抵抗と線分 FG に比例する。したがって抵抗は HF に正比例し、FG に逆比例する、HF : FG に比例する。ただし、これらの関係は生成しつつある無限小の線分において成り立つ。有限の大きさの線分では、この比例関係は正確には成立しない。

同様の議論によって、fg も時間の 2 乗に比例する。したがって時間が等しいので、fg は FG に等しい。また、後退する物体を押す*衝撃は bf : fg に比例する。しかし、運動の開始の瞬間においては、後退する物体に働く衝撃と前進する物体に働く抵抗とは等しい。したがって、それらに比例する bf : fg と HF : FG も等しくなる。ゆえに fg = FG であることから、bf = HF となる。したがって CF、CH（または Cb）、Cf は等差数列をなす。それゆえ HF は Cf と CF の半差である。したがって、先に HF : FG に比例するとされた抵抗は、(Cf - CF) : FG に比例する。

間は、物体がその時間のあいだに接線から落下するとして描くことのできる高さ LH および NI の平方根の比に比例する。そして速度は、描かれた長さ GH、HI に正比例し、時間に逆比例する。時間をそれぞれ T および t で表すならば、速度は GH : T および HI : t に比例する。したがって、時間 t のあいだに生じる速度の減少は GH : T - HI : t によって表される。この速度の減少は、物体を減速させる媒質の抵抗と、物体を加速させる重力とによって生じる。重力は、物体が落下して空間 NI を落下によって進む場合には、同じ時間のあいだにその距離の 2 倍を進むことのできる速度を生じさせる（これはガリレオが証明した）。その速度は 2NI : t である。しかし、物体が弧 HI を描いて運動している場合には、重力はその弧を HI - HN だけ、MI × NI : HI だけ増加させるにすぎない。したがって、この場合に重力が生じさせる速度は 2MI × NI : t × HI にすぎない。この速度（重力によって生じる速度）を、前に述べた速度の減少に加えると、抵抗だけによって生じる速度減少が得られる。GH : T - HI : t + 2MI × NI : t × HI である。したがって、同じ時間のあいだに、重力は落下する物体に 2NI : t の速度を生じさせるので、抵抗と重力の比は GH : T - HI : t + 2MI × NI : t × HI と 2NI : t との比になる。T × GH : T - HI + 2MI × NI : HI と 2NI との比である。

横座標 $CB = o$, $CD = o$, $CE = 2o$ とする。また縦座標 CH を P と書き、さらに MI を任意の級数 $Qo + Roo + So^3 + \dots$ で表すことにする。このとき、その級数の第一項を除くすべての項、 $Roo + So^3 + \dots Roo + So^3 + \dots$ は NI となる。また、縦座標 DI, EK, BG はそれぞれ次のようになる。

$$DI = P - Qo - Roo - So^3 - \dots$$

$$EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 - \dots$$

$BG = P + Qo - Roo + So^3 - \dots$ 。まず、縦座標 BG - CH および CH - DI の差を平方し、さらにそれらにそれぞれの BC と CD の平方を加えると、弧 GH と HI の長さの平方は

$$oo + QQoo - 2QRo^3 + \dots \text{および}$$

$$oo + QQoo + 2QRo^3 + \dots \text{となる。これらの平方}$$

$$\text{根、} o\sqrt{(1+QQ)} - QRo : \sqrt{(1+QQ)} o \text{ および}$$

$$o\sqrt{(1+QQ)} + QRo : \sqrt{(1+QQ)} \text{ が、それぞれ}$$

弧 GH と HI の長さである。さらに、縦座標 CH

から BG と DI の平均を引き、また縦座標 DI から

CH と EK の平均を引くと、弧 GI および HK に対

する弧とその弦との最大の高さは Roo および

$$Roo + 3So^3 \text{ として得られる。これらは線分 LH お}$$

よび NI に比例する。したがってそれらは、無限小

時間 T と t の二乗比に比例する。ゆえに $t:T$ の比

$$\text{は } \sqrt{(R+3SO):R)、\left(R+\frac{3}{2}So\right):R \text{ である。さら}$$

に $t \times GH : T - HI + 2MI \times NI : HI$ において、すで

に求めてある $t:T, GH, HI, MI, NI$ の値を代入すると

$$3Soo\sqrt{(1+QQ)} : 2R \text{ となる。また } 2NI = 2Roo \text{ で}$$

あるから、抵抗と重力の比は

$$3Soo\sqrt{(1+QQ)} : 2R \text{ 対 } 2Roo \text{ となり、}$$

$$3S\sqrt{(1+QQ)} \text{ 対 } 4RR \text{ に等しい。}$$

速度とは次のようなものである。物体が任意の点 H から接線 HN の方向に出ていくとき、直径 HC を持ち、その準線弦が $HNq : NI, (1+QQ) : R$ となる放物線に沿って、真空中で運動することができるよう速度である。

抵抗は、媒質の密度と速度の 2 乗に比例して生じる。したがって媒質の密度は、抵抗に正比例し、速度の 2 乗に反比例する。媒質の密度は $3S\sqrt{(1+QQ)} : 4R^2$ に直接比例し、 $(1+QQ) : R$ に反比例する。整理すると $S : R\sqrt{(1+QQ)}$ に比例する。(証明終わり)

系 I、接線 HN を両側に延長し、任意の縦座標 AF と T で交わるようにすると、 $HT : AC$ は $\sqrt{(1+QQ)}$ に等しくなる。したがって、先に得られた式において $\sqrt{(1+QQ)}$ の代わりに $HT : AC$ と書くことができる。このようにして、抵抗と重力の比は $3S \times HT \text{ 対 } 4RR \times AC$ となる。また速度は $HT : AC\sqrt{R}$ に比例する。媒質の密度は

さて、抵抗は媒質の密度と速度の 2 乗に比例する。ところで速度は、描かれた長さ CF に正比例し、時間 $\sqrt{FG}$ に逆比例する。 $CF : \sqrt{FG}$ に比例する。したがって速度の 2 乗は $CFq : FG$ に比例する。ゆえに、抵抗は、すでにそれに比例するとされた $(Cf - CF) : FG$ であるから、これは媒質の密度と $CFq : FG$ の積に比例する。したがって媒質の密度は、 $(Cf - CF) : FG$ に正比例し、 $CFq : FG$ に逆比例する。つまり $(Cf - CF) : CFq$ に比例する。

系 I、ここから次のことが導かれる。線分 Cf 上に $Ck = CF$ となる点 k を取り、そこから水平面 AK に垂線 ki を下ろし、それが曲線 ACK と点 l において交わるとする。このとき媒質の密度は $(FG - kl) : CF \times (FG + kl)$ に比例する。 $fC : kC$ は $\sqrt{fg} : \sqrt{kl}$ 、つまり $\sqrt{FG} : \sqrt{kl}$ に比例するからである。したがって差の比を取れば、 $Fk : kC$ つまり $Cf -$

CF : CF は $\sqrt{FG} - \sqrt{kl} : \sqrt{kl}$ に比例する。ここで両辺に $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$ を掛けると、 $FG - kl : kl + \sqrt{(FG \times kl)}$ となり、 $FG - kl : FG + kl$ となる。最初に生じる比 $kl + \sqrt{FG \times kl}$ と $FG + kl$ は互いに等しいからである。したがって $(Cf - CF) : CF$ の代わりに $(FG - kl) : (FG + kl)$ と書くことにしよう。すると媒質の密度は、もともと $(Cf - CF) : CFq$ に比例していたが、結局 $(FG - kl) : CF \times (FG + kl)$ に比例することになる。

系 II、ここから、 $2HF$ と $Cf - CF$ が等しく、また FG と kl を加えると $2FG$ となるので、 $2HF : CF = (FG - kl) : 2FG$ となる。したがって $HF : FG$ 、抵抗と重力の比は、 CF と $FG - kl$ の矩形と $4FGq$ の比に等しい。

系 III、ここから次のことが言える。もし曲線が、底（横座標） AB と、縦にとった線分 BC （縦座標）との関係によって定義され、（通常そうするように）縦座標の値が収束級数に展開されるならば、そのときその級数の最初の数項によって、この問題は容易に解くことができる。次に示す例に見られるとおりである。

例 I、線 ACK を、直径 AK の上に描かれた半円とする。そして、発射された物体がこの曲線上を運動するようにする媒質の密度を求めよ。

半円の直径 AK を点 O において二等分する。そして $OK = n$, $OB = a$, $BC = e$, $BD(Bi) = o$ とおく。すると DGq つまり $OGq - ODq$ は $nn - aa - 2ao - oo$ に等しく、これは $ee - 2ao - oo$ と同じである。そして我々の方法によって平方根を展開すると

$DG = e - ao : e - oo : 2e - aaoo : 2e^3 - a^3o^3 : 2e^5 \dots$ となる。ここで $nn = ee + aa$ と書き換えると

$DG = e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5 - \dots$ となる。

このような級数を、次のように連続する項に分けて区別する。第1項とは無限小量 o が含まれていない項、第2項とは1次 (o) として現れる項、第3項とは2次 (o^2) として現れる項、第4項とは3次 (o^3) として現れる項である。そして

$S \times AC : R \times HT$ に比例する。

系 II、ここから次のことが言える。もし曲線 $PFHQ$ が、底（横座標） AC と、縦にとった線分 CH （縦座標）との関係によって定義され、（通常そうするように）縦座標の値が収束級数に展開されるならば、そのときその級数の最初の数項によって、この問題は容易に解くことができる。次に示す例に見られるとおりである。

例 I、線 $PFHQ$ を、直径 PQ の上に描かれた半円とする。そして、発射された物体がこの曲線上を運動するようにする媒質の密度を求めよ。

直径 PQ を点 A において二等分する。そして $OQ = n$, $AC = a$, $CH = e$, $CD = o$ とおく。すると DIq つまり $AOq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$ 、これは $ee - 2ao - oo$ と同じである。そして我々の方法によって平方根を展開すると

$DI = e - ao : e - oo : 2e - aaoo : 2e^3 - a^3o^3 : 2e^5 \dots$ となる。ここで $nn = ee + aa$ と書き換えると

$DI = e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5 - \dots$ となる。

このような級数を、次のように連続する項に分けて区別する。第1項とは無限小量 o が含まれていない項、第2項とは1次 (o) として現れる項、第3項とは2次 (o^2) として現れる項、第4項とは3次 (o^3) として現れる項である。そして

このようにして、無限に続いていく。そして第1項で e と書かれているものは、常に不定量の起点Bに立つ縦座標BCの長さを表す。第2項で $ao:e$ と書かれているものは、BCとDFとの差、平行四辺形BCIDを完成させるときに切り取られる微小線分IFを表し、常に接線CFの位置を決定する。この場合には、IFとICの比を $ao:e$ と o の比、つまり a と e を取ることになる。第3項の $nnoo:2e^3$ は、線分FGを表す。この線分FGは接線と曲線のあいだに位置し、したがって接触角FCG、すなわち曲線が点Cにおいてもつ曲率を定める。もしこの線分FGが有限の大きさをもつならば、それは第3項だけでなく、その後に続く無限の項とともに表される。しかし、この線分(FG)が無限に小さくなるならば、後続の項は第3項に比べて無限に小さくなり無視することができる。第4項の $anno^3:2e^5$ は、曲率の変化を表し、第5項はその変化の変化(曲率変化の変化)を表す。以下同様である。したがって、この種の級数が、接線および曲線の曲率に関する問題の解法において、決して軽視できない有用性をもつことが、ここから簡単に理解される。

さらに、CFはCIqとIFqからなる直角三角形の斜辺で、BDqと第2項の平方から得られる斜辺である。またFG+klは第3項の2倍に等しく、FG-klは第5項の2倍に等しい。DGの値はilの値へと変換され、またFGの値はklの値へと変換されるからである。これはBDの代わりにBiを書く、すなわち+oの代わりに-oを用いることによって行われる。したがって、もし

$FG = -nnoo:2e^3 - anno^3:2e^5 - \dots$ であるならば、 $kl = -nnoo:2e^3 + anno^3:2e^5 + \dots$ となる。これらの項の和は $-nnoo:e^3$ であり、差は $-anno^3:e^5$ である。ここでは第5項およびそれ以降の項は無視する。なぜなら、それらはこの問題で考慮される量に比べて無限に小さいからである。そこで、この級数を一般に $+Qo - Roo - So^3 \dots$ という項で表すことにすれば、

$$CF = \sqrt{(oo + QQoo)} \text{ となり、 } FG + kl = 2Roo,$$

このようにして、無限に続いていく。そして第1項で e と書かれているものは、常に不定量の始まりoに立つ縦座標CHの長さを表す。第2項で $ao:e$ と書かれているものは、CHとDNとの差、平行四辺形HCDMを完成させるときに切り取られる微小線分MNを表し、常に接線HNの位置を決定する。この場合には、MNとHMの比を $ao:e$ と o の比、つまり a と e を取ることになる。第3項の $nnoo:2e^3$ は、線分INを表す。この線分INは接線と曲線のあいだに位置し、したがって接触角IHN、すなわち曲線が点Hにおいてもつ曲率を定める。もしこの線分FGが有限の大きさをもつならば、それは第3項だけでなく、その後に続く無限の項とともに表される。しかし、この線分(FG)が無限に小さくなるならば、後続の項は第3項に比べて無限に小さくなり無視することができる。第4項は曲率の変化を決定し、第5項はその変化の変化(曲率変化の変化)を表す。以下同様である。したがって、この種の級数が、接線および曲線の曲率に関する問題の解法において、決して軽視できない有用性をもつことが、ここから簡単に理解される。

$FG - kl = 2So^3$ となる。媒質の密度はもともと $(FG - kl) : CF \times (FG + kl)$ に比例していたので、これは $S : R\sqrt{(1+QQ)}$ に比例することになる。したがって、各問題を収束する級数へと帰着させ、ここで Q 、 R 、 S の代わりにそれぞれ対応する級数の項を書き入れ、さらに任意の点 G における媒質の抵抗を重力に対して $S\sqrt{(1+QQ)} : 2RR$ の比であるとし、また速度を、物体が点 C から直線 CF の方向に出発して、直径 CB 、通径 $(1+QQ) : R$ をもつ放物線に沿って運動するときを持つ速度と同じものとすれば、この問題は解かれる。

したがって、いま解こうとしているこの問題において、 $\sqrt{(1+aa:ee)}$ つまり $n:e$ を $(1+QQ)$ の代わりに書き、 $nn:2e^3$ を R の代わりに、 $ann:2e^5$ を S の代わりに書くならば、媒質の密度は $a:ne$ 、 n が一定であるから $a:e$ に比例することになる。これは $OB : BC$ 、接線の長さ CT (半径 OL において AK に垂直に立つ点で終わるもの) に比例する。さらに、媒質の抵抗は重力に対して $a:n$ 、 $OB : OK$ (ここで OK は円の半径) に比例する。また、速度は $\sqrt{2BC}$ に比例する。したがって、物体 C がある一定の速度で、 OK に平行な直線方向に沿って点 L から出発し、媒質の密度が各点 C において接線の長さ CT に比例し、点 C における媒質の抵抗が重力に対して $OB : OK$ の比にあるならば、その物体は円の四分円弧 LCK を描くであろう。(証明終わり)

しかし、もし同じ物体が点 A から、直線 AK に垂直な方向に出発するとすれば、 OB 、 a は中心 O の反対側に取りられねばならず、したがってその符号を変えて $+a$ の代わりに $-a$ と書くべきである。このようにすると、媒質の密度は $-a:e$ に比例することになる。しかし負の密度 (物体の運動を加速するような密度) は自然界には存在しない。したがって、物体が A から上昇してこの円の四分円 AL を描くことは、自然には起こりえない。そのよ

さて、級数 $e - ao : e - nnoo : 2e^3 - anno^3 : 2e^5 - \dots$ を $P - Qo - Roo - So^3 - \dots$ という級数と比較する。 $P = e$, $Q = a:e$, $R = nn2e^2$, $S = ann:2e^3$ と置くことができる。また $\sqrt{(1+QQ)}$ の代わりに $\sqrt{(1+aa:ee)}$ と書ける。これより媒質の密度は $a:ne$ に比例する。(n は与えられた定数であるから) $a:e$ 、 $AC : CH$ に比例する。これはつまり、接線 HT の長さに比例する。この接線 HT は、半径 AF に対して法線方向に立つ直線 PQ に接するところまで延ばしたものである。さらに抵抗力は重力に対して、 $3a:2n$ 、 $3AC : PQ$ の比となる。また速度は $\sqrt{CH}$ に比例する。したがって、もし物体が適切な速度で、点 F から直線 PQ に平行な方向へ出発し、かつ各点 H における媒質の密度が接線 HT の長さに比例し、さらにある点 H における抵抗力が重力に対して $3AC : PQ$ の比であるならば、その物体は円の四分円弧 FHQ を描く。(証明終わり)

しかし、もし同じ物体が点 P から、直線 QP に垂直な方向に出発し、半円 PFQ の弧に沿って運動し始めるとすれば、 AC 、 a は中心 A の反対側に取りられねばならず、したがってその符号を変えて $+a$ の代わりに $-a$ と書くべきである。このようにすると、媒質の密度は $-a:e$ に比例することになる。しかし負の密度 (物体の運動を加速するような密度) は自然界には存在しない。したがって、物体が P から上昇してこの円の四分円 PF を描く

うな結果を得るためには、物体は抵抗する媒質によって妨げられるのではなく、媒質が押すことによって加速されなければならない。

例 II、

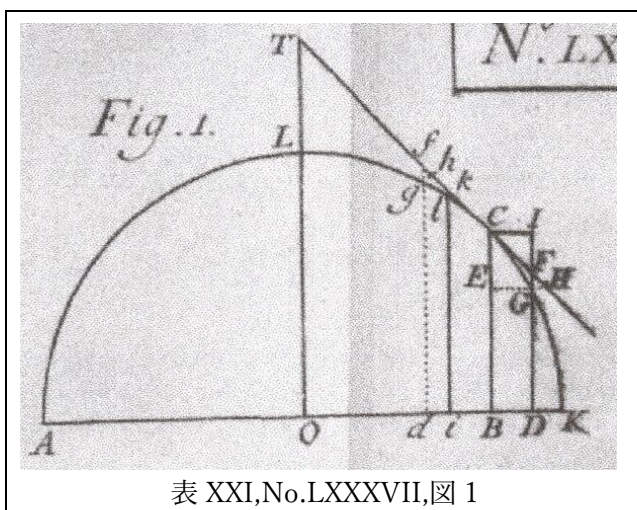


表 XXI, No. LXXXVII, 図 1

曲線 ALCK を放物線とし、その軸 OL は水平線 AK に対して垂直であるとする。そして、投射された物体がその曲線上を運動するようにする媒質の密度を求めよ。

放物線の性質より、長方形 ADK は縦座標 DG とある一定の直線との積で作られる長方形に等しい。その直線を b , $AB = a$, $AK = c$, $BC = e$, $BD = o$ すると、長方形 $(a+o)(c-a-o)$ $= ac - aa - 2ao + co - oo$ は $b \times DG$ に等しい。したがって $DG = (ac - aa) : b + (c - 2a)o : b - oo : b$ となる。さて、この級数の第 2 項は $(c - 2a)o : b$ であり、これは Qo に対応するから、その係数 Q は $(c - 2a) : b$ である。同様に第 3 項は $oo : b$ であり、これは Roo に対応するので、その係数 R は $1 : b$ である。しかし、これ以上の項は存在しないので、第 4 項 So^3 の係数 S は消滅しなければならない。したがって $S : R\sqrt{(1+QQ)}$ という量、媒質の密度に比例する量は 0 となる。ゆえに媒質の密度が全く無くても、投射された物体は放物線上を運動する。これはかつてガリレオが証明した通りである。(証明終わり)

例 III、

ことは、自然には起こりえない。そのような結果を得るためには、物体は抵抗する媒質によって妨げられるのではなく、媒質が押すことによって加速されなければならない。

例 II、

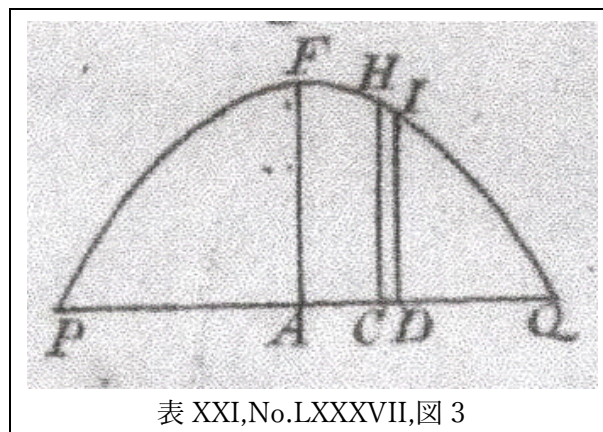


表 XXI, No. LXXXVII, 図 3

曲線 PFQ を放物線とし、その軸 AF は水平線 PQ に垂直であるとする。そして、投射された物体がその曲線上を運動するようにする媒質の密度を求めよ。

放物線の性質より、長方形 PDQ は縦座標 DI とある一定の直線との積で作られる長方形に等しい。その直線を b , $PC = a$, $PQ = c$, $CH = e$, $CD = o$ すると、長方形 $(a+o)(c-a-o)$ $= ac - aa - 2ao + co - oo$ は $b \times DI$ に等しい。したがって $DI = (ac - aa) : b + (c - 2a)o : b - oo : b$ となる。さて、この級数の第 2 項は $(c - 2a)o : b$ であり、これは Qo に対応する。また第 3 項は $oo : b$ であり、これは Roo に対応する。しかし、これ以上の項は存在しないので、第 4 項の係数 S は消滅しなければならない。したがって $S : R\sqrt{(1+QQ)}$ という量、媒質の密度に比例する量は 0 となる。ゆえに、媒質の密度が全く無くても、投射された物体は放物線上を運動する。これはかつてガリレオが証明した通りである。(証明終わり)

例 III、

曲線 AGK を双
曲線とし、その
漸近線 NX は水
平面 AK に垂直
であるとする。
そして、投射さ
れた物体がこの
曲線上を運動す
るようにする媒
質の密度を求め
よ。

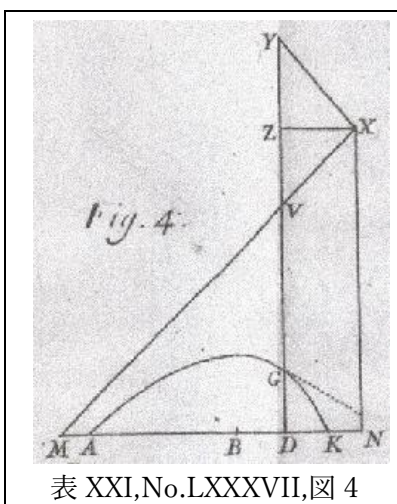


表 XXI, No. LXXXVII, 図 4

MX をもう一つの漸近線とし、縦線 DG を延長
したものがこの直線と点 V で交わるものとする。
すると双曲線の性質により、長方形 XV×VG は既
知量として定まる。また DN と VX の比は与えら
れているので、したがって長方形 DN×VG もまた
与えられる。これを bb とおく。さらに平行四辺形
DNXZ を完成させ、 $BN = a, BD = o, NX = c$ と
する。また与えられた比、 $VZ : ZX$ (あるいは
 $VZ : DN$) を $m : n$ とおく。すると、 $DN = a - o$,
 $VG = bb : (a - o)$, $VZ = m(a - o) : n$ となる。したが
って $GD = NX - VZ - VG$

$= c - ma : n + mo : n - bb : (a - o)$ 。項 $bb : (a - o)$
を収束級数に展開すると $bb : a + bbo : aa$
 $+ bboo : a^3 + bbo^3 : a^4 + \dots$ となる。そして GD は
次の値になる。 $c - ma : n - bb : a + mo : n$
 $- bbo : aa - bbo^2 : a^3 - bbo^3 : a^4 \dots$ 。この級数の第
2 項 $mo : n - bbo : aa$ は Q_0 の代わりに用いられ、
第 3 項は符号を変えて $bbo^2 : a^3$ とし Ro^2 に対応す
し、第 4 項も同様に符号を変えて $bbo^3 : a^4$ とし So^3
に対応する。そして係数 $m : n - bb : aa, bb : a^3$,
 $bb : a^4$ を、上の規則において Q, R, S の代わりに書
き入れる。これを行うと、媒質の密度は

$$\frac{bb}{a^4} : \frac{bb}{a^3} \sqrt{\left(1 - \frac{mm}{nn} - \frac{3mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}\right)}$$

$$1 : \sqrt{(aa + mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa)}$$

という比として得られる。もし線分 VZ 上に VY を

曲線 AGK を双
曲線とし、その
漸近線 NX は水
平面 AK に垂直
であるとする。
そして、投射さ
れた物体がこの
曲線上を運動す
るようにする媒
質の密度を求め
よ。

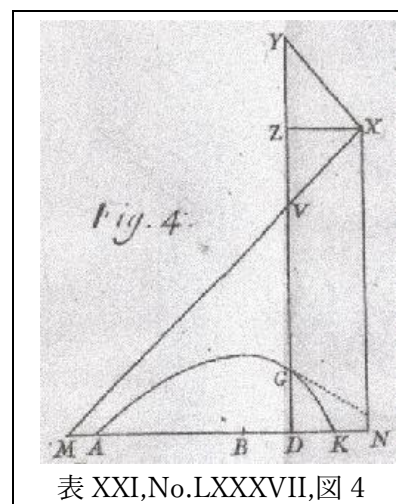


表 XXI, No. LXXXVII, 図 4

MX をもう一つの漸近線とし、縦線 DG を延長
したものがそれと V で交わるものとする。すると
双曲線の性質により、長方形 VX×VG は与えられ
る。また DN と VX の比も与えられているので、
したがって長方形 DN×VG も与えられる。これを
 bb とおく。さらに平行四辺形 DNXZ を完成さ
せ、 $BN = a, BD = o, NX = c$ とする。また与え
られた比、 $VZ : ZX$ (あるいは $VZ : DN$) を $m : n$
とおく。すると、 $DN = a - o$, $VG = bb : (a - o)$,
 $VZ = m(a - o) : n$ となる。したがって

$GD = NX - VZ - VG$
 $= c - ma : n + mo : n - bb : (a - o)$ 。項 $bb : (a - o)$
を収束級数に展開すると $bb : a + bbo : aa$
 $+ bboo : a^3 + bbo^3 : a^4 + \dots$ となる。そして GD は
次の値になる。 $c - ma : n - bb : a + mo : n$
 $- bbo : aa - bbo^2 : a^3 - bbo^3 : a^4 \dots$ 。この級数の第
2 項 $mo : n - bbo : aa$ は Q_0 の代わりに用いられ、
第 3 項は符号を変えて $bbo^2 : a^3$ とし Ro^2 に対応す
し、第 4 項も同様に符号を変えて $bbo^3 : a^4$ とし So^3
に対応する。そして係数 $m : n - bb : aa, bb : a^3$,
 $bb : a^4$ を、上の規則において Q, R, S の代わりに書
き入れる。これを行うと、媒質の密度は

$$\frac{bb}{a^4} : \frac{bb}{a^3} \sqrt{\left(1 - \frac{mm}{nn} - \frac{3mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}\right)}$$

$$1 : \sqrt{(aa + mmaa : nn - 2mbb : n + b^4 : aa)}$$

という比として得られる。もし線分 VZ 上に VY を

取り、それを VG に等しくすると、その比は $1:XY$ となる。 aa および $mmaa:nn-2mbb:n+b^4:aa$ は、それぞれ線分 XZ と ZY の平方だからである。また抵抗は、重力に対する比としては、XY が YG に対してもつ比に等しい。そしてその速度は、物体がある放物線を運動するときに持つ速度と同じである。その放物線は、頂点 G、直径 DG、そして直線弦 $XYq:VG$ をもつものである。そこで次のように仮定する。各点 G における媒質の密度は、距離 XY に反比例するとする。さらに、ある点 G における抵抗は、重力に対して $XY:YG$ の比であるとする。すると、点 A から適切な速度で放たれた物体は、あの双曲線 AGK を描くであろう。(証明終わり)

例 IV、任意に次のように仮定する。曲線 AGK は双曲線であり、中心は X、漸近線は MX と NX である。そして次の法則に従って描かれているとする。長方形 XZDN を作り、その辺 ZD が双曲線を G で切り、その漸近線を V で切るとき、線分 VG は、ZX または DN のベキ ND^n に反比例する。ここでその指数は n とする。そして次の問題を求める。物体がこの曲線に沿って進むために必要な媒質の密度は何か。

$BN=A, BD=O, NX=C$ とする。また $VZ:ZX$ (または DN) $=d:e$ とする。 $VG=bb:DN^n$ さらに $DN=A-O$ であり、 $VG=bb:(A-O)^n$ 、 $VZ=d(A-O):e$ となる。したがって
 $GD=NX-VZ-VG=C-dA:e+dO:e-
bb:(A-O)^n$ 。 $bb:(A-O)^n$ を無限級数に展開すると $nn:A^n+nbbO:A^{n+1}+(nn+n)bbO^2:2A^{n+2}+(n^3+2nn+n)bbO^3:6A^{n+3}\dots$ となる。すると
 $GD=C-dA:e-bb:A^n+dO:e-nbbO:A^{n+1}-
(nn+n)bbO^2:2A^{n+2}-
(n^3+3nn+n)bbO^3:6A^{n+3}\dots$ 。この級数の第 2 項 $dO:e-nbbO:A^{n+1}$ は Q_0 の代わり、第 3 項 $(nn+n)bbO^2:2A^{n+2}$ の代わり、第 4 項 $(n^3+3nn+n)bbO^3:6A^{n+3}$ は So^3 の代わりに用い

取り、それを VG に等しくすると、その比は $1:XY$ となる。 aa および $mmaa:nn-2mbb:n+b^4:aa$ は、それぞれ線分 XZ と ZY の平方だからである。また抵抗は、重力に対する比としては、 $3XY$ が $2YG$ に対してもつ比に等しい。そしてその速度は、物体がある放物線を運動するときに持つ速度と同じである。その放物線は、頂点 G、直径 DG、そして直線弦 $XYq:VG$ をもつものである。そこで次のように仮定する。各点 G における媒質の密度は、距離 XY に反比例するとする。さらに、ある点 G における抵抗は、重力に対して $3XY:2YG$ の比であるとする。すると、点 A から適切な速度で放たれた物体は、あの双曲線 AGK を描くであろう。(証明終わり)

例 IV、任意に次のように仮定する。曲線 AGK は双曲線であり、中心は X、漸近線は MX と NX である。そして次の法則に従って描かれているとする。長方形 XZDN を作り、その辺 ZD が双曲線を G で切り、その漸近線を V で切るとき、線分 VG は、ZX または DN のベキ DN^n に反比例する。ここでその指数は n とする。そして次の問題を求める。物体がこの曲線に沿って進むために必要な媒質の密度は何か。

$BN=A, BD=O, NX=C$ とする。また $VZ:ZX$ (または DN) $=d:e$ とする。 $VG=bb:DN^n$ さらに $DN=A-O$ であり、 $VG=bb:(A-O)^n$ 、 $VZ=d(A-O):e$ となる。したがって
 $GD=NX-VZ-VG=C-dA:e+dO:e-
bb:(A-O)^n$ 。 $bb:(A-O)^n$ を無限級数に展開すると $nn:A^n+nbbO:A^{n+1}+(nn+n)bbO^2:2A^{n+2}+(n^3+2nn+n)bbO^3:6A^{n+3}\dots$ となる。すると
 $GD=C-dA:e-bb:A^n+dO:e-nbbO:A^{n+1}-
(nn+n)bbO^2:2A^{n+2}-
(n^3+3nn+n)bbO^3:6A^{n+3}$ この級数の第 2 項 $(d:e-nbb:A^{n+1})O$ は Q_0 の代わり、第 3 項 $(nn+n)bbO^2:2A^{n+2}$ の代わり、第 4 項 $(n^3+3nn+n)bbO^3:6A^{n+3}$ は So^3 の代わりに用い

られる。そしてこれにより、媒質の密度は、任意の点 G において $S:R\sqrt{(1+QQ)}$ の比で与えられ、 $(n+2):3\sqrt{(A^2+ddAA:ee-2dnbbA:eA^n+nnb^4:A^{2n})}$ となる。さらに、もし VZ 上に VY を取り、 $VY=n\times VG$ とすれば、その密度は XY に反比例する。 A^2 および $ddA^2:ee-adnbbA:eA^n+nnb^4:A^{2n}$ は、それぞれ XZ と ZY の平方だからである。また同じ点 G における抵抗は重力に対して、 $SX\times XY:A$ が 2 RR に対して持つ比である。それは XY と $(3nn+3n)VG:(n+2)$ の比に等しい。さらにその点での速度は、物体がある放物線を運動するときの速度と同じである。その放物線は、頂点 G, 直径 GD, 直弦 $(1+QQ):R$ 、すなわち $2XYq:(nn+n)VG$ である。(証明終わり)

双曲線について述べたことは、放物線にも簡単に適用できる。もし XAGK が放物線を表し、直線 XV がその頂点 X でこの放物線に接するとする。また、順次に引かれた縦線 IA, VG が、そ

れぞれの横座標 XI, VX のべき XI^n, XV^n に比例する

られる。そしてこれにより、媒質の密度は、任意の点 G において $S:R\sqrt{(1+QQ)}$ の比で与えられ、 $(n+2):3\sqrt{(A^2+ddAA:ee-2dnbbA:eA^n+nnb^4:A^{2n})}$ となる。さらに、もし VZ 上に VY を取り、 $VY=n\times VG$ とすれば、その密度は XY に反比例する。 A^2 および $ddA^2:ee-adnbbA:eA^n+nnb^4:A^{2n}$ は、それぞれ XZ と ZY の平方だからである。また同じ点 G における抵抗は重力に対して、 $3SX\times XY:A$ が 4 RR に対して持つ比である。それは XY と $(2nn+2n)VG:(n+2)$ の比に等しい。さらにその点での速度は、物体がある放物線を運動するときの速度と同じである。その放物線は、頂点 G, 直径 GD, 直弦 $(1+QQ):R$ 、すなわち $2XYq:(nn+n)VG$ である。(証明終わり)

注記

系 I において、媒質の密度が $SX\times AC:RX\times HT$ の比として得られたのと同じ方法により、もし抵抗が速度 V のべき V^n に比例すると仮定すれば、媒質の密度は $(S:R^{(4-n)^2})\times(AC:HT)^{n-1}$ の比として得られる。したがって、もしある曲線が見いだされて、 $S:R^{(4-n)^2}$ と $(HT:AC)^{n-1}$ との比、 $S^2:R^{4-n}$ と $(1+QQ)^{n-1}$ との比が与えられるような法則に従うならば、その曲線において物体は、一様な媒質の中で、抵抗が速度の n 乗 V^n に比例するような場合に、その曲線に沿って運動する。

双曲線について述べたことは、放物線にも簡単に適用できる。もし XAGK が放物線を表し、直線 XV がその頂点 X でこの放物線に接するとする。また、順次に引かれた縦線 IA, VG が、そ

れぞれの横座標 XI, VX のべき XI^n, XV^n に比例する

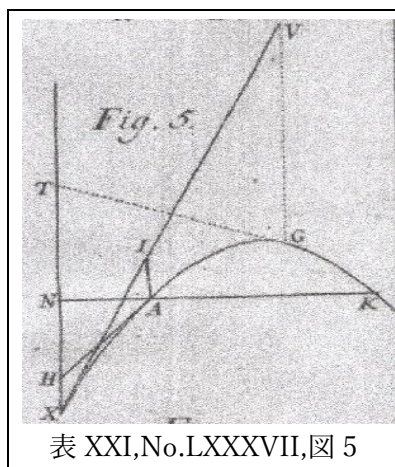


表 XXI, No. LXXXVII, 図 5

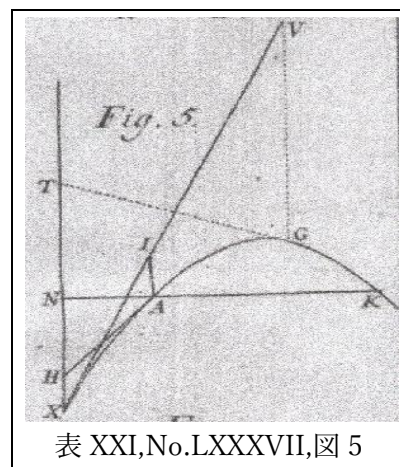


表 XXI, No. LXXXVII, 図 5

とする。さらに XT, TG, HA を引き、XT は VG に平行とし、TG と HA は放物線にそれぞれ G と A で接するものとする。すると、物体が任意の点 A から直線 AH の方向へ、適当な速度で投射されれば、その物体はこの放物線を描く。ただし、各点 G における媒質の密度が接線 GT に反比例する場合である。また点 G における速度は、物体が抵抗のない空間において運動するとき、円錐曲線の放物線を描く場合の速度と同じである。その放物線は、頂点 G、下方へ延ばされた直径 VG、円錐曲線の焦点を通り軸に垂直な弦

$\sqrt{(2TGq):(nn-n)VG)}$ をもつものである。また点 G における抵抗は、重力の力に対して TG 対 $(3nn-3n)VG:(n-2)$ の比である。したがって、もし NAK が水平線を表すとし、点 A における媒質の密度および物体が投射される速度をそのまま保ったまま、角 NAH をどのように変えても、長さ AH、AI、HX は変わらない。それゆえ放物線の頂点 X と直線 XI の位置が定まり、さらに VG と IA の比を、 XV'' と $XI''XI^n$ の比に等しく取れば、投射体が通過する放物線上のすべての点 G が求められる。

第 IV 節、第 III 補題

PQRr を、すべての半径 SP、SQ、SR などと等しい角で交わる螺旋線とする。点 P においてこの螺旋に接する直線 PT を引き、それが半径 SQ と T で交わるとする。また、螺旋に対して P と Q から垂線 PO、QO を立て、それらが O で交わるとし、SO を結ぶ。もし P と Q が互いに近づいて一致する極限に至るならば、角 PSO は直角になる。さらに長方形 TQ×PS と PQq との極限比は 1 になる。

直角 OPQ と OQR からそれぞれ等しい角 SPQ と SQR を差し引けば、残る角 OPS と OQS は互いに等しくなる。したがって、点 O, S, P を通る円は Q をも通ることになる。ここで P と Q が互いに近づいて一致すると、この円はその一致点 P において螺旋に接することになる。ゆえにこの円は直線 OP と直角に交わる。したがって OP はこの

とする。さらに XT, GT, AH を引き、XT は VG に平行とし、GT と AH は放物線にそれぞれ G と A で接するものとする。すると、物体が任意の点 A から直線 AH の方向へ、適当な速度で投射されれば、その物体はこの放物線を描く。ただし、各点 G における媒質の密度が接線 GT に反比例する場合である。また点 G における速度は、物体が抵抗のない空間において運動するとき、円錐曲線の放物線を描く場合の速度と同じである。その放物線は、頂点 G、下方へ延ばされた直径 VG、円錐曲線の焦点を通り軸に垂直な弦 $2GTq:(nn-n)VG$ をもつものである。また点 G における抵抗は、重力の力に対して GT 対 $(2nn-2n)VG:(n-2)$ の比である。したがって、もし NAK が水平線を表すとし、点 A における媒質の密度および物体が投射される速度をそのまま保ったまま、角 NAH をどのように変えても、長さ AH、AI、HX は変わらない。それゆえ放物線の頂点 X と直線 XI の位置が定まり、さらに VG と IA の比を、 XV'' と $XI''XI^n$ の比に等しく取れば、投射体が通過する放物線上のすべての点 G が求められる。

第 IV 節、第 III 補題

PQRr を、すべての半径 SP、SQ、SR などと等しい角で交わる螺旋線とする。点 P においてこの螺旋に接する直線 PT を引き、それが半径 SQ と T で交わるとする。また、螺旋に対して P と Q から垂線 PO、QO を立て、それらが O で交わるとし、SO を結ぶ。もし P と Q が互いに近づいて一致する極限に至るならば、角 PSO は直角になる。さらに長方形 TQ×2PS と PQq との極限比は 1 になる。

直角 OPQ と OQR からそれぞれ等しい角 SPQ と SQR を差し引けば、残る角 OPS と OQS は互いに等しくなる。したがって、点 O, S, P を通る円は Q をも通ることになる。ここで P と Q が互いに近づいて一致すると、この円はその一致点 P において螺旋に接することになる。ゆえにこの円は直線 OP と直角に交わる。したがって OP はこの

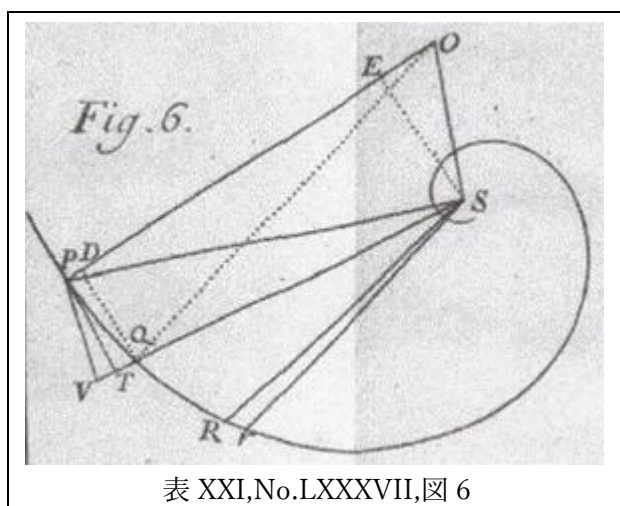
円の直径となり、半円における角 OSP は直角である。(証明終わり)

直線 OP に対して、点 Q と S から垂線 QD と SE を下ろすとする。すると、これらの線分の極限比は、 $TQ : PD = TS$ (または PS) : $PE = PO : PS$ になる。また、 $PD : PQ = PQ : PO$ である。ここで比例の組み換えを行うと $TQ : PQ = PQ : PS$ となる。したがって $PO^2 = TO \times PS$ となる。

(証明終わり)

第 XV 命題、第 XI 定理

もし媒質の密度が各場所において、不動の中心からの距離に反比例し、しかも向心力がその密度の2乗の比に従うならば、物体は、その中心から引かれたすべての半径と一定の角度で交わるような螺旋線上を回転運動することができる。



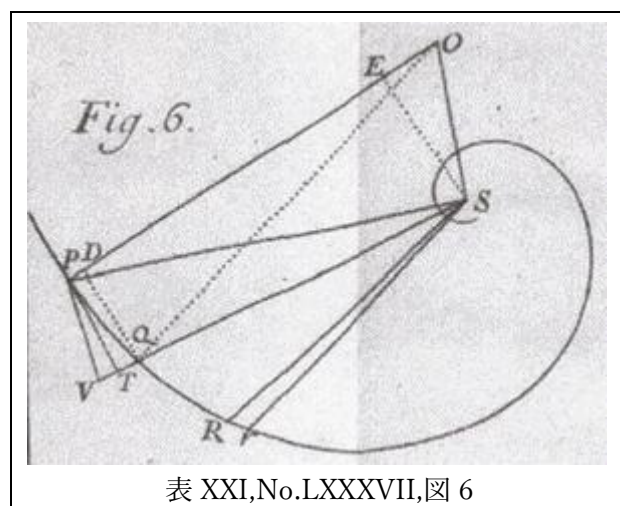
前補題において仮定された条件をここでも採用するものとする。さらに線分 SQ を V に至るまで延長し、 SV が SP に等しくなるようにとる。物体は等しい時間においてきわめて微小な弧 PQ および QR を描くものとし、また面積 PSQ と QSR は互いに等しいものとする。さらに、点 P において物体を引く向心力は SPq に反比例するものとする。また第 I 巻補題 X により、その力によって生じる微小線分 TQ は、この力の比と弧 PQ が描かれる時間の 2 乗比とから合成される比に比例する。(この場合、抵抗は向心力に比べて無限に小さいものとして無視する。) したがって $TQ \times SPq$ は (直前の補題により) $POq \times SP$ と同様に時間の 2

円の直径となり、半円における角 OSP は直角である。(証明終わり)

直線 OP に対して、点 Q と S から垂線 QD と SE を下ろすとする。すると、これらの線分の極限比は、 $TQ : PD = TS$ (または PS) : $PE = 2 PO : 2 PS$ になる。また、 $PD : PQ = PQ : 2 PO$ である。ここで比例の組み換えを行うと $TQ : PQ = PQ : 2 PS$ となる。したがって $PQ^2 = TQ \times 2 PS$ となる。(証明終わり)

第 XV 命題、第 XII 定理

もし媒質の密度が各場所において、不動の中心からの距離に反比例し、しかも向心力がその密度の2乗の比に従うならば、物体は、その中心から引かれたすべての半径と一定の角度で交わるような螺旋線上を回転運動することができる。



前補題において仮定された条件をここでも採用するものとする。さらに線分 SQ を V に至るまで延長し、 SV が SP に等しくなるようにとる。抵抗媒質中において、ある時間の間に物体がきわめて微小な弧 PQ を描き、またその 2 倍の時間においてきわめて微小な弧 PR を描くものとする。このとき、抵抗によって生じるこれらの弧の減少、同じ時間に抵抗のない媒質において描かれるはずの弧との差は、生成される時間の 2 乗の比に比例する。したがって、弧 PQ の減少量は、弧 PR の減少量の $\frac{1}{4}$ 四分の一となる。したがってまた、面積 PSQ に等しいものとして QSR をとるならば、弧

乗比に比例する。ゆえに時間は $PQ \times \sqrt{SP}$ に比例する。したがって、その時間に弧 PQ を描く物体の速度は $PQ : PQ\sqrt{SP} = 1 : \sqrt{SP}$ となり、速度は SP の平方根に反比例する (SP の逆比の平方根の関係にある)。同様の議論により、弧 QR が描かれるときの速度もまた SQ の逆比の平方根の関係、 $\sqrt{SQ}$ に反比例することになる。さらに、これらの弧 PQ および QR は、それぞれを描く速度の比に比例する。その比は SQ と SP の平方根比、 SQ と $\sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$ の比に等しい。また、角 SPQ と SQR が等しく、かつ面積 PSQ と QSR が等しいことから、弧 PQ と弧 QR の比は SQ と SP の比に等しい。比例する量の後項の差をとると、弧 PQ と弧 Rr の比は $SQ : SP - \sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$ 、 $SQ : \frac{1}{2} VQ$ となる。点 P と Q とが一致する極限においては、 $SP - \sqrt{SP} \times \sqrt{SQ}$ と $\frac{1}{2} VQ$ との比は等しくなるからである。抵抗のない媒質においては、面積 PSQ と QSR は (第 I 巻定理 I により) 等しい時間に描かれるはずである。抵抗により、面積 RSr の差が生じる。したがって抵抗は、小線分 Qr 、減少量 Rr が、それを生じさせる時間の 2 乗と比較されたものに比例する。小線分 Rr は (第 I 巻補題 X により) 時間の 2 乗の比に従うからである。ゆえに抵抗は $Rr : PQq \times SP$ に比例する。さらに、 $PQ : Rr$ は $SQ : VQ$ と等しいから、 $Rr : PQq \times SP$ は $\frac{1}{2} VQ : PQ \times SP \times SQ$ に等しい。したがって、 $\frac{1}{2} OS : OP \times SPq$ に比例する。点 P と Q が一致する極限においては、 SP と SQ も一致する。また、三角形 PVQ と PSO は相似であるから、 $PQ : \frac{1}{2} VQ$ と $OP : \frac{1}{2} OS$ は等しい。したがって $OS : OP \times SPq$ は抵抗に比例する。これは、点 P における媒質の密度の比、速度の 2 乗の比、双方に比例が成り立つ。速度の 2 乗の比、 $1 : SP$ の比を取り除くと、点 P における媒質の密度は $OS : OP \times SP$ に比例するものとして残る。いまこ

PQ の減少量は線分 Rr の半分に等しくなる。ゆえに抵抗力と向心力との比は、それらが同時に生じさせる微小線分 $\frac{1}{2} Rr$ と TQ の比に等しい。物体が点 P において受ける向心力は SPq に反比例する。また (第 I 巻補題 X により)、この力によって生じる小線分 TQ は、この力の比と、弧 PQ が描かれる時間の 2 乗の比との合成比に従う [この場合、抵抗は向心力に比べて無限に小さいものとして無視する]。したがって $TQ \times SPq$ (最後の補題によれば) $\frac{1}{2} PQq \times SP$ は時間の 2 乗の比に従う。ゆえに時間は $\frac{1}{2} PQ \times \sqrt{SP}$ に比例する。したがって、その時間において弧 PQ を描く物体の速度は $PQ : (PQ \times \sqrt{SP}, 1 : \sqrt{SP})$ に比例する。これは SP の平方根に反比例する。同様の議論によって、弧 QR が描かれる速度は、線分 SQ に対して逆の平方根比にある。また弧 PQ と QR は、それぞれを描く速度の比に等しい。その比は SQ と SP の平方根比であり、言い換えれば SQ と $\sqrt{(SP \times SQ)}$ の比である。さらに角 SPQ と SQR が等しく、面積 PSQ と QSR も等しいので、弧 PQ と弧 QR の比は SQ と SP の比に等しい。比例する量の連続する項の差を取ると、弧 PQ と弧 Rr の比は、 SQ と $SP - \sqrt{(SP \times SQ)}$ の比、 SQ と $\frac{1}{2} VQ$ 比と一致する。点 P と Q が一致する極限においては、 $SP - \sqrt{(SP \times SQ)}$ と $\frac{1}{2} VQ$ の最終比は等しくなるからである。さて、抵抗によって生じる弧 PQ の減少量、すなわちその 2 倍である Rr は、抵抗と時間の 2 乗とに比例する。したがって抵抗は、 Rr と $PQq \times SP$ の比に比例する。弧 PQ と Rr の比は $SQ : \frac{1}{2} VQ$ である。したがって $Rr : PQq \times SP = \frac{1}{2} VQ : PQ \times SP \times SQ$ となり、これは $\frac{1}{2} OS : OP \times SPq$ に等しい。点 P と Q が一致する極限では、 SP と SQ は一致し、角 PVQ は直

の螺旋線が与えられているとすれば、OS : OP の比は与えられた一定のものであるから、点 P における媒質の密度は 1 : SP に比例することになる。したがって、中心からの距離 SP に反比例して密度が変化する媒質の中では、物体はこの螺旋線に沿って運動することができる。(証明終わり)

系 1、任意の位置 P における速度は常に、抵抗のない媒質中において、中心から同じ距離 SP を半径とする円を描いて運動する場合の速度と等しい。

系 2、媒質の密度は、もし距離 SP が与えられているならば OS : OP に比例する。しかしその距離が与えられていないならば、OS : OP × SP に比例する。したがって、この螺旋線は任意の媒質密度に適合させることができる。

系 3、任意の位置 P における抵抗力は、同じ位置における向心力に対して $\frac{1}{2}$ OS : OP の比にある。これらの力はそれぞれ線分 Rr と TQ に比例し、 $\frac{1}{2}$ VQ × PQ : SQ および PQq : SP に比例する。これらを整理すると、 $\frac{1}{2}$ VQ : PQ の比となり、 $\frac{1}{2}$ OS : OP の比となる。したがって、螺旋線が与えられれば抵抗力と向心力の比が定まり、逆に、その力の比が与えられれば、それに対応する螺旋線が定まる。

系 4、したがって物体は、この螺旋線においては、抵抗力が向心力の半分より小さい場合にのみ回転運動することができる。もし抵抗力が向心力

角になるからである。また三角形 PVQ と PSO は相似であるので、 $PQ : \frac{1}{2} VQ = OP : \frac{1}{2} OS$ が成り立つ。ゆえに OS : OP × SPq は抵抗に比例する。これは点 P における媒質の密度速度の 2 乗の両者に比例する量である。ここで速度の 2 乗の比、1 : SP を取り除くと、点 P における媒質の密度は OS : OP × SP に比例することが残る。ある螺旋線が与えられているとする。すると OS と OP の比が一定であることから、点 P における媒質の密度は 1 : SP、SP に反比例する。したがって、中心 S からの距離 SP に反比例して密度が変化する媒質の中では、物体はこの螺旋線に沿って運動することができる。

系 I、任意の位置 P における速度は常に、抵抗のない媒質中において、中心から同じ距離 SP を半径とする円を描いて運動する場合の速度と等しい。

系 II、媒質の密度は、もし距離 SP が与えられているならば OS : OP に比例する。しかしその距離が与えられていないならば、OS : OP × SP に比例する。したがって、この螺旋線は任意の媒質密度に適合させることができる。

系 III、任意の位置 P における抵抗力は、同じ位置における向心力に対して $\frac{1}{2}$ OS : OP の比にある。これらの力は互いに $\frac{1}{2}$ Rr と TQ に比例し、 $\frac{1}{4}$ VQ × PQ : SQ および $\frac{1}{2}$ PQq : SP に比例する。これらを整理すると、 $\frac{1}{2}$ VQ : PQ の比となり、 $\frac{1}{2}$ OS : OP の比となる。したがって、螺旋線が与えられれば、抵抗力と向心力の比が定まり、逆に、その比が与えられれば、それに対応する螺旋線が定まる。

系 IV、したがって物体は、この螺旋線においては、抵抗力が向心力の半分より小さい場合にのみ回転運動することができる。もし抵抗力が向心力

の半分に等しくなるならば、この螺旋線は直線 PS と一致する。そしてこの直線上で物体は中心へ向かって下降するが、その速度は常に、先に我々が放物線の場合（第 I 巻定理 X）において示した、抵抗のない媒質中での下降速度の半分である。したがって、この場合の下降時間は、先の下降時間の 2 倍となる。したがってその時間を求めることができる。

系 5、そして、中心から等しい距離において、速度は螺旋線 PQR 上でも直線 SP 上でも同じであり、さらに螺旋線の長さとは直線 PS の長さとは一定の比にあり、OP と OS の比に等しい。したがって、螺旋線に沿って下降する時間は、直線 SP に沿って下降する時間に対して同じその与えられた比にある。ゆえに、その時間もまた求めることができる。

系 6、もし、中心 S を中心として、二つの与えられた半径で二つの円を描くならば、その二つの円の周のあいだで物体が完了する回転数は PS : OS に比例する。それは、螺旋線が半径 PS となす角の正接（tangent）に比例する。一方、それらの回転に要する時間は OP : OS に比例し、すなわち媒質の密度に反比例する。

系 7、もし、中心からの距離に反比例して密度が定まる媒質の中で、ある物体が中心のまわりを任意の曲線 AEB に沿って一回転し、そして最初の半径 AS を、点 B において、以前に A で切ったのと同じ角で再び切り、しかもそのときの速度が A における最初の速度に対して、中心からの距離の逆の平方根の比にある（AS と AS と BS の間の比例中項との比に等しい）ならば、その物体は BFC、CGD などの無数の同様の回転を続けて行い、そしてその交点によって半径 AS を AS、BS、CS、DS などの連続比例の部分に分割する。回転の時間は、軌道 AEB、BFC、CGD などの周長に

の半分に等しいならば、この螺旋線は直線 PS と一致する。そしてこの直線上で物体は中心へ向かって下降するが、その速度は、先に我々が放物線の場合（第 I 巻定理 X）において示した、抵抗のない媒質中での下降速度に対して、1 と $\sqrt{2}$ の比にある。また、この場合の下降時間は、速度に反比例する。したがってその時間も求めることができる。

系 V、そして、中心から等しい距離において、螺旋線 PQR 上の速度は直線 SP 上の速度と同じであり、また螺旋線の長さとは直線 PS の長さとは一定の比にあり、OP と OS の比に等しい。したがって、螺旋線に沿って下降する時間は、直線 SP に沿って下降する時間に対して同じその与えられた比にある。ゆえに、その下降時間もまた求めることができる。

系 VI、もし中心 S を中心として、任意に与えられた二つの距離で二つの円を描くとする。そしてこれらの円をそのまま保ったまま、螺旋線が半径 PS と成す角をどのようにでも変えるとする。このとき物体が螺旋に沿って一方の円周から他方の円周へ進みながら、その二つの円周の間で完了できる回転数は PS : OS に比例し、螺旋線が半径 PS と成すその角の正接（tangent）に比例する。一方、それらの回転に要する時間は OP : OS に比例し、同じ角の正割（secant）に比例し、また媒質の密度に反比例する。

系 VII、もし、中心からの距離に反比例して密度が定まる媒質の中で、ある物体が中心のまわりを任意の曲線 AEB に沿って一回転し、そして最初の半径 AS を、点 B において、以前に A で切ったのと同じ角で再び切り、しかもそのときの速度が A における最初の速度に対して、中心からの距離の逆の平方根の比にある（AS と AS と BS の間の比例中項との比に等しい）ならば、その物体は BFC、CGD などの無数の同様の回転を続けて行い、そしてその交点によって半径 AS を AS、BS、CS、DS などの連続比例の部分に分割する。回転の時間は、軌道 AEB、BFC、CGD などの周長に

比例し、またそれぞれの始点 A、B、C における速

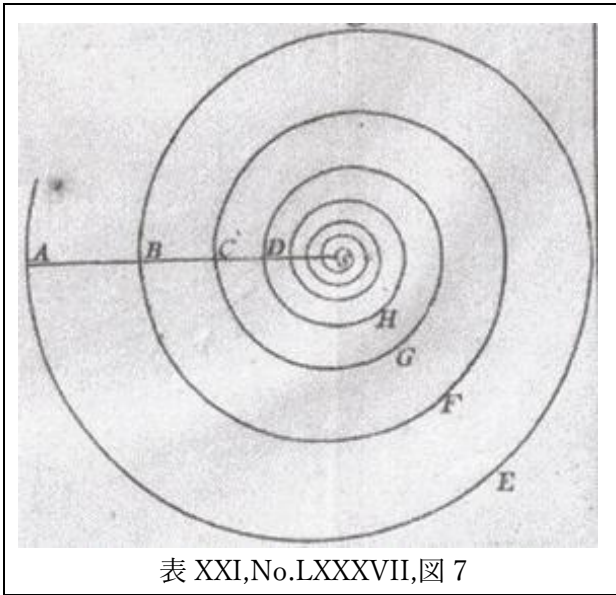


表 XXI, No. LXXXVII, 図 7

度には反比例する。したがってそれらは $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ に比例する。そして、物体が中心に到達するまでの全時間は、最初の一回転の時間に対して、無限に続く連続比例項 $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, ... の総和が、最初の項 $AS^{\frac{3}{2}}$ に対する比と同じ比になる。それは、最初の項 $AS^{\frac{3}{2}}$ が最初の 2 項の差 $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ に対する比に等しい。さらに近似的には、 $\frac{2}{3} AS : AB$ の比に等しい。したがって、この中心到達までの全時間は簡単に求めることができる。

系 8、

これらのことからまた、おおよそではあるが、密度が一様である媒質、または任意に与えられた法則に従って変化する密度をもつ媒質の中での物体の運動を推定することもできる。中心 S を中心として、距離 SA, SB, SC などが連続比例となるようにして、いくつでも円を描け。

そして、これらの円のうち任意の二つの円周の間で行われる回転数が、前に論じた媒質における回転数と、今考える媒質における回転数とで、与えられた媒質の、その 2 円の間における平均密度と

比例し、またそれぞれの始点 A、B、C における速

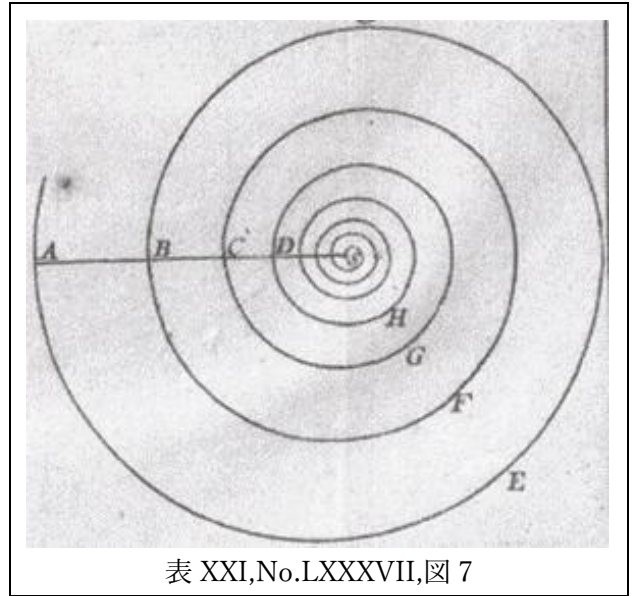


表 XXI, No. LXXXVII, 図 7

度には反比例する。したがってそれらは $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ に比例する。そして、物体が中心に到達するまでの全時間は、最初の一回転の時間に対して、無限に続く連続比例項 $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, ... の総和が、最初の項 $AS^{\frac{3}{2}}$ に対する比と同じ比になる。それは、最初の項 $AS^{\frac{3}{2}}$ が最初の 2 項の差 $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ に対する比に等しい、あるいはほぼ $\frac{2}{3} AS : AB$ の比に等しい。したがって、この中心到達までの全時間は簡単に求めることができる。

系 VIII、

これらのことからまた、おおよそではあるが、密度が一様である媒質、または任意に与えられた法則に従って変化する密度をもつ媒質の中での物体の運動を推定することもできる。中心 S を中心として、距離 SA, SB, SC などが連続比例となるようにして、いくつでも円を描け。

そして、これらの円のうち任意の二つの円周の間で行われる回転の時間が、前に論じた媒質における回転時間と、今考える媒質における回転時間とで、与えられた媒質の、その 2 円の間における平

先に論じた媒質の、その同じ円の間における平均密度との比に、ほぼ等しいものとする。さらに同じ比は、前に論じた媒質において、既定の螺旋が半径 AS と成す角の正接 (tangent) と、今考える媒質において、新しい螺旋が同じ半径 AS と成す角の正接 (tangent) との比にも等しいものとする。また、これらの角の正割 (secant) の比と同じ比で、同じ2円の間で行われるすべての回転の時間も、ほぼその比に等しいものとなる。もしこれらのことを、各2円の間ごとに至るところで行えば、その運動はすべての円を通じて連続することになる。そしてこの方法によって、どのような規則的な媒質においても、物体がどのような仕方で、またどのような時間で回転運動を行うべきかを、さほど困難なく想像することができる。

系9、そして、離心的な運動(中心からずれた運動)が、楕円形に近い形の螺旋において行われるとしても、それらの螺旋の各回転が互いに同じ間隔だけ離れているものと考え、またそれらが上で述べた螺旋と同じ段階(同じ割合)で中心へ近づくものと考えれば、そのような螺旋において物体の運動がどのように行われるかを、われわれは理解することができる。

命題 XVI、定理 XII

もし、媒質の密度が各場所において、中心からの距離のあるべきに反比例し、また向心力が、その距離の同じべきに比例した距離に反比例するならば、物体はある螺旋上を回転運動することができる。その螺旋は、その中心から引かれるすべての半径と、一定の角をなして交わるものである。

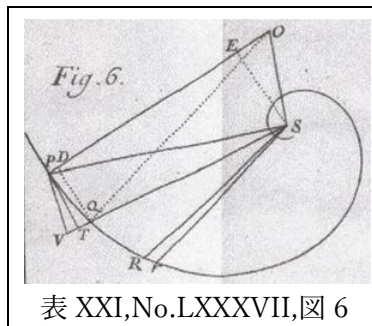


表 XXI, No. LXXXVII, 図 6

これは前の命題と同じ方法によって証明される。もし、点 P における向心力が、距離 SP のあ

均密度と前に論じた媒質の、その同じ円の間における平均密度との比に、ほぼ等しいものとする。さらに同じ比は、前に論じた媒質において、既定の螺旋が半径 AS と成す角の正割 (secant) と、今考える媒質において、新しい螺旋が同じ半径 AS と成す角の正割 (secant) との比にも等しいものとする。また、これらの角の正接 (tangent) の比と同じ比で、同じ二つの円の間で行われるすべての回転数も、ほぼその比に等しいものとなる。もしこれらのことを、各2円の間ごとに至るところで行えば、その運動はすべての円を通じて連続することになる。そしてこの方法によって、どのような規則的な媒質においても、物体がどのような仕方で、またどのような時間で回転運動を行うべきかを、さほど困難なく想像することができる。

系 IX、そして、離心的な運動(中心からずれた運動)が、楕円形に近い形の螺旋において行われるとしても、それらの螺旋の各回転が互いに同じ間隔だけ離れているものと考え、またそれらが上で述べた螺旋と同じ段階(同じ割合)で中心へ近づくものと考えれば、そのような螺旋において物体の運動がどのように行われるかを、われわれは理解することができる。

命題 XVI、定理 XIII

もし、媒質の密度が各場所において、動かない中心からの距離に反比例し、また向心力が、その同じ距離のあるべきに反比例するならば、物体はある螺旋上を回転運動することができる。その螺旋は、その中心から引かれるすべての半径と、一定の角をなして交わるものである。

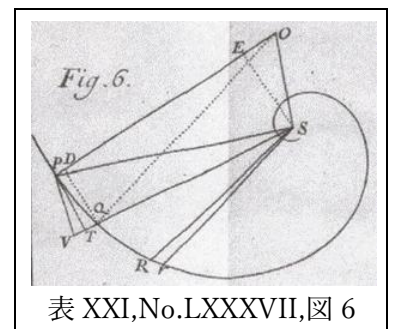


表 XXI, No. LXXXVII, 図 6

これは前の命題と同じ方法によって証明される。もし、点 P における向心力が、距離 SP のあ

るべき SP^{n+1} に反比例するとし、その指数が $n+1$ であるならば、前と同様にして次のことが導かれ

る。物体が任意の弧 PQ を描く時間は $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$ に比例する。また点 P における抵抗は

$Rr : PQq \times SP^n$ に比例し、あるいは

$\frac{1}{2}VQ : PQ \times SP^n \times SQ$ に比例し、

$\frac{1}{2}OS : OP \times SP^{n+1}$ に比例する。それゆえ、点 P における媒質の密度は SP^n に反比例する。

るべき SP^{n+1} に反比例するとし、その指数が $n+1$ であるならば、前と同様にして次のことが導かれ

る。物体が任意の弧 PQ を描く時間は $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$ に比例する。また点 P における抵抗は

$Rr : PQq \times SP^n$ に比例し、あるいは

$\left(1 - \frac{1}{2}n\right)VQ : PQ \times SP^n \times SQ$ に比例し、

$\left(1 - \frac{1}{2}n\right)OS : OP \times SP^{n+1}$ に比例する。

$\left(1 - \frac{1}{2}n\right)OS : OP$ が与えられているので、 SP^{n+1}

に反比例する。それゆえ、速度が $SP^{\frac{1}{2}n}$ に反比例するので、点 P における媒質の密度は SP に反比例する。

系 I、抵抗は向心力に対して $\left(1 - \frac{1}{2}n\right)OS : OP$

の比にある。

系 II、もし、向心力が SP^{cub} に反比例するならば、 $1 - \frac{1}{2}n = 0$ となる。したがって抵抗も媒質の密度もゼロとなる。これは第 I 巻第 IX 命題の場合と同様である。

系 III、もし、向心力が、半径のあるべきに反比例し、その指数が 3 より大きいならば、抵抗は正のものから負のものへと変わる。

No. LXXXVII I I ベルヌーイ氏の手紙からの抜粋

1711 年 1 月 10 日、バーゼルにて書かれた書簡。

そこでは、抵抗する媒質の中での中心力を求める方法について述べられており、
その抵抗は、媒質の密度と、運動体の速度の任意のべきとの合成比に従うものとされている。

補題

重力のような一定の力 P によって押される物体が、静止から出発して距離 S を進むとき、その時間 T は $T = \sqrt{(2S : P)}$ で表される。

パリ王立科学アカデミー紀要

1711 年版

パリ版 P.47、オランダ版 P.59

証明

時間 T の終わりに得られる速度を V とする。すると $dS : V = dT$ 、 $PdS : V = PdT = dV$ となる。したがって $PdS = VdV$ である。これを積分すると $PS = \frac{1}{2}VV$ 、 $V = \sqrt{2PS}$ となる。これを先の $dS : V = dT$ に代入すると $dS : \sqrt{2PS} = dT$ となる。これを積分すれば $T = \sqrt{(2S : P)}$ となる。(証明終わり)

問題

密度がある与えられた法則に従って変化する媒質の中で、その媒質が密度と、あるべき上の速度との合成比に比例して運動体に抵抗するとき、運動体が与えられた曲線を描くために必要な中央力を求めよ。

解法

与えられた曲線 CFK において、 A を力の中心とする。 AC (または AF) $= x$ 、 $FB = dx$ 、 $CB = dy$ 、 $CF = ds$ とする。また、 v を点 C における物体の速度、 dt を弧 CF を通過する時間、 f を点 C における中心力、 r を点 C における展開曲線の曲率半径、 n を速度のべき (速度が何乗で現れるかという指数)、 z を点 C における媒質の密度、 c を単位の数 ($lc=1$) とする。さらに p, q を x, y および定数からなる与えられた量とする。これらの量 p, q は後に決定される。

中心力 f を二つに分解する。接線 EC の方向と、その垂線 Ee の方向に沿ってである。第一の成分 (接線方向) は $f dx : ds$ 、第二の成分 (垂直方向) は $f dy : ds$ となる。しかし、この (垂直方向の) 力によってのみ、物体は接線 CE を離れて、曲線上の点 e に到達するよう強いられるのである。したがって、ここには、最初は一様とみなされる力が存在し、この力は、物体が時間 dt のあいだに CE (あるいは CF 、または Ce) を進むことができるその時間内に、点 E から e へ、距離 Ee だけ物体を落下させる。ここで CE, CF, Ce の三つの長さは互いに等しいものとみなされる。それらの差は無限小であり、各長さそのものに比べて無限に小さいからである。したがって、前の補題により、 S の代わりに小線分 Ee (これは $ds^2 : 2r$ に等しい) を、また P の代わりに曲線へのこの垂線方向の力 $f dy : ds$ を、さらに T の代わりに dt を代入すると、 $\sqrt{(ds^3 : f dy)} = dt = ds : v$ となる。これから $f = v ds : r dy$ となる。

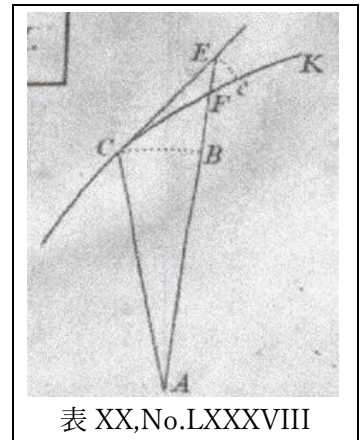


表 XX, No. LXXXVIII

このようにして f の値が求められたので、それを前に述べた接線 EC の方向の力 $f dx : ds$ に代入すると、 $f dx : ds = v dx : r dy$ という力の式になる。さらにこれに、媒質の抵抗力を (運動体が中心 A から遠ざかりながら上昇する場合には加え、中心へ近づきながら下降する場合には差し引くようにして) 考

慮しなければならない。この抵抗力は仮定によって zv^n である。したがって、これらを合わせると、運動体が上昇する際には引き戻され、下降する際には押し進められる、実際の（絶対的な）力が得られる。したがって、接線 EC の方向におけるこの絶対力は $vvd\mathbf{x}:rd\mathbf{y} \pm zv^n$ である。これに時間要素 dt 、つまり $ds:v$ を掛けると $vds\mathbf{x}:rd\mathbf{y} \pm zv^{n-1}ds = -dv$ となる。これは速度の微小変化に等しい。したがって、 $dv:v + ds\mathbf{x}:rd\mathbf{y} \pm v^{n-2}zds = 0$ が得られる。さらに、 dx, dy, ds, r, z の関係は x, y , および定数によって与えられているので、 $p = ds:r\mathbf{y}, qdx = zds$ と置けば、式は $dv:v + p\mathbf{x} \pm v^{n-2}qdx = 0$ となる。この最後の方程式から文字 v を取り除くことが問題である。私はこれを、1697 年ライプツィヒの Acta Eruditorum の P.115 (No.XXXV, P.112-113 を参照) で用いた方法により行う。 $v = M \times N$ と仮定する。この v の値を、その微分とともに前の最後の方程式に代入すると、その式は、

$dM:M + dN:N + p\mathbf{x} \pm M^{n-2} \times N^{n-2} \times qdx = 0$ という形に変わる。M と N を求めるために、まず $dM:M + p\mathbf{x} = 0$ とおき、また $dN:N \pm M^{n-2} \times N^{n-2} \times qdx = 0$ と置く。最初の仮定から

$lM = -\int p\mathbf{x} \times lc(c:const.)$ が得られる。したがって $M = c^{-\int p\mathbf{x}}$ となる。そしてこの M の値を代入すると、もう一方の式は $N^{1-n}dN = \mp c^{(2-n)\int p\mathbf{x}} qdx$ となる。積分すれば $\frac{1}{2-n} N^{2-n} = \mp \int c^{(2-n)\int p\mathbf{x}} qdx$ となり、これから $N = \sqrt[2-n]{\left(\mp 2 \pm n \right) \int c^{(2-n)\int p\mathbf{x}} qdx}$ となる。したがって、これらの M と N の値を互いに掛け合わせた $M \times N$ 、速度 v が得られる。 $v = c^{-\int p\mathbf{x}} \sqrt[2-n]{\left(\mp 2 \pm n \right) \int c^{(2-n)\int p\mathbf{x}} qdx}$ 。この平方を、上で得られていた $f = vvd\mathbf{x}:rd\mathbf{y} = pvv$ に代入すれば、ついに求める中央力

$f = pc^{-\int p\mathbf{x}} \sqrt[1-\frac{1}{2-n}]{\left(\mp 2 \pm n \right) \int c^{(2-n)\int p\mathbf{x}} qdx}$ が得られる。ただし常に、上側の符号は上昇する運動体に対し、下側の符号は下降する運動体に対することを忘れてはならない。

この式の中には、 x, y , および定数によって与えられる量しか含まれておらず、時間は考慮されていないことが分かる。したがって時間は、今や非常に容易に決定することができる。なぜなら $dt = ds:v$ だからである。

備考

I、これらすべてから得られる有用性は、ニュートン氏がその「プリンキピア」において、P.260 (No.LXXXVII, P.316 を参照) の問題 III の解法を P.265 (No.LXXXVII, P.321 を参照) で円 ACK に適用した際に生じてしまった、いくつかの誤りを避けることにある。この誤りは次の点にある。中心 O から半径 OC を任意に鉛直四分円 OLCK の中に引き、点 C から水平直径 AK に対して B で垂線 CB を下ろすとする。するとニュートンはその P.265 で、一定の重力を受ける物体 C が、L から K へ落下しながら空中で四分円 LCK を描くためには（彼はこの物体が上昇しながらその円弧を描くことはできな

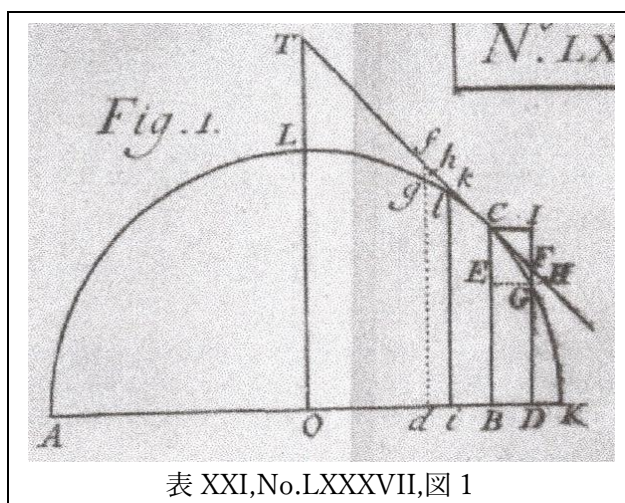


表 XXI, No.LXXXVII, 図 1

いと考えている)、この媒質の抵抗は各点 C において重力に対し $OB:OK$ の比でなければならない、またその点 C における速度は $\sqrt{2 \times BC}$ に比例するであろう、と述べている。しかしこれは明らかな矛盾を含んでいるのであり、私はそれを次のように示す。

媒質の抵抗を R 、物体の重力を P 、またこの重力が円弧上の各点 C において接線方向に及ぼす力を n とする。すると $P:n = OC:OB = OK:OB$ であることは知られている。したがってニュートンによれば $R:P = OB:OK$ であるから、比を合成すれば、 $R:n = OB:OB$ 、 $R=n$ となる。したがって、媒質の抵抗 R は、重さ P による力 n がその運動体に与えるのと同じだけの加速度を取り去ることになる。したがってまた、この運動体の速度はここでは常に同じで一定（等速）であるはずである。ところが、ニュートン氏はその速度を $\sqrt{2 \times BC}$ に比例して変化すると述べている。これが、私が示そうとしていた矛盾である。

この欠点を補うために、私は次のように考える。ここでは $R:P = 3 \times OB:2 \times OK$ でなければならない。なぜなら、先の解法では次の記号を用いていたからである。 v を点 C における運動体の速度、 r をその点における展開曲線の半径、 ds を曲線 LCK 上の微小弧 CG、点 G から $CB=x$ に垂線 $GE=dy$ を下ろす、 f を運動体の重力、 zv^n を媒質の抵抗とし、この重力と抵抗から、次の関係が得られていた。

$fdx:ds = vvd x:rdy$ さらに $vvd sdx:rdy \pm zv^n ds = -v dv$ が成り立つ。最初の等式から $vv = frdy:ds$ が得られ、これを第 2 式に代入すると $fdx + zv^n ds = -v dv$ となる。さてこの場合には $f = P, r = OC$ また $dy:ds = EG:GC = BC:OC$ であり、さらに $zv^n = R$ だから、 $vv = P \times OC \times BC:OC = P \times BC = P \times x$ となる。そして $P \times dx \pm R ds = -v dv$ という式が得られる。さて、(P が一定であるから) $vv = P \times x$ より $v dv = \frac{1}{2} P \times dx$ が成り立つ。したがって同様にここでは $P \times dx \pm R \times ds = -\frac{1}{2} P \times dx$ となる。ここから $P:R = \mp 2ds:3dx = \mp 2CG:3CE = \mp 2OC:3OB = \mp 2OK:3OB$ となる。したがって、最初の仮定の式、 $R:P = 3 \times OB:2 \times OK$ が示された。

II、ニュートン氏はさらに、命題 XVI.P.288 (No.LXXXVII,P.332 を参照) においても誤りを犯している。その命題では次のように述べている。もし、ある物体がすべて同一点へ向かう中心力によって引かれながら、その点の周囲を運動し、しかもその物体が運動する媒質の密度が、その点からの距離の任意の冪 n に反比例し、さらに中心力が同じ距離の冪 $n+1$ に反比例するとするならば、その物体は対数螺旋を描くことになる。そしてその螺旋の極（中心）は、これらすべての力が向かうその点である。しかし、私は自分の解析によって、この命題は $n=1$ の場合、この命題の前にある命題 XV の場合においてのみ正しいことを見出した。

螺旋の各半径を x 、その半径と常に同じ角をなす一定角のセカント (secant) を b 、全正弦 (sinustotus) を 1、対数が 1 である数を c 、螺旋の中心へ向かう運動体の各中心力を f 、その運動体の速度を v 、媒質の抵抗を R 、その一部をなす密度を D とする。そしてニュートン氏に従って $D = 1:x^n$ 、および $R = mvv \times D$ と仮定すると、私の解析によれば、この場合に運動体が対数螺旋を描くためには必要な中心力は $f = x^{-3 \times c \mp 2mbx^{1-n}:(1-n)}$ でなければならない、ニュートン氏が述べるような $f = 1:x^{n+1}$ ではないことが分かる。ここから次のことが分かる。この場合に必要な中心力は、ニュートンの言うように $f = 1:x^{n+1}$ であるどころか、この力は x のどのべきにも等しくなり得ない。ただし $n=1$ と仮定する場合だけは例外である。また私は、この場合の速度は $f = x^{-1 \times c \mp 2mbx^{1-n}:(1-n)}$ となり、さらに

$R:f=m:x^{n-1}$ でなければならないことを計算した。二重符号干の上の符号はここではすべて上昇の場合、下の符号は下降の場合に対応する。さらに、中心力 f の式は $c^{+2mba^{1-n}:(1-n)}$ の定数倍、また速度 v の式も $c^{+2mba^{1-n}:(1-n)}$ の定数倍で表すことができる。

III、さらに注意すべきこととして、ニュートン氏の命題 XV.P.284 (No.LXXXVII,P.327 を参照) には、その命題の記述よりもいっそう一般的な形で成立するという点がある。ニュートンがそこで置いている次のような制限、「中心力は密度の 2 乗の比に比例するものとする」という条件の代わりに、「中心力は密度の任意のべきに比例するとしてよい。ただし、運動体が上昇する場合にはそのべきは 3 乗より大きく、下降する場合には 3 乗より小さくしなければならない。」のように説明できるからである。実際、ニュートン氏のように密度のべきの指数を 2 とするのではなく、一般に k とおき中心力を $f=x^{-k}$ とする（その他の条件は上記第 2 節と同じとする）ならば、私の解析によって $D=(3-k):\mp 2mbx$ が得られる。この場合、密度 D は運動体の螺旋の中心からの距離 x に反比例しなければならないだけでなく、さらに $(3-k):\mp 2mb$ は正の数でなければならない。密度 D が実在可能であるためには必要がある。したがって、運動体が上昇する場合には、 $k<3$ でなければならない。さらに、一般に抵抗 R と中心力 f の比は $R:f=3-k:\mp 2b$ となることも分かる。また、速度 v は $D^{(k-1)/2}$ に比例する。このことから、ニュートン氏が命題 XV.P.284 (No.LXXXVII,P.327 を参照) において、その命題の適用範囲を十分に広く述べていないことが分かるであろう。すなわち、彼はそこで「密度の 2 乗の比において」と述べているが、その代わりに「密度の任意のべきの比において」と言うことができるのである。ただし常にすでに述べた制限、 k が 3 より大きい、あるいは小さいかという条件を付ける必要がある。

IV、前節第 3 条から次のことが導かれる。もし $k=3$ であれば、密度 $D[(3-k):\mp 2mbx]$ は 0 となり、中心力は $f[x^{-k}]=x^3=1:x^3$ となる。ここから分かるのは、前節第 3 条において、媒質の抵抗 $R[mvvD]$ にもかかわらず、運動体に対数螺旋を描かせる中心力 $f=x^{-k}$ は、 $k=3$ となって密度 $D[(3-k):\mp 2mbx]$ が 0 になる場合にも、やはり同様に対数螺旋を描かせるということである。このときの中心力 $f=x^{-3}$ は、抵抗のない空間、通常真空と仮定されるような空間において、運動体の中心（あるいは螺旋の極）からの距離 x の 3 乗に反比例する力として働く限り、運動体は対数螺旋を描くのである。このことは、私たちが別のところからすでに知っている真理であり、実際にニュートン自身も「プリンキピア」P.47 で証明している。したがって、この事実は、私が彼（ニュートン）に対して行っているすべての議論に、さらに大きな重みを与えるものである。

付記

本論文の著者の甥であるニコラ・ベルヌーイ氏による付記

次の等式 $wv = frdy:ds$ および $z = (fdx + vdv):\mp ds$ 、これらが正しいことについて私は完全に確信している。ニュートンが「プリンキピア」P.263 (No.LXXXVII,P.318 を参照) で述べている半円の場合に適用してみたところ、それらは著者の解と一致しないことが分かった。さらにまた、抵抗が中心力に対して $OB:OK$ の比にあると仮定すると、そこから明白な不合理が生じることも認められる。彼の計算の中には誤りを全く見出せなかったから、私は、ニュートン氏の推論には必ずどこか誤りがあるはずだと判断した。そこで私は、その誤りを探し出したいという興味を持ち、彼の一般解法を注意深く検討したところ、ついにその原因を見つけた。その誤りは系 III.P.263 にあり、そこでは著者が次のように述べている。「ここから、曲線が基底すなわち横座標 AB と縦座標 BC の関係によって定義され、その縦座標

の値を収束級数に展開するならば、問題はその級数の最初の数項によって容易に解かれる。」この点を除けば、私はニュートン氏のこの解法を非常に正確なものだと認めている。

それは、不定で変化する量を収束級数に変換する方法であり、その級数の各項を、それぞれの微分量に対応するものとして取る方法である。第2項を1次微分、第3項を2次微分、第4項を3次微分、に対応するものとして扱う、という方法である。私が言いたいのは、まさにこの方法こそが、ニュートン氏をして、私が先ほど述べた例およびその後続く例において、誤った解に導いた原因であるということである。この微分の取り方は、著作「求積論 (De Quadraturis)」の末尾の補足説明でも採用している方法であるが、1次微分の場合にしか有効ではないからである。より高次の微分について言えば、それらはこのような収束級数の各項によって表されるものではない。その級数の項は、これらの微分量に対して単に比例しているにすぎず、決してそれらと等しいものではないからである。このことは、彼が補足説明で示している例によっても分かる。

この例では z^n を微分することが問題である。そのためにニュートン氏は、この補足説明において z^n の代わりに $(z+o)^n$ を取り、この二項式を級数 $z^n + nz^{n-1}o + \frac{nn-2}{2}z^{n-2}oo + \frac{n^3-3nn+2n}{6}z^{n-3}o^3 + \dots$ に展開する。そして彼は、第2項 $nz^{n-1}o$ を1次微分、第3項 $\frac{nn-n}{2}z^{n-2}oo$ を2次微分、第4項 $\frac{n^3-3nn+2n}{6}z^{n-3}o^3$ を3次微分とし、順に続けていく。しかし、もし彼自身が同じ著書「求積論 (De Quadraturis)」の冒頭で与えた微分の規則に従い、 o (すなわち dz) を定数と仮定したならば、次の結果を得たはずである。 z^n の2次微分は $\frac{nn-n}{2}z^{n-2}oo$ 、3次微分は $\frac{n^3-3nn+2n}{6}z^{n-3}o^3$ 、……となるはずである。

このように、P.263の半円の例において、縦座標 $BC=e$ の値である $\sqrt{(nn-aa)}$ を微分すると、ニュートン氏が用いた級数 $e-ao:e-nnoo:2e^3-anno^3:2e^5-\dots$ の代わりに、 $e-ao:e-nnoo:e^3-3anno^3:e^5-\dots$ が得られる。そこから次の値が導かれる。 $Q=a:e, R=nn:e^3, S=3ann:e^5$, これらの Q,R,S の値を代入すると $S\sqrt{(1+QQ)}:2RR=\frac{3ann}{e^5}\sqrt{(1+aa:ee)}:\frac{2n^4}{e^6}$
 $=\frac{3ann}{e^6}\sqrt{(ee+aa)}:\frac{2n^4}{e^6}=3an^3:2n^4=3a:2n=3\times OB:2\times OK$ が得られる。抵抗と中心力の比は $3OB$ と $2OK$ の比に等しいということになる。これは私の叔父が得た結果と一致する。

同じ修正を P.268 と P.269 の例3および例4に適用すると、次の結果が得られる。

例3では抵抗と中心力の比は $3\times XY:2\times YG$ となる。これはニュートンの、 $XY:YG$ ではない。また例4では、 XY と $(2nn+2n)VG:(n+2)$ の比となる。これはニュートンの、 XY と $(3nn+3n)VG:(n+2)$ とは異なる。これらの結果はから、 $vv=frdy:ds, z=(fdx+vdv):\mp ds$ という公式が導かれる。

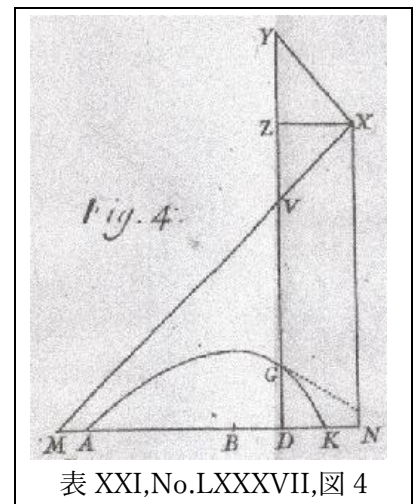


表 XXI, No. LXXXVII, 図 4

No. LXXXIX

角や弧を、任意の数に分割する問題

級数（無限級数）の助けを用いず、普遍公式によって表されたもの。

そしてそこから、角の方程式を容易に構成する方法が導かれる。

著者：ヨハン・ベルヌーイ。

私はすでに Acta Eruditorum の 1701 年の P.170 以降

学術誌 Acta Eruditorum の
1712 年 6 月号の P.274

(No.LXIX,P.253 を参照) において、円の弧を任意の数の部分に分割する方法、またはそれを倍化する方法を示した。その方法は、いくつかの級数を用いるものである。そしてその級数は、もし分割数あるいは倍数が整数で正の数である場合には、途中で打ち切れ、その数の大きさに応じて多少の有限個の項だけを残す。このような場合には、問題は常に多少複雑ではあるが代数的問題として存在するからである。しかしながら、問題を不定の形で考えるとそれは超越的なものとなり、超越的問題は、純粋に有限量からなる方程式によっては解くことができない。ただし例外として、双曲線の求積・対数に帰着されるものだけは解くことができる。それらは、連続的に進行する方程式、あるいは偉大なるライプニッツが呼ぶところの、指数的方程式を許すからである。それらは有限の量から成るが、次元が不定である量によって表される。したがって一見すると、弧や角の不定分割を決定することは、級数による以外には不可能であるように思われる。円の求積と双曲線の求積を互いに還元する方法はまだ発見されておらず、むしろ多くの幾何学者によってほとんど不可能と考えられているからである。

しかしながら、善き読者は次のことを考慮してほしい。私が Acta Eruditorum の 1703 年の P.31 および王立科学アカデミー紀要のパリ版の P.297 (No.LXX,P.262 を参照) において示した、円の扇形を虚数対数とみなすべきことについての議論である。これは、私がまず微分の有理分数を積分する一般的方法を教えた後に述べたものであり、その方法は、完全に（補助的仮定なしに）行う場合でも、円の求積、双曲線の求積、またはその両方を仮定して行う場合でも、いずれにも適用できるものである。これらの事柄を、現在の目的のためにどのように用いるべきかは明確である。角の任意分割の問題に対して、たとえ一般形（次数が進行する形）ではあっても、有限の方程式を与えることである。その方程式には確かに虚数、すなわち不可能量が含まれるであろう。しかしそれらは、どの具体的な場合においても消滅する。したがって、それ自体では不可能であるものも、可能なものを見出すために役立つ。そしてそれは我々の目的に合っているものであり、しかも量を軽く即座に代入するだけで実行できる。このことは、これから述べることによって明らかになるであろう。

円の半径を 1 とする。任意の弧を A とする。その弧の任意の倍数または分数倍を $nA = B$ とする。また、弧 A の正接 (tangent) を x 、弧 B の正接を y とする。微分計算から次のことが知られている。 $dA = dx : (xx+1)$, $dB = dy : (yy+1)$ 。ここで仮定により $nA = B$ 、 n は定数なので $ndA = dB$ となる。したがって $ndx : (xx+1) = dy : (yy+1)$ である。そこで両辺に $2\sqrt{-1}$ を掛ける（これは後で不可能量を含むとしても、対数の微分に分解できるようにするためである）。すると、 $2ndx\sqrt{-1} : (xx+1) = 2dy\sqrt{-1} : (yy+1)$ となる。これを、前に引用した箇所でも説明した方法で分解すると、次の等式が得られる。 $ndx : (x - \sqrt{-1}) - ndx : (x + \sqrt{-1}) = dy : (y - \sqrt{-1}) - dy : (y + \sqrt{-1})$ 、これは対数微分の形で表されたものである。そこで積分を取ると、対数の間に次の関係式が得られる。

$nl(x-\sqrt{-1})-nl(x+\sqrt{-1})=l(y-\sqrt{-1})-l(y+\sqrt{-1})$ これを通常の方法で数の形に直すと

$$\left(\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}\right)^n = \frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}$$
となる。整理すると $(x-\sqrt{-1})^n(y+\sqrt{-1})=(x+\sqrt{-1})^n(y-\sqrt{-1})$ と

なる。これは任意の弧を倍にする場合でも、また分割する場合でも利用できる一般方程式である。この式の中に $\sqrt{-1}$ という不可能量（虚数）が現れることは問題ではない。具体的な個々の問題に適用すると、この量は方程式の各項に現れるため、最終的には除去されて消えるからである。

ここでひとまず次のことを注意しておきたい。 n が偶数を表す場合、求められた y の値は、求めるべき弧 B 自身の正接ではなく、その弧の直角に対する余角の正接を表すことになる。この理由は、対数微分を積分する過程から明らかである。

さらに、われわれの次の普遍方程式 $(x-\sqrt{-1})^n(y+\sqrt{-1})=(x+\sqrt{-1})^n(y-\sqrt{-1})$ を注意深く考察すれば、与えられた弧 A の任意の倍角または分角 n に対応する弧 B の正接を表すための最も一般的な規則がそこから導かれる。しかもそれは驚くほど容易で簡潔な方法によって得られるのである。その規則は次の通りである。まず $x+\sqrt{-1}$ を n 乗にする。そして、その展開に現れる項のうち、符号が交互に変わる形で交互の項を取り出して分数を作る。分子には第1項・第3項・第5項…、分母には第2項・第4項・第6項…を取る。このようにして得られる分数が、求める弧 B の正接を表す。ただし、 n が奇数ならば弧 B の正接、 n が偶数ならばその余角 $(90^\circ-B)$ の正接を与える。

例 I、 $n=4$ ならば、 $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6xx + 4x + 1$ となる。この展開の項を交互に取り出し、符号を交互に変えて、 $(x^4 - 6xx + 1):(4x^3 - 4x)$ という分数を作る。さて、 n が偶数であるため、この分数は弧 B の余角の正接に等しい。したがって、分子と分母を入れ替えれば $(4x^3 - 4x):(x^4 - 6xx + 1)$ が、弧 B の正接を表す。

例 II、 $n=5$ ならば、 $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ となる。そして、前に述べた規則に従ってこれらの項を並べると、 $(x^5 - 10x^3 + x):(5x^4 - 10xx + 1)$ という分数が得られる。さて、 n は奇数であるから、この分数は弧 B の正接に等しい。

例 III、 $n=6$ ならば、 $(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15xx + 6x + 1$ となる。ここで n が偶数であるため、偶数番目の項を分子に、奇数番目の項を分母にとると、 $(6x^5 - 20x^3 + 6x):(x^6 - 15x^4 + 15xx - 1)$ という分数が作られる。そしてこの分数は弧 B 、弧 A の6倍の正接を表す。

もし級数を用いることを望むならば、 n が偶数か奇数かの区別をまったく設けることなく、任意の倍角 n に対する弧の正接を一般的に表すことが

同書7月号 P.329

できる。その方法は、 $(x+1)^n$ を展開したときの最後の項から始めて、それを第1項として扱い、第2・第4・第6…項を分子に、第1・第3・第5…項を分母に取り、符号を常に交互に変えて分数を作れば、その分数は弧の n 倍角の正接の値をすべての場合について与える。つまり、 n が偶数でも奇数でも区別なく成り立つ。さらに言えば、 n が分数であっても、あるいは無理数であっても同様である。このことを、私は次に代数記号を用いて説明する。

なぜならば、次のことが成り立つからである。 $(x+1)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3$
 $+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5 + \dots$ さて、前に述べたように、 x を単一の弧 A の正

接、 n をその弧を何倍するかを示す数とすれば、弧の n 倍角 B の正接は

$\left(nx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}x^5 - \dots \right) : \left(1 - \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}x^4 - \dots \right)$ となる。

この一般公式から、さらに次のような有用性も得られる。外接多角形の辺、または内接多角形の辺も、簡単に求めることができるのである。その方法は、この分数の分子を x で割ったものを 0 に等しいとおくことである。すると、その方程式の根は外接多角形の半边に等しくなる。ここで、多角形の辺の数は n 、円の半径は 1 である。その証明については、前に述べたことから注意深く考えれば容易に理解できるので、私は喜んでこれを省略する。

No. XC

重い物体、振り子、そして投射体の運動について
「抵抗のある媒質およびない媒質における、重力（一定および変化する場合）
のもとでの物体運動、ならびに任意の点へ向かう力などに関する幾何学的証明」
著：ヨハン・ベルヌーイ

I

この問題を以前すでに論じたのは、あらゆる称賛にもまさる人物、アイザック・ニュートンであり、彼の比類なき著作「自然哲学の数学的原理」においてである。そしてこのことが、この問題について私の考察を

学術誌 Acta Eruditorum の
1713 年 2 月号の P.77

公表する契機を与えた。この点について、私は不当なことをしているとは思われないだろう。私があの高名な人物が時に真理の目標からそれていたことを示すからである。しかしそのようなことは私だけでなく、数学的真理を汚れなく愛する者なら誰でも、ニュートン自身でさえも隠すべきでも、覆い隠すべきでもないと考えるであろう。とりわけこの偉大な幾何学者の権威はきわめて大きく、このような複雑で難解な問題においては、多くの人々が自ら検討するよりも、むしろ賛同してしまう傾向を持つからである。さて、現在の問題に係る事柄については、私自身の考えでは、すでに以前にかなり詳しく研究しており、その解析的方法については、すでに別のところで発表するために発表してある。

(No, LXXXVIII を参照) しかしここでは、合成的方法による証明へと還元できるものだけを述べることにした。そしてそれらは、「自然哲学の数学的原理」第 II 巻第 II 部命題 X の解決へと至る道を開くものである。その命題では、抵抗のある媒質の中で与えられた曲線を描いて運動する重い物体について次のものを求める問題が扱われている。各点における速度、媒質の抵抗。媒質の密度である。しかもこれは水平線へ向かう一定の重力の場合だけでなく、さらに大きさが連続的に変化し、かつ任意の一点へ向かう重力の場合についても成り立つ。これらのことは、以下の議論から明らかになるであろう。

I I、定理 I

A および B を互いに異なる二つの重力とする。ただし両者はいずれも一定加速度であるとする。このとき、A によって作用される物体と、B によって作用される物体とが、ともに静止から出発して等しい距離を運動したときに得る速度は、それらの力の平方根の比である。なお、ここでは抵抗のない媒質を仮定する。

証明、一つの物体が自然の重力 A によって鉛直に降下し、点 L から出発して鉛直線 LM に沿って運動するとする。他方の物体は、同じ点 L から出発するが、傾斜面 LN に沿って降下を開始するものとする。さて、この後者の物体は重力の全体によって押されるのではなく、そのうち的一部分、全体に対して $LM : LN$ の比にある成分のみによって押される（ただし角 LMN は直角とする）。これは力の合成および分解から明らかである。したがって、この状況は、あたかもこの第 2 の物体が直線 LN に沿って、重力 A よりも小さいある一定の力 B によって直接に押されるのと同じである。ただし、その比は $A : B = LN : LM$ となる。さて、すでに知られていることであるが、点 M と点 N における速度は互いに等しい。また、点 N における速度は、任意の他の点 O における速度に対して、LN と LO の平方根の比にある。そこで、LO を LM に等しく取れば、点 N における速度、点 M における速度は、点 O に

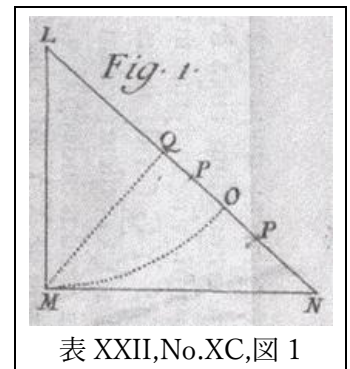


表 XXII, No. XC, 図 1

おける速度に対して、LN と LM の平方根の比にあることになる。そしてこれは、すなわち A と B の平方根の比にほかならない。(証明終わり)

I I I

別証明、ホイヘンスがその遺稿「小論集」において遠心力について証明した定理（ここでは簡潔のため証明は省略する）によれば、ある物体が水平円上を、半径の半分の高さから落下して得る速度で運動するとき、その遠心力は重力に等しい。また同じくそこから、等しい物体が等しい円を同じように運動するとき、その遠心力は速度の 2 乗の比に比例することが分かる。ゆえに、これらの速度が、それぞれ一定の力 A および B によって、同じく半径の半分の高さからの落下によって得られたものと考えれば、A と B もまた、得られた速度の 2 乗の比にあることは明らかである。したがって、速度そのものは、力 A および B の平方根の比にある。(証明終わり)

I V、定理 I I

前と同様に、二つの一定の力 A および B を考える。ただしこれらは互いに等しくないものとする。さらに、運動して通過した距離もまた等しくないものとする。このとき、得られる速度は、力の平方根の比と、通過した距離の平方根の比とから成る合成比である。

証明、いま再び LO を LM に等しく取る。また、別に LP を取り、これは LO より大きくても小さくてもよいとする。さて、前述より、点 M における速度は点 O における速度に対して、A と B の平方根の比にある。また、点 O における速度は点 P における速度に対して、LO と LP の平方根の比にある。ゆえに、等比連鎖および比の合成により、点 M における速度は点 P における速度に対して、 $\sqrt{A} \times \sqrt{LM} : \sqrt{B} \times \sqrt{LP}$ の比にある。同じことは、遠心力の考察からも導かれる。

V、定理 I I I

再び、一定の力 A および B を考える。このとき、同じ時間に通過される距離は、それらの力に比例する。

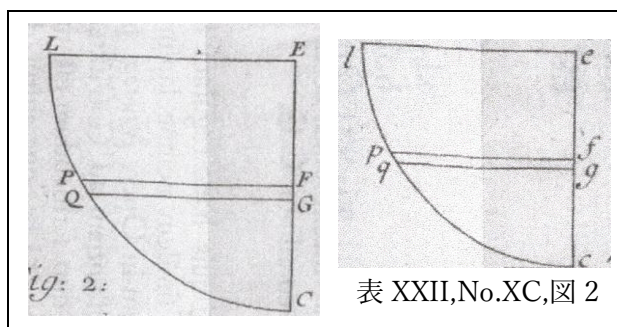
証明、MQ を IN に対して垂線として引くとする。するとガリレオの結果より、距離 LM と LQ は等時（同じ時間で到達される）であることが分かる。しかるに、 $LM : LQ = LN : LM = (\text{前述より}) A : B$ である。(証明終わり)

V I、系 I

運動を引き起こす重力の強さに比例する長さをもつ振り子の周期は同じ。

証明、LPC および lpc を円の四分円、あるいは振り子が振動によって描く任意の相似な弧とする。また、これらに対応して、相似でかつ同様に配置された微小弧 PQ および pq を考える。いま、水平線 LE、PF、QG、ならびに le 、 pf 、 qg を引くと、点 P および p における速度は、それぞれ高さ EF および

ef から落下して点 F および f に到達するときの速度に等しい。さて、弧が相似であることにより（その半径をそれぞれ R、 r とすれば）、 $EF : ef = FG : fg = PQ : pq = R : r = A : B$ が成り立つ。ゆえに、「定理 III の逆」によって、高さ EF と ef 、ならびに EG と eg は等時的である。したがって、弧 FG を通過する微小時間は、弧 fg を通過する微小時間に等しい。さらに、点 F と f における速度は、それぞれ点 P



と p における速度に等しいから、弧 PQ を通過する微小時間も、弧 pq を通過する微小時間に等しい。そして、このことは、同様に配置されたすべての相似微小弧について成り立つので、それらから構成される全体の相似弧 LPC と lpc においても、通過時間は互いに等しい。すなわち、これらの弧は等時的であり、振り子が振動によって描く弧である。そして、それらの長さは、それぞれそれを動かす重力の大きさに比例する。(証明終わり)

V I I、系 I I

また、等しい長さの振り子は、それらの振動を完了する時間が、それらを動かす重力の大きさの平方根に反比例することも明らかである。

証明、第3のより短い振り子を考え、これがより小さい力 B によって動かされ、しかもより大きい力 A によって動かされるより長い振り子と等時的であるとする。さて、すでに知られているように、これら二つの振り子が同一の力 B によって動かされるとき、それらの振動時間は長さの平方根に反比例する。言い換えれば、前の系より、これは力の平方根の逆比にあることになる。

V I I I、系 I I I

同じ時間内に二つの等しい振り子によって行われる振動の回数は、それらを動かす力の平方根に比例する。

I X、補足説明

これらの事柄の大部分は、アイザック・ニュートン (Isaac Newton) 氏やクリスティアーン・ホイヘンス (Christiaan Huygens) 氏において、すでに証明されているか、あるいはそれらから容易に導かれるものである。しかしながら、彼らの証明はやや複雑に見えるのに対し、私のものはただ一般的な原理にのみ基づいており、より深い幾何学に通じていない者にも理解しうるものである。このため、これらをここに提示することにした。とりわけその理由は、後に述べるより重要な命題の証明を確立するにあたり、ほかの本や論文を参照しなくても済むようにするためである。

X

さてここで、地球上の異なる緯度の諸地点における重力の強さを評価し、相互に比較する方法を記しておくのが適当である。等時振り子の長さを比較することによってである。これらの観測を多くの場所で正確に実施すれば、経験がどの程度まで理論およびアイザック・ニュートン氏が「第 III 卷命題 20」において与えた法則と一致するかが明らかになるであろう。しかしながら、フランス人の観測（彼自身はそれを粗雑なものと呼んでいる）については、彼はあまり信頼していないようであり、それももっともである。というのも、それらが彼自身の計算と一致しないからというよりは、むしろ互いに矛盾しているように見えるからである。赤道から遠い地域において、1 秒ごとに振動する振り子の長さが、赤道に近い地域よりも短いとされているのである。そうすると、それらの地域では物体の重さもより小さいことになってしまうが、これは明らかに確からしさに反する。というのも、物体は地球の自転によって中心から離れようとする力（遠心的）を得ており、これは重力にある程度反対に働く。この効果は、その場所の緯度円が大きいほど（＝赤道に近いほど）大きい。したがって、重力の実効的な残りは、赤道またはその近くでは、そこから遠い地域よりも小さくなるはずである。ゆえに、赤道から遠い地域では、等時振り子は、赤道付近よりもより長い長さを必要とするはずである。

X I

しかしながらフランス人たちは、これとは反対のことを観測したと主張している。パリの振り子（その長さは3フィート8インチ $\frac{3}{5}$ 3ライン）が、赤道から5度にも満たない距離にあるカイエンヌ島における等時振り子よりも、わずか1ラインと4分の1だけ長いというのである。さらに、同じパリの振り子に比べて、ゴレ島で等時とされる振り子は2ラインだけ短いともいう。そして同じ差がグアドループでも観測されたとも主張している。しかしながら、これら二つの島、グアドループとゴレは、いずれも緯度14度または15度であり、カイエンヌよりも赤道から遠いのである。これらのことは、1693年にパリで刊行された「天文学的・物理的観測集」にそのように記載されているのを私は確認している。したがって、アイザック・ニュートン氏がP.426で述べているところ、「フランス人は実験によって、1秒ごとに振動する振り子の長さが、パリではゴレ島より指の10分の1だけ長く、またカイエンヌより8分の1だけ長いと見出した」とする点について、私はどこからそのようなことを得たのか不思議に思う。むしろフランスの観測者たちは、カイエンヌの振り子はパリのものより10分の1だけ短く、ゴレのものは6分の1だけ短いと述べているからである。

X I I

したがって、これらの事実は、赤道付近において重力が減少するという理論と両立しえない以上、我々は、これらの観測が正確でなかったと考えるほうを選び、ラ・イール（La Hire）のように、これらの等時振り子の不等は実在するものではなく単なる見かけにすぎないと断定することは避ける。というのも、彼はこの事象の原因を、足尺（フット）の目盛を刻んだ金属が、温暖な地域へ運ばれたことで多少膨張したためであるとし、その結果、やや伸びたその尺度と比較された振り子は、必然的にわずかに短く見えたと説明しているからである。確かに、この金属の膨張にいくらかの原因を帰することができること自体を、私は否定しようとは思わない。しかしながら、赤道付近における振り子の短縮が、その大部分において物体の重力の減少に起因することは、もはや議論の余地のないことである。したがって、この原因のみにどれほど帰すべきかを注意深く探究することが有益であろうし、私の考えでは、それはそれほど困難なことではない。

X I I I

ある密閉された場所において実験を行い、その空気を加熱して、温度計によって一定の温度に達するまでその度合いを記録する。次いで、我々の地域において振り子の長さが測定されたその同一の尺度を、赤道付近の地域へと移し、その地においても同様に密閉された場所で、同一の温度計を用いて空気を同じ温度に調整するならば、その結果、振り子を測定する金属には、こちらの場所で得られたのと同じ膨張の程度が必ず生じるであろう。もしその後、両地点の振り子の長さに何らかの差異が現れるならば、その差は確かに、重力の減少の作用のみに帰せられるべきであると、このことを理解する者なら誰も疑わないであろう。というのも、ラ・イール（HIRIUS）が思い描くように、熱帯地方の空気に特に多く含まれる蒸気や気体が金属に浸透して金属を膨張させるなどという考えは、全く考慮に値しないものと私は判断するからである。

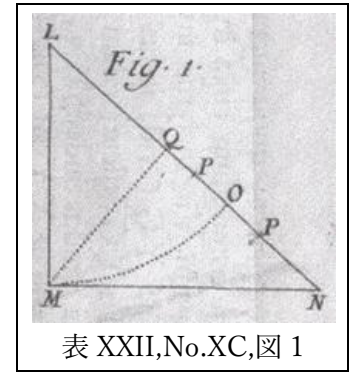
X I V

これまでに述べた重力減少の効果は、まず傾斜面上に置かれた球の実験によって説明される。定理IおよびIIIの証明より、重力の絶対的な力は、物体が傾斜面に沿って下降しようとする力に対して、全正弦がその傾斜角の正弦に対する比と同じ比をなすからである。いま、二つの振り子を取り、その長いものと短いものの比がLMとLQの比に等しいとする。長い振り子は鉛直面内で振動させ、短い振り子

は傾斜面上で振動させる。ただしその傾斜角を $\angle LNM$ とする。このとき、定理 III の系 I により、両振り子の振動は等時的（同じ周期）となる。実際、このことは経験によっても確かめられている。ただし、傾斜面も球もきわめて滑らかでなければならない。というのも、わずかな粗さに由来する相互の摩擦でさえ下降運動を妨げ、何らかの形で遅らせてしまうからである。

X V

さらにまた、我々の推論を同様に（あるいはそれ以上に）興味深く裏づけるものとして、より完全な流体中における振り子の振動に関する実験がある。ここでいう流体とは、粒子間の粘着性が感知できないほど存在しないものを指し、そのためごく微小な振動であってもいかなる抵抗にも妨げられない。このような流体中に置かれた物体の重さは、（この点を極めて鋭敏に指摘しているのはニュートンであるが[P.284]）二通りに考えることができる。一つは真の絶対的重さであり、物体が下方へ向かう全体の力である。もう一つは見かけの、相対的かつ通常いうところの重さであり、これは物体が周囲の流体よりもどれだけ強く下方へ向かうかという、その差に基づくものである。



X V I

それゆえ、二つの等しい振り子を考える。その一方は空気中で、他方は粘性を全くもたないある流体中で振動するとする。ただしその流体もまた重さを有しており、そのため振り子における重さを減少させる。さて、同一時間内に空気中と流体中で行われる振動回数がいかなる比になるかを予測しようとするならば、たとえば水中で振動する鉛の振り子を考えればよい。その場合、水の比重は鉛の比重に対しておよそ 7 対 80 の比にあるので、鉛は水中においてその重さのうち $\frac{7}{80}$ を失い、 $\frac{73}{80}$ を保持することになる。したがって、（ここでは空気は感知しうる重さを持たないものと仮定するので）空気中で振り子を動かす絶対重力の力は、水中で振り子を動かす相対重力の力に対して 80 : 73 の比をなす。ゆえに、定理 III の系 III により、同一時間内に行われる振動回数は、空気中におけるものと水中におけるものとの比が $\sqrt{80} : \sqrt{73}$ 、およそ $120 : 114\frac{2}{3}$ となる。つまり、たとえば半秒振り子（1 往復に 1 秒、1 振動に 0.5 秒の振り子）が空気中で 1 分間に 120 回振動するならば、同じ長さの鉛の振り子は水中ではわずか $114\frac{2}{3}$ 回しか振動しないことになる。この結果は、ラ・イール自身によって行われた実験と十分によく一致している。ただし、その結果は彼の予想に反するものであった。「王立科学アカデミー紀要」1703 年パリ版 P.289（オランダ版 P.349）を参照されたい。そこでは彼はまず、2 オンスの鉛球を用いて振り子を作り、空気中で半秒振り子となるようにしたと述べている。この振り子を水中で振動させたところ、1 分間に 112 回の振動を行った。さらに、5 オンスの鉛球を用いて同様の振り子を作った場合には、1 分間に 114 回の振動を行ったという。この 2 回の振動数の差は疑いなく、次の理由によるものである。大きい球は、その体積に対する表面積の比が小さいため、水の粘性に由来する抵抗をより小さく受ける。他方、小さい球は体積に対して表面積が大きいため、相対的により大きな抵抗を受けるのである。

X V I I

この抵抗は、たとえきわめて微小であっても、振動の振幅が大きくない場合にはほとんど問題とならない（極めて小さな振動であれば、水が全く抵抗しない場合と同様に、同じ仕方・同じ時間で行われるからであり、このことはニュートンも P.308 系 2（第 II 巻第 VI 節第 XXVII 命題を参照）において示している）。しかしながら、この抵抗はさらに一層、感知しえないほど小さくすることができる。球の代わりに、側方に振動する際に空気（あるいは流体）を支えるために鋭い縁で終わるレンズ状の物体を用いるのである。このようにすれば、流体に接する表面はほとんど、あるいは全くなくなる。したがって、さらに振動の弧が小さいならば、振動する物体に加わる抵抗はきわめて微弱となり、正当に無視して差し支えない程度となる。もしラ・イールがその実験においてこのようなレンズ状の物体を用いていたならば、1 分間に 112 回や 114 回ではなく、確実に $114\frac{2}{3}$ 回あるいは 115 回の振動を数えたであろう。さらにまた、同じ P.289 において、彼が、水中ではその振り子が各振動に少なくとも 1 秒を要すると考えていたにもかかわらず、実際にはその振動が予想に反して、空気中とほとんど同様に速く、あるいは同じ持続時間であることを見て、驚愕して立ち尽くしたと告白していることは、まさに驚嘆に満ちた心情を示している。これは、完成された幾何学者にふさわしいというよりは、むしろこのような深い問題に不慣れな者にふさわしいものである。ここで起こったことの中に、実験以前に予測できなかったものは何一つないからである。もっとも、これが根拠のない主張であると思われなためにも、以下に述べる規則を検討し、さまざまな物体においてその検証を行ってみるべきである。

XVI I I

ある物体の比重と水の比重の比が $c:a$ であるとする。したがって、その物体の絶対的な重さ（水外での重さ）と相対的な重さ（水中での重さ）との比は、 $c:(c-a)$ となる。このとき、同一時間内における振動回数は、水外と水内とで、それぞれ $\sqrt{c}:\sqrt{c-a}$ の比になる。この規則を用いれば、水とさまざまな物体との比重が与えられたとき、それぞれの振り子が水中で 1 分間に行う振動回数を求めることができる。空気中（重さを持たないものとみなす）では 120 回振動する振り子について、水中での振動数を算出することができる。この計算によって得られた結果を、次の表にまとめた。この表から分かるように、振動回数は、たとえ物体同士の重さに著しい差があったとしても、それほど大きくは異ならない。たとえば金は、空気中では大理石のほぼ 5 倍、水中では完全に 6 倍の重さを持つにもかかわらず、水中における振動回数は、大理石に比べてせいぜい 10 分の 1 ほど多いにすぎない。

重 さ	物質	空気中	水中	空気中で 120 回の振動に対して	水中での振動数
	金	400	379		117
	鉛	240	219		$114\frac{2}{3}$
	銀	218	197		$114\frac{1}{6}$
	銅	200	179		$113\frac{5}{7}$
	鉄	168	147		112
	錫	156	135		$111\frac{2}{3}$

大理石	84	63	$104\frac{2}{3}$
水	21	0	0

X I X

もし同じ物体が、水よりもさらに軽い液体中で振動するとすれば、例えば石油（その比重は水に対して $16\frac{2}{5}:21$ の比である）中ではその振動数の差はさらに小さくなる。この液体中では、同じ時間内に大理石が $107\frac{3}{5}$ 回の振動を終えるとき、金は $117\frac{3}{5}$ 回の振動を行うにすぎない。したがって、もはや金の振動数は大理石に比べて、およそ 12 分の 1 だけ多いにすぎない。したがって、より軽い流体においては、ついには感知しうるあらゆる遅延が消失するだろう、ということが容易に推測される。そのような流体の例として空気そのものを考えると、空気は水に対して重さの比が 1 対 800、したがって金に対しては 1 対 15238、大理石に対しては 1 対 3200 の比をなすからである。ゆえに、この法則によれば、金の振動数は、真空中におけるものと空気中におけるものとの比が（同じ長さの振り子が同時間に行う振動数として） $\sqrt{15238}$ 対 $\sqrt{15237}$ 、ほとんど 30476 対 30475 に等しい。同様に、大理石については、真空中（すなわち重さをもたない流体中）での振動数と空気中での振動数との比は $\sqrt{3200}$ 対 $\sqrt{3199}$ 、ほとんど 6372 対 6371 に等しい。したがって、金は 3 万回以上、大理石は 6 千回以上の振動を空気中で行って、ようやく 1 回分だけ遅れるにすぎない。

X X

以上より、空気の重さに起因する抵抗は、この場合には安全に無視できることが明らかである。したがって、振り子は空気中においても、あたかも真空中で運動するものとして取り扱うことができる。ただしその際には、空気の密度および粘性に由来する、もう一つの抵抗には注意を払わなければならない。この抵抗の方がより重要であり、しかもそれは一部は速度に、一部は空気に接する物体の表面積に依存する。ゆえに、この抵抗は（すでに上で述べたように）、振り子をレンズ状の形にし、かつ横方向に振動させて極めて短い弧を描くようにすれば、大いに減少し、ほとんど感知できないほどにまで小さくすることができる。その場合、物体は小さな速度でありながら、大きな容易さをもって空気中を貫通するからである。

X X I

さらに、この法則は流体中で浮上する物体、流体の比重が大きいために沈められても上方へ向かう物体にも適用される。というのも、軽さとは単に重さの逆にはかならないからである。このような物体は、糸の上端を容器の底に固定し、その先に付けられた小球が振動して中心の上方において鉛直の弧を描くとき、いわば「逆振り子」を構成することになる。そして、この場合には比重の超過はすでに水の側にあるので、振動数については $\sqrt{c}$ 対 $\sqrt{(a-c)}$ の比が、空気中における振動数と水中における振動数の比となるべきである。ここから次のような一見逆説的な結論が導かれる。振り子がより軽い物質からなるほど、流体中におけるこの「逆振動」はすぐに起こるのであり、しかも a と c の比が十分大きければ、任意の速さの段階にまで到達することができるのである。なお、ここでも常に流体の粘性に由来する抵抗は無視している。たとえば、振り子として、水より比重が 2 倍軽い物体を用いるとする。 $a=2c$ の場合、この振り子は空気中でも水中でも、振動数は等しくなる。さらに、もしその物体が水より 5 倍

軽い材料からなるならば、水中では空気中の2倍の速さで振動する。水中では2回の振動を行う間に、空気中では1回しか振動しない。そして、他の場合についても同様である。

XXII

これらの考察から何らかの成果を得るために、次に示す方法を紹介することは、決して的外れではないであろう。

振り子を用いて固体および液体の比重を測定する方法

ここで述べる方法は、通常用いられる静水力学装置、あるいはその他いかなる機械の助けも借りることなく行われる。二つの振り子を用いて実施されるのであり、そのうち一つは液体中で振動するものであって、その材質は測定しようとする液体よりもそれほど重くないものとする。このようにすれば、空気中と液体中とで等時的に振動する二つの振り子の差は、その材質が非常に重い場合よりも、いっそう感知しやすくなる。この目的のために、液体中で振動させる振り子のレンズ状重り（なお、もう一方の振り子は、その材質がいかなるものであっても、ただしあまり軽すぎて空気抵抗の影響を受けない限りにおいては、特に問題とならない）を錫で作るものとする。このようにして、たとえば次の3種の液体、普通の水、石油（鉱油）、および自然に湿気で液化したものによって得られた酒石油（アルカリ性溶液）の比重を求め、それら相互の間および錫との比較を行おうとする。まず、任意に選んだ長さの振り子を空気中で振動させる。ついで直ちに、別の振り子を用いる。この振り子の重りは液体中にごく浅く沈められ、きわめて短い弧を描いて振動するようにし、その長さを伸縮させて、空気中で振動する前者の振り子と等時（同じ周期）になるまで調整する。その後、各液体中で順次振動させた振り子の長さを、非常に精密な尺度を用いて、空気中で等時であった振り子の長さと比較することにより、次のような比を観測する。

$$\begin{array}{c} \sim \text{中で同じ} \\ \text{周期になる} \\ \text{振り子の長} \\ \text{さ} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{空気中} \\ \text{水中} \\ \text{石油中} \\ \text{酒石油中} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{測定スケー} \\ \text{ル上の値が} \\ \text{一致する} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1000 \\ 865 \\ 895 \\ 833 \end{array} \right.$$

したがって、系I、定理IIIによれば、空気・水・石油・酒石油中における錫の相対的重さは同一の比に従うので、1000と他の3つの数との差（それぞれ1000と比較された差）は、錫が各液体中に沈められたときに失う重量を示すことになる。ゆえにまた、錫とこれら3種の液体との比重の比そのものをも与える。すなわち……

$$\begin{array}{c} \text{重} \\ \text{さ} \\ \text{の} \\ \text{比} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{錫} \\ \text{水} \\ \text{石油} \\ \text{酒石油} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{関} \\ \text{係} \\ \text{比} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1000-0 \\ 1000-865 \\ 1000-895 \\ 1000-833 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1000 \\ 135 \\ 105 \\ 167 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{近似} \\ \text{的な} \\ \text{比} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 96 \\ 13 \\ 10 \\ 16 \end{array} \right.$$

同様の方法は他の場合にも適用されるべきである。しかしながら、この事柄そのものを完成させ、さらに実用に適した形へと整えることについては、時間と関心のある人々に委ねる。

XXIII

この機会はまさに適切に、振動に関するこの問題をさらに発展させ、かつ私が見出した別の重要な応用を示すことへと私を促すであろう。真に正当かつ唯一の基礎を見出したのであり、そこから複合振り子における振動中心の決定が最も自然に導かれる。この方法は、他の人々が仮に採用してきた、いまだ

十分に確固たるものとは言えない仮定に関係なく成立する。この方法はさらにこの点においても他に勝っている。同じ容易さで振動中心を求めることを教えるのである。たとえ複合振り子の各部分が異なる材質から成り、しかも一様な液体中で振動する場合であっても、あるいは同じことだが、振り子の部分が同一材質でありながら異なる液体中で振動する場合であってもよい。さらに、振り子の部分も液体もともに不均質であっても差し支えない。そのような場合であっても前記二つのいずれかの場合へ還元することができるからである。この種の振り子およびその振動中心の決定については、これまで誰も考察したことがない。われわれの規則は、それを導き出した基礎とともに、より都合のよい時期、より多くの余暇が得られるときまで延期する。しかしながらここで指摘しておくべきは、てこの考察（これはかつて亡き私の兄も同じ問題に試み、決して全く不成功ではなかったが）だけではこの問題には十分でないということである。むしろ最も重要なのは、比重の異なる物体が下方へ向かう作用の効果、ならびにそれらが互いに及ぼし合う作用の効力に立ち返る必要がある、という点である。

XXXIV

これまで我々は、物体が運動する流体の抵抗については考慮してこなかった。ここでいう抵抗とは、物体の運動に反するあらゆる力を意味し、この力のために、物体はその運動を外部から継続的に補われない限り、次第に失いついにはやがて止まる。しかしながら、この流体中の抵抗がいかんして生じるのか、またどのような物理的原因によるのかを、ここで詳細に探究することは本題ではない。それが流体部分のある種の粘着性に由来し、これによって流体粒子が物体の衝突に際して直ちに互いに分離しないためであろうと、あるいは粗さに起因する摩擦に由来し、この粗さが物体の表面のみならず流体を構成する微小粒子にも存在しうるためであろうと、あるいはさらに、流体性そのものの不完全さから生じるものでであろうと（流体が実際には無限に分割されているのではなく、一定の大きさをもつ固体的分子から成るため、そのような流体中では運動する物体が各瞬間ごとに一定量の流体を前方へ押しのけ、排除しなければならず、それは運動の継続的な減少なしには行えない、たとえ他に粘着性も粗さも存在しないとしても）、これらのうちいずれが真の原因であるにせよ、すなわち三つのうち一つだけであれ、よりもっともらしくはそれらが同時に作用するのであれ、あるいは別の原因が存在するのであれ、われわれはここではそれを仮定するにとどめ、説明はしない。さらにまた、その抵抗がどのような比例関係に従うかについても確定しようとはしない（もっとも、もし我々が挙げた第3の原因を採用するならば、その関係は速度の2乗と媒質すなわち流体の密度の1次に比例する複合的なものとなるであろう）。この問題については、ライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz）が Acta Eruditorum の 1689 年 P.39 以下において、いつものように極めて鋭く論じているので参照されたい。私はむしろ、自らの目的に従い数学的に議論を進めるために、抵抗およびその比例関係を抽象的に取り扱うことにする。

XXV、定理 IV

任意の曲線 LCK を考え、この曲線を物体が一様な重力の作用のもとで自由に描くものとし、しかも任意の抵抗を有する媒質中で運動するものとする。このとき、重力が曲線の法線方向に及ぼす力（これを重力の法線成分と呼ぶ）は、接線 CS が重力の方向 CG となす角 GCS の正弦に比例する。また、重力が接線方向に及ぼす力（これを重力の接線成分と呼ぶ）は、その角の余角 GCO の正弦に比例する。

証明、点 C において物体に作用する重力の方向および大きさを CZ とする。点 Z から、曲線の法線 CO に対して垂線 ZX を引く。力の分解により明かなように、重力 CZ（これは至る所で与えられた一定のものと仮定する）は、2つの成分 CX と XZ に分解される。そのうち CX は法線方向の力を表し、XZ は接線方向の力を表す。したがって、CZ を全正弦（半径）とみなすと、CX は角 CZX（ZCS）の正

弦に等しく、ZX は角 ZCX の正弦（これは前者の余角）に等しい。ゆえに、これらの力はこれらの正弦の比に従う。

（証明終わり）

系、もし重力が一定でなく、すなわち一様でない場合には、重力の法線成分および接線成分は、それらの正弦と、曲線上の各点において重力がもつ絶対量との合成比に従う。物体が点 C にあるときの重力の絶対量を CZ で表すならば、法線成分は CZ に角 SCZ の正弦を掛けたもの、接線成分は CZ に角 ZCX の正弦を掛けたものによって表される。

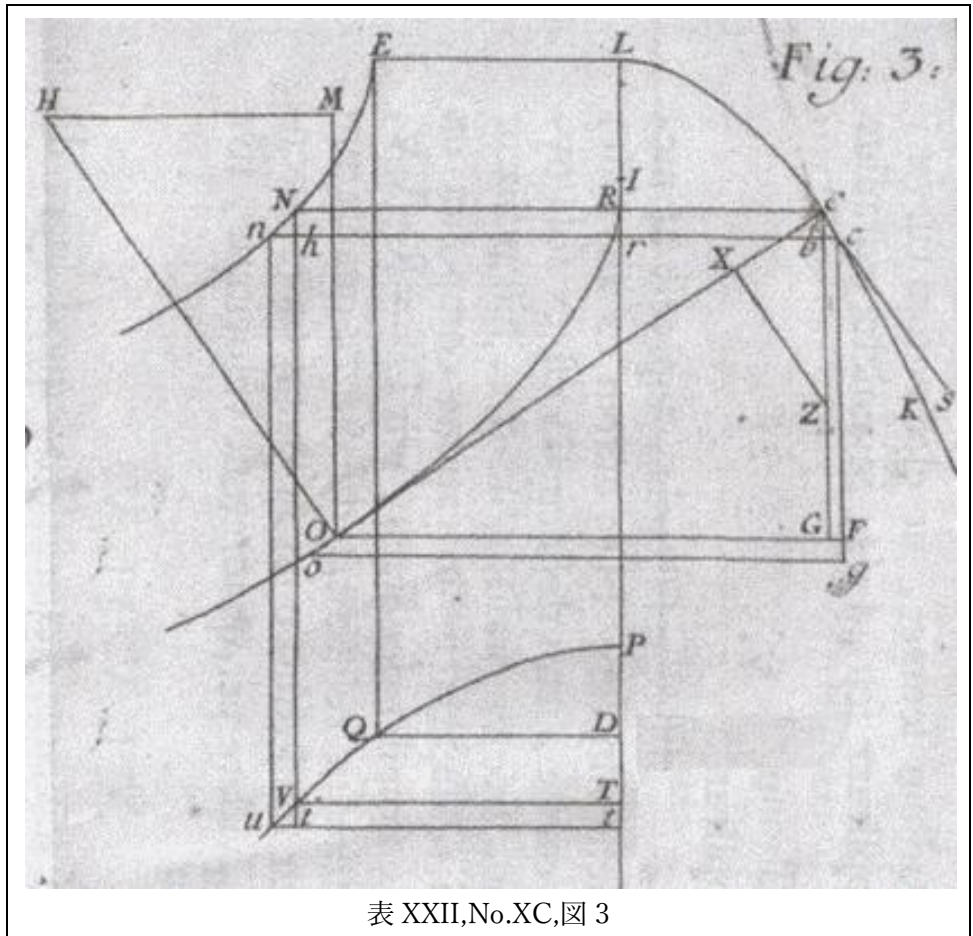


表 XXII, No. XC, 図 3

XXVI、定理V

前提をこれまでと同様におくと、任意の点 C における速度は、オスキュレーティング円のコラディウスの平方根に比例する。ここで「コラディウス」とは、重力の方向線上の部分 CG を指し、これはオスキュレーティング円の中心 O からその方向線へ下ろした垂線によって切り取られるものである。

証明、明らかに、投射体は、その遠心力が重力の法線方向成分に対して反対向きに等しくなるような速度で運動しなければならない。任意の媒質中で自由にある曲線を描く物体がその曲線を離れないのは、他ならぬ理由によるのであり、曲線上の各点において、オスキュレーティング円の中心へ向かって引く力と、そこから外へ引き離す遠心力とが等しく釣り合っているためであり、このようにして平衡が保たれるのである。しかし、物体が中心へと引かれる力は、まさに重力の法線成分そのものである。それは、曲線に対する法線方向において重力によって作用する力であり、かつこの力は、曲線の傾きが重力の方向となす角、角 GCS（あるいはそれに等しい角 COG）の正弦に比例することが示されている。ゆえに、この比に従って、速度および曲率に由来する遠心力もまた比例関係にある。さて、ホイヘンスの結果から明らかなように、遠心力は、速度の2乗に正比例し、かつ半径に逆比例する複合比に従う。曲線上の微小部分 Ce は、中心を O、半径を OC とする円弧と見なすべきであり、その円周上を物体は、曲線上の点 C において得るのと等しい速度で等速円運動すると考えられる。したがって、CG : CO、角 COG の正弦（これは重力の法線成分に比例する）は、速度の2乗を CO で割った量（これは点 C における遠心力に比例する）に等しい比となる。ゆえに、速度の2乗は CG に比例し、したがって速度そのものは $\sqrt{CG}$ に比例する。コラディウスの平方根に比例する。（証明終わり）

X X V I I

系 I、もし重力が一様でないならば、同様の議論によって、速度 V は、コラディウスの平方根と重力の平方根との合成比に従うことが証明される。 V と $\sqrt{CG} \times \sqrt{CZ}$ は比例する。あるいは、 CG と CZ の幾何平均に比例する。

X X V I I I

系 II、曲線 LCK を円弧とし、その中心を O とする。また重力の方向が水平線 OK に向かうものとする。これはアイザック・ニュートン氏の P.263

(No.LXXXVII,P.319 を参照) において扱われている場合である。このとき、任意の点 C に対して、点 O は常に同一の水平線 OK 上にある。したがって、速度は $\sqrt{CG}$ に比例するので、これらの速度は、円の中心を通る水平線からの距離の平方根比に従うことになる。これはまさに、著名なニュートン氏が P.265

(No.LXXXVII,P.321 を参照) において主張している通りである。ただし、抵抗の定義に関しては真理から逸れているが、そのことは次の命題の証明から明らかになるであろう。

X X I X、定理 V I

抵抗を有する媒質中で運動する物体が、円 LCK を描くとする。ただし、重力は一様であり、かつ水平線に向かって直接作用するものと仮定する。このとき、各点 C において、抵抗は重力に対して $3OG : 2OK$ の比である。

証明、軸 OL および頂点 O をもつものとして、任意のパラメータをもつ放物線 ONE が描かれていると考える。また同じ軸を OP の方向へ延長し、同じ頂点 O を共有して、前者のパラメータの 2 倍をもつ別の放物線 OVQ を描く。次に、点 L および任意の他の点 R において、水平な縦座標（オーディネート） LE 、 RC 、 RN 、およびそれらに近接する rc 、 rn を引く。さらに、点 E 、 N 、 n から鉛直線 EQ 、 NV 、 nu を引き、これらは放物線 OVQ とそれぞれ点 Q 、 V 、 u において交わる。そして、これらの点 Q 、 V 、 u から軸 OP に向かって水平線 QP 、 VT 、 ut を引く。前定理の系 II より明らかなように、 LE が円の最上点 L において物体がもつ速度を表すならば、 RN は物体が点 C にあるときの速度を表す。しかるに、放物線 OQ のパラメータは放物線 OE のパラメータの 2 倍であるから、 $OL=2OP$ が成り立ち、また任意の他の点についても $OR=2OT$ となる。したがって同様に $Rr=2Tt$ である。さらに、速度 LE は、点 L において物体の遠心力がその重力に等しくなるために必要な速度であるから、その速度はクリスティアーン・ホイヘンス (Christiaan Huygens) 氏が示したように、もし重い物体が真空中、抵抗のない媒質中で、円の半径の半分に等しい高さだけ落下したときに獲得する速度に等しい。したがって PO は、物体が初速度 EL (または QP) をもって真空中で上昇しうる高さを表す。同様に、任意の他の縦線 VT は、その速度で物体を上方に投げ上げたときに、真空中で到達する高さ TO を表している。以上を前提として、次のように考える。ある重い物体が、初速度 QP をもって、抵抗のない媒質中で点 P から O に向かって上方へ投げ上げられるものとする。また別の物体は、抵抗のある媒質中で運動し、

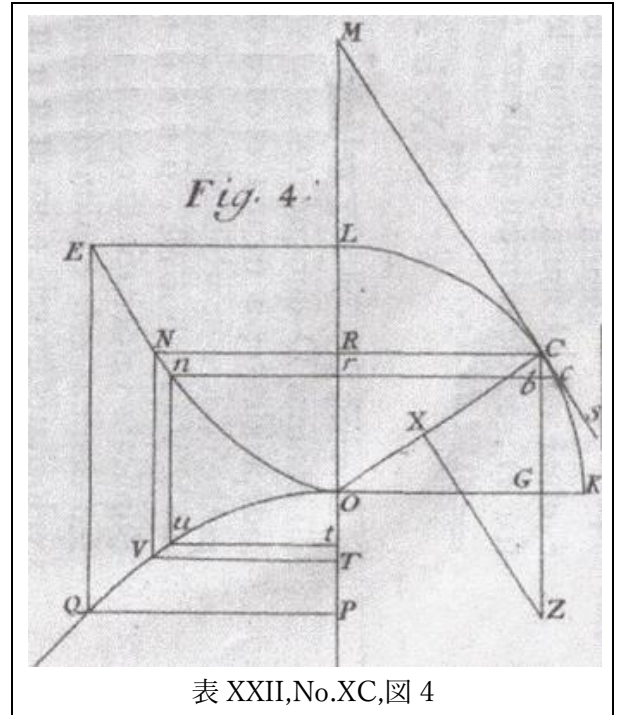


表 XXII, No. XC, 図 4

前者が点 T に到達した時に、後者は点 C に到達しているものとする。このとき、その瞬間において両物体はそれぞれ NR および VT によって表される等しい速度をもつ。そして両者は、等しい速度減少を受けるが、その減少は等しくない微小時間において生じ、その時間はそれぞれ通過する微小距離 Cc および Tt の比に従う。さて、等しい質量をもち、かつ等しい速度をもつ二つの物体を減速させる力は、同一の微小時間において生じる速度減少に比例する。あるいは同じことであるが、等しい速度減少が生じるのに要する微小時間に反比例する。したがって、真空中を上昇する物体が点 T において減速される重力の力は、抵抗のある媒質中を下降する物体が点 C において減速される力に対して、距離 Cc と Tt の比に反比例する。互いに逆比の関係にある。さらに、この後者の力は、点 C において媒質の抵抗が、接線 CS に沿って作用する重力の接線成分をどれだけ上回るか、その超過分によって評価されるべきである。この接線方向の重力は（定理 IV により）全重力に対して $OG : OC$ の比をもつ。ゆえに、重力を G 、抵抗を R とおくと、 $G : R = \frac{OG}{OC} G = Cc : Tt = 2Cc : Rr[Cb] = 2OC : OG$ が成り立つ。したがって、外項と内項を掛け合わせると、 $OG \times G = 2OC \times R - 2OG \times G$ ゆえに $3OG \times G = 2OC \times R$ となる。これを比の形に直すと、 $R : G = 3OG : 2OC[2OK]$ 、抵抗は重力に対して $3OG : 2OK$ の比にある。

（証明終わり）

XXX

系 I、 $3OG \times G = 2OC \times R$ であるから、 $R = 3OG \times G : 2OC$ となる。したがって、 G および OC が一定であることから、異なる位置における抵抗は互いに、それぞれに対応する OG に比例する。

XXX I

系 II、さらに、もし抵抗が媒質の密度と速度の 2 乗に比例すると仮定する。密度を D とおくと、 $D \times CG[=R] = 3OG \times G : 2OK$ となる。したがって $D = 3OG \times G : 2OK \times CG$ である。ゆえに、 G および OK が一定であることから、密度は $OG : CG$ に比例する。接線の長さ CM に比例する。これはまさにアイザック・ニュートン氏が述べたとおりである。

XXX I I、補足説明

我々によって与えられた抵抗と重力との比、 $3OG : 2OK$ は、ニュートン氏のものとは確かに異なっている。というのも、彼はそれを $OG : OK$ としているからである。したがって彼の比は、我々のものよりも $3 : 2$ の比だけ小さい。さて、これらを十分に精査できない者が、我々が卓越した人物によって多大な労力をもって明らかにされた事柄を、誤って否定しているのではないかと疑うことのないように、ここでニュートンのその比が明白な矛盾に帰着することを示そう。もし抵抗が重力に対して $OG : OK$ の比にあるとするならば（ニュートンの主張するように）、一方で重力は接線方向の力に対して OC 、すなわち $OK : OG$ の比にあるから、これらを合わせると、抵抗は接線方向の力（すなわち運動を引き起こす力）に対して $OG : OG$ の比となる。したがって抵抗はこの運動力に等しくなる。ゆえに、速度はすべての点 C において一定であることになる。しかし、我々はすでに速度が $\sqrt{CG}$ に比例し一様ではないことを示しており、しかもこの点についてはニュートン自身も同意している。

XXX I I I

この誤りは、かの偉大な人物に起こったものであるが、実際の解法そのもののの中に潜んでいるのではない。というのも、その解法は正当であり、いかなる論理の誤りからも免れていることが分かるからである。ただし、やや込み入っており理解しにくい面はある。むしろこの誤りは、その適用の仕方におい

て探されるべきであり、その欠点は次の点にある。(同書 P.263 において) (No.LXXXVII,P.319 を参照) DG を表す級数において [同図参照]、その各項を、不定量 DG のある微分、すなわちニュートンの言うところの「流率」の、項に含まれる文字 o の次数に応じたものとして扱っている点である。これは最初および第 2 項については成り立つかもしれないが、それ以降の項についてはまったく成立しない。というのも、例えば DG が OB (a) のあるべき p に比例するとし、 $DG = (a+o)^p$ とおくとする。このときニュートンの方法に従って級数展開すると、 $DG = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} o + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^{p-2} o^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-3} o^3 + \dots$ が成り立つ。ニュートンの考えによれば、この各項は順に DG の各次数の微分(流率)を表すことになるが、しかしながら、最初および第 2 項を除けば、残りの項は真の微分とは一致しないことが、通常の微分法の規則から明らかになる。実際 a を不定量とし、その微分 da を一定と仮定して、 a^p を順次微分すると、第 1 微分: $pa^{p-1}da$ 、第 2 微分: $p \cdot (p-1)a^{p-2}da^2$ 、第 3 微分: $p \cdot (p-1) \cdot (p-2)a^{p-3}da^3$ 、第 4 微分: $p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)a^{p-4}da^4$ 、などとなる。したがって、次のような級数が現れる。 da の代わりに文字 o を代入し、さらに a^p を最も低次(ゼロ次)の微分として第 1 項に置くと、 $a^p + pa^{p-1}o + p \cdot (p-1)a^{p-2}oo + p \cdot (p-1) \cdot (p-2)a^{p-3}o^3 + p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3)a^{p-4}o^4 + \dots$ が、すべての微分の総和として得られる。しかしながら、この級数は、先に得られた別の級数 $a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} o + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^{p-2} o^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{p-3} o^3 + \dots = DG$ とは異なることが明らかである。両方で一致するのは最初の 2 項のみであり、それ以降の項はすべて係数の掛け算の重なり具合が異なっているからである。

XXXIV

私は、この極めて聡明な人物がいかなる理屈に導かれて、根の展開(級数による平方根などの展開)から得られるこれらの級数の項が、微分を繰り返すことによって得られる項と同一であると信じたのが、十分には理解できない。とりわけ、微分をさらに微分する規則、流率から流率を求める法則が彼に知られていなかったとは考え難いからである。この点を私は注意しておく。曲線の曲率に関わる問題の解法において、級数による根の展開に過度の信頼を置くべきではない。これらの問題は、むしろ微分という源泉から得る方が、より簡便であり、かつより正確である。ゆえに、公平な読者に判断してもらいたい。著者が P.264 で高く評価しているこの規則の使用について、かかる種類の問題を解くにあたって、いかなる立場を取るべきかを。というのも、その使用はきわめて容易に濫用へと転じてしまうからである。確かに、先の規則から後に導かれているすべての議論は、抵抗と重力との比を定めるという点に関して、信頼できないものとなっている。円について (P.265) だけでなく、双曲線について (P.268,269)、さらに放物線についても (P.274)、いずれの場合にも抵抗と重力の比を常に正しい値よりも小さく見積もっているからである。しかもその誤りは、再び 3:2 の比に関係する形で生じている。これをより明らかにするために、私はニュートンの問題 (P.260 命題 X) を、一般的に次のような方法で解いてみせることにする。

XXXV、問題 I

一定の力が水平方向の平面に向かって直接作用し、かつ抵抗が媒質の密度と速度の 2 乗に比例するとする。このとき求めるべきは、まず、物

学術誌 Acta Eruditorum の 1713 年 3 月号の P.115

体が与えられた任意の曲線上を運動するようにするために、各点において必要な媒質の密度であり、次にその各点における物体の速度、さらに抵抗と重力との比である。

解法、曲線 LC を任意の与えられた曲線とし、LR をその軸とする。IO をその進展曲線とし、この進展によって曲線 LC が描かれるものとする。CO を、点 C に対応する進展曲線の半径（接触円の半径）とし、そのコラディウスを CG、サブラディウスを OG とする。ここでサブラディウスとは、接触円の中心から重力の方向線へ下ろした垂線であって、コラディウス CG の終点を定めるものをいう。さらに EN を速度曲線とし、その縦座標 NR が点 C における投射体の速度を表すものとする。同様に EL は、物体が点 L を水平な方向に出るときの初速度を表す。ただし、曲線がそのような方向を実際にはどこにも持たない場合でも、この仮定はすべての方向に対して有効である。

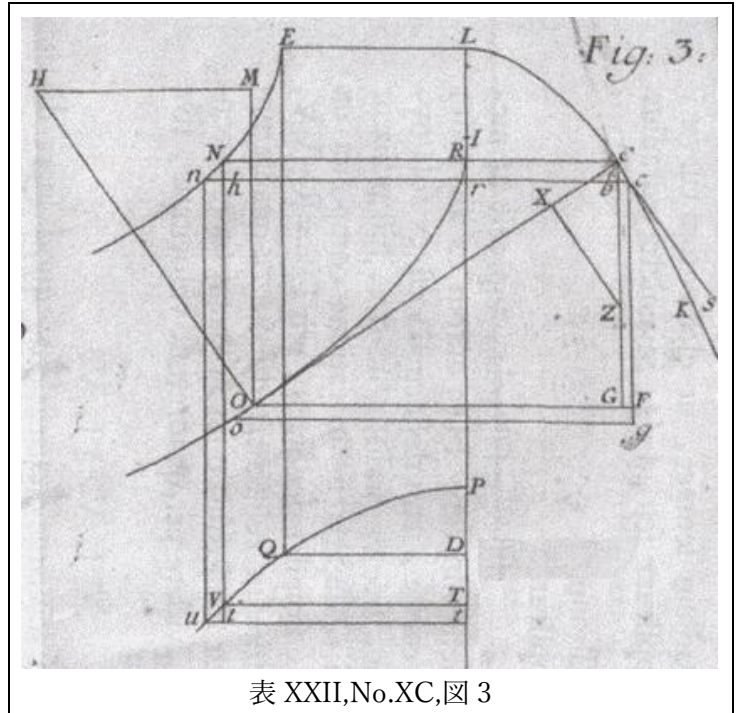


表 XXII, No. XC, 図 3

さらにまた、曲線 PQV を、延長された共通軸 PT 上に描かれた放物線とし、その任意の縦座標 VT は、物体が高さ PT から抵抗のない媒質中で重力のみによって落下するときに獲得する速度を表すものとする。

XXXVI

以上の準備のもとに、投射体はその運動において曲線 LC を離れることなく、常にこれに沿って進むのはなぜかを考察しよう。あたかもそれが糸 CO の端点 C に結び付けられているかのように振る舞う理由である。この糸は、もともと曲線 OI に巻き付けられ、点 L まで張られていたものが、次第にほどけていく。そしてこのほどける運動によって、物体は曲線 LC を描くことになる。糸が常に物体を引き止め、各点 C において接線 CS の方向へ逃れるのを防いでいるからである。もしこの糸が突然解かれれば、物体は必然的に接線方向へ飛び去るであろうが、重力および媒質の抵抗がそれを妨げているのである。さて、見かけ上、投射体は曲線上を自由に運動しているように見えるが、実際には、拘束している糸の役割を代行する何らかの別の作用が存在しなければならない。その作用は、各点 C において、方向 CO に沿って物体を引くための能動的な力を、ちょうど糸が物体が接線方向へ逸脱するのを防ぐことによって与える受動的抵抗と同じ大きさだけ発揮しなければならない。そしてこの抵抗は明らかに、遠心力に等しい。物体は本来、その自然な運動方向、点 C における接線に沿って進もうとしながら、中心から離れようとするからである。

XXXVII

したがって、投射体が曲線 LC 上に保たれるのは、この曲線上の各点において、互いに反対向きでしかも等しい二つの力によって押されているからである。すなわち、一つは、点 O のまわりの回転運動によって生じ、方向 OC に沿って外向きに働く力であり、もう一つは、これに反対して方向 CO に沿って内向きに働く力であって、これは曲線に対する法線方向に分解された重力の作用から生じるものであ

る。前者の力、回転運動する物体の性質に由来する力は、速度の2乗に比例し、かつ半径 CO の長さに反比例する。一方、後者の力、曲線に対する法線方向に沿って重力によって作用する力は、その絶対的な重力に対して、コラディウス CG と半径 CO の比に従う。この関係は、力の合成によって得られるものである。したがって、任意の点において $NR^2:CO$ は $CG \cdot G:CO$ に比例する（ここで G は絶対的な重力を表す）。ゆえに G は一定であるから、これは $CG:CO$ に比例することに帰着する。したがって NR は $\sqrt{CG}$ に比例する。このことから、運動体の速度は任意の点 C において、コラディウスの平方根に比例する、 $NR:EL=\sqrt{CG}:\sqrt{LI}$ となることが明らかである。これが求めるべき速度であった。

XXXVII

抵抗は次のようにして定められる。抵抗のない媒質中で鉛直に落下する重い物体は、区間 Tt を、そのときの速度 VT で通過する間に、ある速度増分 iu を得る。この増分は、同じ速度 NR をもつ投射体が区間 Cc を通過することによって得る速度増分 bn に等しいとする。さて、同じ速度をもつ物体が通過する微小距離 Tt と Cc は、それぞれの通過時間に比例する。また、その時間は、同じ速度増分を生じさせる力に反比例する。したがって、それらの力もまた、通過距離に反比例する。ゆえに

$$G:\frac{OG \cdot G}{CO} \pm R = Cc:Tt \text{ となる。ここで } R \text{ は抵抗の力を表し、これは曲線に対する法線方向の重力}$$

（ $OG \cdot G:CO$ で表される）に対して、上昇時には加えられ、下降時には差し引かれるべきものである。

その結果、減速力または加速力として $\frac{OG \cdot G}{CO} \pm R$ が得られる。なお、符号については、上の符号（+）

は上昇に対して、下の符号（-）は下降に対して適用されるものとする。さらに、点 L における速度は、もし重い物体が真空中、抵抗もなく、また重力を減少させることもない媒質中（ここで「非抵抗」とは常にこの意味に理解される）を、進展曲線の半径に等しい高さだけ落下したならば獲得するであろう速度に等しい。このことは、円運動をする物体についてクリスティアーン・ホイヘンス（Christiaan Huygens）氏が示した通りである。曲線上の任意の点における遠心力は、その点で曲線に接するオスキュレーティング円上を同じ速度で運動すると仮定したときの遠心力と等しいと見なされるからである。なぜなら、曲線とその接触円とは、その接触点において同じ曲率を持つからである。したがって

$$PD = \frac{1}{2} LI \text{ となる。また、放物線の性質より } \sqrt{PT}:\sqrt{PD} = VT:QD = NR:EL = \sqrt{CG}:\sqrt{LI} \text{ であ}$$

るから、 $PT:PD = CG:LI$ となり、 $PT = \frac{1}{2} CG$ である。したがって、それらの微小要素について

$$dPT, Tt = \frac{1}{2} dCG \text{ が成り立つ。さて、先に得た比例式 } G:\frac{OG \cdot G}{CO} \pm R = Cc:Tt \text{ において、} \frac{OG}{CO} \text{ の代わり}$$

にこれと等価な $\frac{Cb}{Cc}$ を代入し、さらに Tt の代わりに $\frac{1}{2} dCG$ を用いると、 $G:\frac{Cb \cdot G}{Cc} \pm R = Cc:\frac{1}{2} dCG$ が

成り立つ。これにより、 $R = G \cdot (2Cb - dCG): \mp 2Cc$ 、 $R:G = 2Cb - dCG: \mp 2Cc$ となる。したがって、

抵抗は重力に対して、横座標の微小要素の2倍からコラディウスの微小要素を差し引いたものと、与えられた曲線の微小弧長の2倍との比に従う。しかしながら、もしコラディウス（ CG ）の微小要素が負である場合、同じことだが、横座標 LR が増加するにつれてコラディウス CG が減少する場合、たとえば曲線 LC が円であるときのように、抵抗は重力に対して次の比をなす。横座標の微小要素の2倍に、コラディウスの微小要素（正の量として取ったもの）を加えたもの、与えられた曲線の微小弧の2倍となる。これが求めるべき抵抗であった。

XL

X L I

X L I I

Fig. 1.

N^{.LX}

A O d t B D K

L

T

C I

E F

G H

g h k

表 XXI, No. LXXXVII, 図 1

線は、一般に考えて、下降運動にのみ適用可能であることが明らかである。このことは、円については偉大なるニュートン氏が（P.266において）すでに指摘しているが、他の曲線については見過ごされて

いた。さらに補足を加えると（これはついでに触れておくが）、特に円の場合には、コラディウスの微小要素（正として取ったもの）は横座標の微小要素に等しいので、 $R:G=3Cb:2Cc=$ （図における表現では） $3OG:2OK$ が成り立つ。これは、すでに上で示した結果を確認するものである。

XLIII

したがって、任意の曲線における抵抗を決定するためには、進展曲線のコラディウス、接触円（オスキュレーティング円）のそれを知ることが必要であるから、この目的のために有用な公式をここに示すことは無益ではないであろう。私は、ライプツィヒ学術誌 *Acta Eruditorum* の 1701 年 P.137

（No.LXVIII を参照）において、接触円半径、進展曲線の半径を、1 次微分のみを用いて表す一般的方法を与えた。それが $dt^3:dudy^2$ に等しいことを示したのである。（ここで u とは、曲線の微分方程式 $dx=udy$ において、 x,y および定数から任意に構成される量を意味する。すべての曲線はこの形に帰着させることができるからである。）さて、進展曲線の半径は、そのコラディウスに対して常に、曲線要素 dt と従座標要素 dy の比に等しいので、コラディウスは $dt^2:dudy$ として求められる。

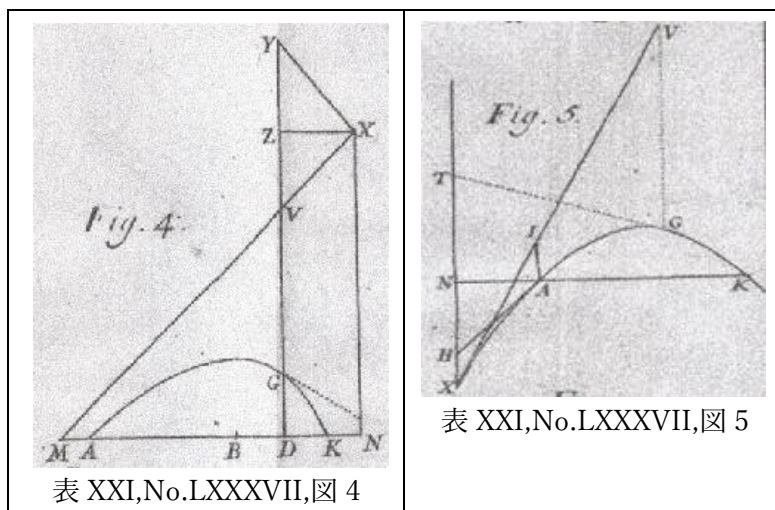
XLIV

このようにして速度および抵抗が求められたならば、次に残るのは媒質の密度 D をも決定することである。しかし、この密度はそれら（速度および抵抗）から導かれ、曲線の性質には依存しない。それは単に仮定から導かれるべきものであり、その仮定が任意のものであれ自然的なものであれ、同様であるからである。いま、ここで $R=VDR=V^2D$ とおく。抵抗が速度の 2 乗に比例し、かつ密度に比例すると仮定すれば、 $D=R:V^2$ となる。したがって、密度は抵抗に正比例し、速度の 2 乗に反比例する。ゆえに、他に必要なことは何もなく、上で求めた抵抗 R の値を、速度の 2 乗、コラディウス CG で割るだけでよい。

XLV

もしこの規則に従うならば、私が先に述べたように、ニュートンの著作において双曲線に関して同様の誤りが繰り返されていることが確認されるであろう。P.268（No.LXXXVII,P.323-324 を参照）においてこの卓越した人物は、抵抗と重力との関係において、図 4 に基づいて XY と YG との比と与えているが、これはむしろ $3XY$ と $2YG$ との比と書かれるべきである。同様に、続く P.269（No.LXXXVII,P.325 を参照）において、次数が任意の n である双曲線

について論じている箇所では、抵抗と重力との関係において XY と $(3nn+3n)VG:(n+2)$ の比と与えているが、これもまた次のように置き換えられるべきである。 XY と $(2nn+2n)VG:(n+2)$ の比。さらに P.274（No.LXXXVII,P.325-326 を参照）においても（この誤りは取り上げられるあらゆる例にわたって繰り返されているからである）、次数が任意の n である放物線への適用が行われ、抵抗と重力との関係



において（著者の図5を参照）、 TG と $(3nn-3n)VG:(n-2)$ との比と結論されているが、より正しくは、 TG と $(2nn-2n)VG:(n-2)$ との比とすべきであり、しかもこれは下降の場合についてである。なぜなら、上昇の場合には、 TG と $(2nn-2n)VG:(2-n)$ との比と置かなければならないからである。したがって、この場合における上昇運動は、常に自然に可能であるわけではなく、 n が1より大であり、かつ2より小さい場合にのみ可能である。これらの範囲を外れるときには、この放物線は下降運動にのみ適用される。適切な速度で点Aから接線方向に投射された物体は、下降しながら弧AXを描くことはできるが、上昇しながら弧AGを描くことはできない。この点について、あの極めて洞察力のあるニュートン氏自身も気づいていなかったように思われる。しかし私は、ニュートン氏のものよりはるかに一般的な問題の解法へと進むことにする。

XLVI、問題I I

重力は一樣ではなく、任意に与えられた法則に従って変化し、ある一定の点に向かって作用するものとする（力の中心に向かうものとする）。また、抵抗は密度および速度の関数として、任意の形で与えられているものとする。このとき、物体が与えられた任意の曲線に沿って運動するようにするために、各点における速度・抵抗・媒質の密度を求めよ。

解法、いま、任意に与えられた曲線をLCとする。力の中心をXとし、この点を通る直線LXを軸とみなし、またCXを任意の方向線とする。さらに、進展曲線をIOとし、その半径COを曲線上の任意の点Cに対応するものとする。また、コラディウスCGおよびサブラディウスOGをとり、これらは点Gにおいて直角をなすものとする。点Xを中心とし、半径XCによって弧CRを描き、さらにそれに隣接する弧crを同様に描く。そして点R,rにおいて、それぞれ線分RN,rnを立て、これらを点Cおよびcにおける物体の速度を表すものとする。すなわち、点N,nは速度曲線ENn上にあるものとする。

XLVII

いま、直線LXを延長した軸PD上に放物線PQを考える。この放物線において、任意の縦線分QDは、ある物体が抵抗のない媒質中で高さPDから落下するならば獲得するであろう速度を表すものとする。ただし、その

ときの重力は、点Lにおいて投射体が受けるものと等しい一定の重力とする。さらに、同じ軸上に別の放物線PVを考える。この放物線において、任意の縦線分VTは同様に、ある物体が抵抗のない媒質中で高さPTから落下するならば獲得するであろう速度を表すものとする。ただし、この場合の重力は、距離RX、点Cにおいて投射体が受ける重力と等しい一定の重力とする。

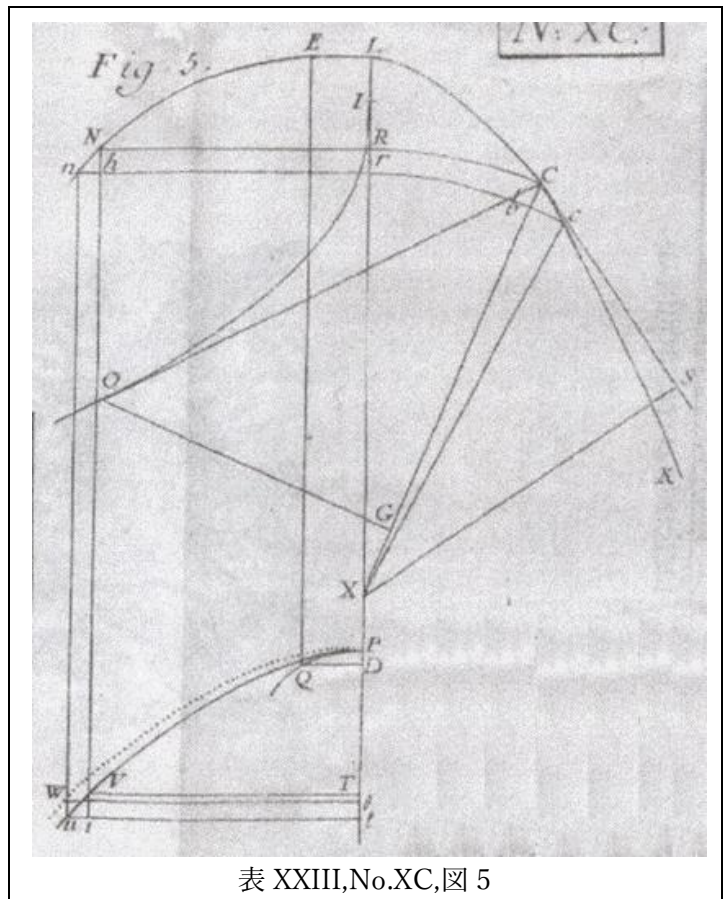


表 XXIII, No. XC, 図 5

X L V I I I

さて、点 C における速度、すなわち線分 NR を求めようとするならば、上の XXXVII において行ったのと同様の議論により、次のように結論される。遠心力と、それに対抗する重力に由来する引戻しの力とが等しいことから、 $NR^2:CO=CG\cdot G:CO$ が成り立つ（ここで G は重力、与えられた法則に従って変化する中心力を意味する）。したがって、 NR^2 と $CG\cdot G$ は比例する。ゆえに NR と $\sqrt{CG}\cdot\sqrt{G}$ は比例する。ここから、任意の点 C における投射体の速度は、コラディウスと重力との積の平方根に比例し、 $NR:EL=\sqrt{(CG\cdot G)}:\sqrt{(LI\cdot g)}$ となる。ここで g は距離 XL、点 L における重力を表す。

X L I X

抵抗を次の方法で求める。点 E と N から、軸 LX に平行な 2 本の直線を引くと考え、それらが放物線 PQ と PV をそれぞれ点 Q と V で切るようにする。そしてそこから縦線 QD と VT を下ろす。さて、PD と PT という高さは、抵抗のない媒質中で二つの物体が進んだ距離であると仮定する。そのうち一方は一樣な重力 g によって、もう一方は一樣な重力 G によって動かされている。このとき（定理 II により）、得られる速度は、力と通過距離の両方について平方根比に従う。すなわち、

$\sqrt{(PT\cdot G)}\cdot\sqrt{(PD\cdot g)}=VT:QD=NR:EL=\sqrt{(CG\cdot G)}:\sqrt{(LI\cdot g)}$ という比が成り立つ。したがって、 $PT:PD=CG:LI$ である。さらに、上で引用された結果により $PD=\frac{1}{2}LI$ であるから、

$PT=\frac{1}{2}CG$ も成り立つ。したがって、直線 NV を nu に平行に引き、さらに tu を下ろして微小部分 Tt が得られると考える。このとき、物体が重力 G の作用のもとで速度 VT によってこの微小部分 Tt を通過し、他方で投射体は同じ速度 NR によって曲線の微小部分 Cc を通過するならば、両者は等しい速度増加を得る。前者は iu 、後者は bn である。したがって、上の §.XXXVIII と同様の議論により、

$G:\frac{OG\cdot G}{CO}\pm R=Cc:Tt$ 、あるいは同様に $G:\frac{Cb\cdot G}{Cc}\pm R=Cc:Tt$ が導かれる。

L

さて、この Tt が何であるかを明らかにするために、次のことに注意すべきである。重力 G が変化するため、放物線 PV もまた変化する。したがって、そのごく近くに別の放物線 PW を考える。この放物線では、任意の縦線 $W\theta$ が、抵抗のない媒質中において、高さ $P\theta$ に対応して、一定の重力によって獲得される速度を表す。ただしその重力は、点 C（あるいは距離 Xr の位置）で投射体がもつ重力、 $G+dG$ に等しいものとする。したがって、点 W（その放物線が直線 nu を切る点）から縦線 $W\theta$ を下ろすとする。さて、常に $PT=\frac{1}{2}CG$ であることから、同様に $P\theta$ は点 C に対応するコラディウスの半分に等しくなる。ゆえに、それらの差分も互いに等しくなり、すなわち $T\theta=\frac{1}{2}dCG$ となる。さらに、

θW と tu は等しい（いずれも速度を表す線分であり、前者は重力 $G+dG$ 、後者は重力 G によって生じたものである）ので、それぞれの重力に対して進んだ距離と重力との積もまた等しくなる。これらは（定理 II により）それぞれの速度の 2 乗に比例するからである。したがって、 $P\theta\times(G+dG)=Pt\times G=(P\theta+\theta t)\times G$ である。ここで等しい項を差し引くと、 $\theta t\times G=P\theta\times dG$ （さらに、 PT と $P\theta$ の差は無限小） $PT\times dG$ となる。したがって、 $\theta t=PT\times dG:G$ である。 $T\theta, \theta t$ を加えると、

$Tt = \frac{1}{2}dCG + PT \times dG : G = \left(PT = \frac{1}{2}CG \text{ を代入} \right) \frac{1}{2}dCG + CG \cdot dG : 2G = \text{(整理すると)}$
 $(G \cdot dCG + CG \times dG) : 2G = d(CG \cdot G) : 2G$ となる。この Tt の値を先の比例式に代入すると、
 $G : \frac{Cb}{Cc} G \pm R = Cc : \frac{d(CG \cdot G)}{2G}$ を得る。ここから、 $R = (2Cb \cdot G - d(CG \cdot G)) : \mp 2Cc$ が導かれる。

L I

これを記号的に表すために、次のようにおく。 $Rr (= Cb)$ を dx 、 bc を dy 、 Cc を dt (ただし $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$) とする。また、先に求めたように、速度は $\sqrt{CG \times G}$ に比例するので、これを v とおく。したがって、 $w = CG \times G$ 、さらにその微分は $2vdv = d(CG \times G)$ と書ける。このとき、抵抗 R は $(Gdx - vdv) : \mp dt$ となる。

L I I

ここで注意しておくべきことがある。 Rr (Cb 、あるいは dx) は、 XC または XR の微分として考えることもできるし、同様に LR の微分として考えることもできる。そして LR が増加する場合には、それとともに重力 G も速度 v も増加するものと仮定されている (図では放物線 PW が PV より大きく、また直線 rn が RN より大きく描かれている)。このため、この規則を具体例に適用する際には、もし x を XC または XR と定めるならば、 dx と dG は反対符号を与えなければならない。というのも、その場合、図では x と G が互いに逆の向きに増加するものとして扱われているからである。したがって、 dG や dv の符号はそのままにしておきつつ、 $+dx$ は $-dx$ と書き換え、また $-dx$ は $+dx$ としなければならない。しかし、もし x を LR と定めるならば、符号については何も変更する必要はない。この点は注意のために述べておけば十分であろう。

L I I I

媒質の密度は、速度と抵抗が求められたあとでは、どのような仮定を採用しても、すでに見たように自然に導かれる。例えば、 $R = vD$ とおく、抵抗が「密度に比例し、速度の2乗に比例する」と仮定するならば、逆に密度は、抵抗に比例し、速度の2乗に反比例することになる。したがって、 $D = R : vv = (Gdx - vdv) : \mp vdt$ となる。さらに一般に、 $R = v^n D$ (ここで n は任意のべきの指数) と仮定すれば、 $D = R : v^n = (Gdx - vdv) : \mp v^n dt$ となる。

L I V

個々の例については立ち入らないことにする。この問題については、すでに別の方法、解析的手法によって以前に詳しく扱っており、その一例を数年前にフランス王立科学アカデミー (No. LXXXVI を参照) に提出しているからである。それは、もし価値あるものと認められれば年報に掲載されることになっていたが、実際にそれはすでに掲載されており、最近ようやく刊行された 1710 年の巻に収められているのを確認している。しかしながら、すべての例を代表するものとして、ただ一つの例だけを取り上げることにしよう。そこで、対数螺旋 (力の中心から引いたすべての半径と一定の角度で交わる曲線) を考える。

L V

したがって、 LC をそのような対数螺旋とし、力の中心を X とする。このとき、 X から引かれた任意の半径 XC は、曲線と一定の角 XCc をなすものとする。そしてその角の正割 (secans) と全正弦 (半

径)との比が $m:1$ であるとする。さらに、重力(向心力)は、距離のあるべき乗 n に反比例すると仮定する。同じことだが、 $G=1:XC^n=XC^{-n}$ 、また抵抗は $R=vvD$ とする。さて、この曲線では点GとXが一致する、 $GC=XC$ であるから、速度は $v\left[=\sqrt{(CG\times G)}\right]=XC^{(1-n)/2}$ 、抵抗は

$R\left[=(Gdx-vdv):\mp dt\right]=\frac{3-n}{\mp 2m}XC^{-n}$ 、密度は $D\left[=R:vv\right]=\frac{3-n}{\mp 2m}XC^{-1}$ となる。各点Cにおける速度は、距離XCのあるべき乗に比例し、その指数は $(1-n):2$ である。抵抗は、同じく距離の別のべきに比例し、その指数は $-n$ であり、さらに係数 $3-n:\mp 2m$ を伴う。ただしこの係数はここでは一定なので、単に距離の $-n$ 乗に比例すると言ってよい。 $n=3$ の場合には、この係数 $(3-n)$ が0となるため、抵抗そのものも消滅し0となる。最後に、密度は距離の -1 乗に比例し、さらに係数 $(3-n):\mp 2m$ を掛けたものとなる。簡単に言えば、密度は距離に反比例する。ただし、やはり $n=3$ の場合には例外であり、このときは密度もまた消滅する。これは、抵抗が消えることから直ちに明らかであった。以上の結果から、さまざまな帰結が導かれる。

L V I、帰結 I

$n>3$ であれば、この螺旋は上昇運動によって描かれ、 $n<3$ であれば、下降運動によって描かれ、そして $n=3$ の場合には、上昇でも下降でもこの曲線を描くことができる。この場合には密度も抵抗もともに0だからである。したがって、対数螺旋は、抵抗のない媒質中において、重力(向心力)が力の中心からの距離の立方に反比例する場合に描かれることが分かる(その中心は曲線の中心そのものである)。これはまさにアイザック・ニュートン(Isaac Newton)氏がP.47で見出した結果と一致する。ただし、そこでは「反比例する」という語が印刷上の誤りで抜け落ちているように思われる。

L V I I、帰結 I I

我々の証明から次のことが分かる。しばしば称賛されるあの人物は、自身の命題XV(P.284)(No.LXXXVII,P.327を参照)において、本来できたはずの一般性はなかった。彼は次のように述べている。「媒質の密度が各点において距離に反比例し、さらに向心力が密度の2乗に比例するならば、物体は、中心から引かれたすべての半径と一定の角で交わる螺旋上を運動する」と。しかし、もし彼が「密度の任意のべき乗に比例する」と述べていたならば、この命題はより広い意味においても同様に真であったはずである。距離のべき指数としてどのような数 n を採用しても、媒質の密度は結局、距離に反比例する形として現れるからである。ただし例外として、もし望むならば $n=3$ の場合がある。このとき密度は0、あるいはむしろ無限小となる。しかしこの場合でも、ある意味ではやはり距離に反比例していると言える。無限小量同士も有限量と同様に比較することを妨げるものは何もないからである。

L V I I I、帰結 I I I

したがって、向心力が距離の任意のべき乗に従う(直接比例の場合でも逆比例の場合でも)と仮定すると、対数螺旋を描くためには、媒質の密度は常に単純に距離に反比例しなければならない。ゆえに、ニュートンが「プリンキピア」命題XVI.P.288(No.LXXXVII,P.332-333を参照)において、向心力が距離のあるべきに反比例するならば、媒質の密度もまた距離の任意のべきに反比例しないと述べたその証明は、再検討されるべきである。

L I X、帰結 I V

前述 § XLIX) において $PT = \frac{1}{2}CG$ が得られているので、抵抗のない媒質中では、物体は半径 CG の円を描いて運動できることが分かる。ただしその際、物体には、曲線上の点 C において持っているのと同じ重力（中心へ向かう力）と同じ速度が与えられているものとする。このとき、向心力と遠心力とは互いに等しくなるからである。したがって、特に対数螺旋の場合、点 G が点 X に一致するので、任意の点 C における速度は、抵抗のない媒質中で同じ中心からの距離 XC を半径とする円運動を行うのに必要な速度と常に等しいことになる。この結果は、あの卓越した学者もすでに得ているが、彼の場合は、向心力が密度の 2 乗に比例するという、やや制限の強い仮定のもとでのみ導かれている（プリンキピア、P.285、系 I を参照）（No.LXXXVII,P.329 を参照）。

LX、帰結 V

すでに扱っている螺旋の傾きを変えて、角 XCc が全体の正弦（＝最大値）に対して $p:1$ の比になるようにする。すると、媒質の密度は前の場合の密度に対して、 $\frac{3-n}{\pm 2p}XC^{-1}$ と $\frac{3-n}{\pm 2m}XC^{-1}$ との比になる。つまり、距離 XC が一定と与えられているなら、密度は $1:p$ と $1:m$ の比で表せる。したがって、密度は $Cb:Cc$ 、つまり $OG:OC$ に比例する。しかし距離 XC が一定でないなら、密度は $OG:OC.XC$ に比例する。これは、ニュートンの系（「プリンキピア」P.285–286 の系 2）（No.LXXXVII,P.329 を参照）と一致する。ただしニュートンの結果は、より特殊な仮定から導かれている。

LX I、帰結 V I

抵抗力 $\frac{3-n}{2m}XC^{-n}$ を正の量として取ると、向心力 XC^{-n} に対して、 $(3-n):2$ と定数 m の比となる。

しかし特別な仮定、 $n=2$ の場合には、この比は $\frac{1}{2}:m$ となる。これは、 $\frac{1}{2}Cb:Cc$ あるいは $\frac{1}{2}OG:OC$ に等しい。したがって、ニュートン氏の「プリンキピア」P.286 の系 III は、この特定の場合においてのみ成立する。同様のことは、その次の系 IV についても言える。この場合には、抵抗力が向心力の半分より小さいときに限って、物体は対数螺旋上を運動することができるからである。しかし、もし n を 2 より大きくするか、あるいは小さくするかを適切に選ばば、この二つの力の比がどのようなであっても、物体は螺旋運動を行うことができる。たとえば $n=1$ とすると、向心力が媒質の密度そのものに比例する、あるいは位置の距離に反比例する場合には、抵抗力は向心力に対して $1:m$ の比となる。それは、いたるところで $Cb:Cc$ 、あるいは $OG:OC$ に等しい。したがって、この螺旋において物体が運動できることは明らかであり、ただしそのためには、抵抗力が向心力全体より小さいことが条件である。そしてこの場合に特有な点として、 $v\left[=XC^{(1-n)/2}\right]=XC^{0.2}=1$ なので、速度はどの点においても一定である。

LX I I、帰結 V I I

さらに明らかなことであるが、速度の式 $v=XC^{(1-n)/2}$ には文字 m が現れないので、中心から等しい距離にある点では、これらすべての螺旋において速度は等しくなる。したがって、上昇あるいは下降に要する時間は、それぞれの螺旋の長さそのものに比例する。そしてこのことは、一般的な仮定のもとで成立し、ニュートン氏が「プリンキピア」P.286 の系 V（No.LXXXVII,P.330 を参照）で、特別な場合 $n=2$ について述べていることと同様である。しかし、他にも述べるべきことは多いが、ここでは省略し、どこまで我々の結果がニュートンの結果と一致するかを、読者自身が検討できるように委ねることにする。

L X I I I

最後に付け加えるべきことについては、多くの言葉を費やして述べる必要はないと思うが、我々の提示した、抵抗のある媒質中における投射体の運動に関する一般的な規則は、抵抗のない媒質に関して考えられるあらゆる場合をも、すでに含んでいる。速度は抵抗とは無関係に $\sqrt{CG.G}$ に従うが、これに、線分 Cc を通過する微小時間を掛けると、その時間は、抵抗のない媒質においては、力の中心のまわりに描かれる面積、三角形 CXc 、あるいはその2倍である $CX.bc$ に比例することを、ニュートン氏が P.37 において見事に証明しているから、通過される微小線分 Cc は、その積、 $CX.bc \times \sqrt{CG.G}$ に比例する。(等速運動において、距離は速度と時間の両者に依存するからである。) 両辺を2乗すれば、 Cc^2 は $CX^2.bc^2 \times CG.G$ に比例する。ここから、 G は $Cc^2 : CX^2.bc^2 \times CG$ の比に従う。さらに、接線に垂線 XS を下ろすと $Cc : bc = CX : SX$ が成り立ち、また三角形 OCG と XCS の相似より $CG : CX = OS : SX$ であるから、結局、 G は $CX : OC.SX^3$ の比に従う。これはまさに、与えられた曲線の性質から力の法則を導くための定理そのものであり、かつて卓越した幾何学者アブラハム・ド・モアブル (Abraham de Moivre) 氏によって証明なしに私に伝えられたものである。その後、私は(別の基礎に基づいてではあるが) 証明を付して彼に送り返した。したがって、この公式を用いることによって、

与えられた曲線の性質から向心力を決定することができる。また逆に、向心力から曲線を求めることもできるし、さらにそのいずれからでも、速度および周期時間を求めることができる。

L X I V

しかし、この両者のあいだには大きな違いがあることを、注意しておかなければならない。前者、曲線が与えられていて、そこから向心力を求める場合は、直接的な微分法によって遂行され、単に各項の素朴で簡単な微分を行うだけで足りる。これに対して後者、力の法則が与えられていてそこから曲線を求める場合は、ある種の例では、やや多くの労力を必要とする。さらに別の例においては、たとえ図形の求積（面積計算）が許されていたとしても、なお現時点では解くことができない場合すらある。その場合には、前者の逆である積分法に頼らなければならないが、この方法はまだ望まれるほどの完成度には達していないからである。

L X V

さて、ここで見逃してはならないことがある。この方法によっては、しばしばそうであるように、同じ問題に対して、互いに異なる種類の複数の曲線が解として現れるということである。たとえば、抵抗のない媒質において、距離の3乗に反比例する向心力のもとで物体が描く曲線を求めるとしよう。この問題については、上でニュートン氏に従って、対数螺旋が解であると述べた。しかしそれに加えて、別種の螺旋もまたこの条件を満たすことを、私は以前から見出していた。その螺旋は次の性質をもつ。中心（焦点）から曲線上の任意の点に引いた直線は、その直線がある固定された方向となす角に対して逆比例する。あるいは同じことだが、円 ABH の中心を X とし、それを同時に螺旋 CDE の焦点とする。この螺旋は次の性質をもつ。任意の点 C に対して引いた直線 XC は、ある固定点 A から測った円弧 AB に逆比例する。あるいは別の言い方をすれば、 $XC \times AB$ が一定である。したがって、この螺旋は「双曲線的螺旋」、あるいは「逆アルキメデス螺旋」と呼ぶことができる。この螺旋と通常のアキメデス螺旋とは、次の共通点をもつからである。どちらにおいても、点の焦点からの距離が回転角に比例するが、通常のアキメデス螺旋ではそれが直接比例であるのに対し、ここでの螺旋では逆比例となる。

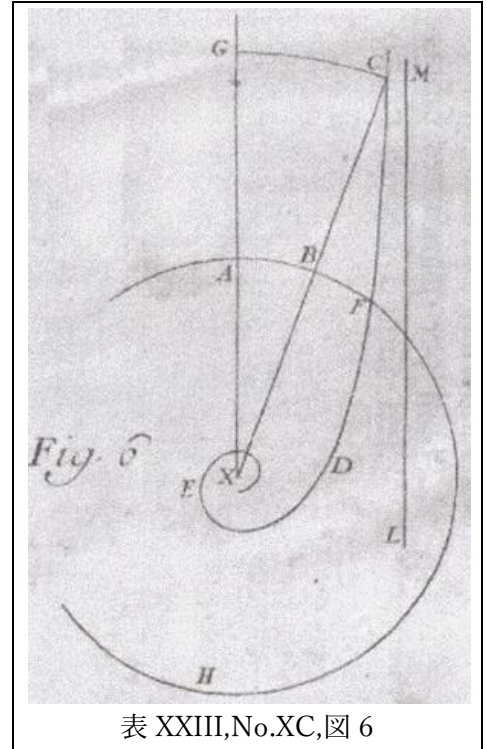


表 XXIII, No. XC, 図 6

L X V I

したがって、この我々の双曲線的螺旋 CDE は次のような性質をもつ。その漸近線は直線 XA に平行な LM であり、その直線からの距離は、弧 AF 、あるいは軸 XA の延長と曲線とのあいだに挟まれる任意の同心円弧 GC に等しい。これらの弧はすべて互いに等しい。このような性質をもつ螺旋が、抵抗のない媒質において描かれるためには、距離の3乗に反比例する向心力が必要である。そしてこのことは、対数螺旋の場合と同様に、我々の一般的な規則によって、誰でも容易に確かめることができる。

L X V I I

しかも、これだけでは不十分である。距離の3乗に反比例する力の法則を満たす曲線は、単に無数に存在するだけでなく、曲線の両方の分類、より正確には二つの大きな種類、代数曲線と超越曲線のいずれの側からも、それぞれに属する種が存在し、しかもそれらは互いにきわめて異なっている。ある種の曲線は、その構成のために円弧と直線の比較を必要とし、また別のものは、円の面積と双曲線の面積の比較を前提とし、さらにまた別のものでは、円弧同士を互いに比較することが必要となる。しかもこれらの中には、驚くべきことに、完全に代数的な曲線が無数に存在し、しかもそれらはさまざまな複雑さを持ち、任意の次数にまで達する。この主張の正しさを示すために、私はここでこれらの曲線の性質を述べることにする。これらの曲線に対しては、先に証明したモアブルの定理を用いれば、誰でも容易に向心力の法則を求めることができ、それが対数螺旋および双曲線的螺旋の場合と同様の形になることを理解するであろう。しかしながら、これらの曲線の認識へと私を導いた、積分法におけるいくつかの特別な手法については、ここで詳しく述べるべき場所ではないので省略する。

L X V I I

さてここで、円弧の比較によって定まるこれらの曲線の一般的な構成法を示そう。力の中心を X とし、そこを通る直線 XA を軸として引く。さらに任意の距離を隔てて、この直線に平行な直線 ZG を引く。次に、中心 X をもつ同心円弧 AM 、 BN 、 CO などを描き、それぞれの弧について、直線 ZG によって切り取られる部分が、ある一定の比をもつようにする。 $a:b = AG:AM = BH:BN = CI:CO = \dots$ となるように取る。すると、点 M, N, O, P を通る曲線 $MNOP$ が得られる。この曲線は、もし与えられた比 $a:b$ が数と数の比であるならば、有理的な比であるならば、代数曲線となる。ただし、その比の違いに応じて、曲線の次数は異なる。これに対して、もし a と b が互いに通約できない無理数的であれば、その曲線は超越曲線となる。しかし、この比 $a:b$ がどのようなものであれ、またそこから生じる曲線が代数的であれ超越的であれ、この曲線は常に、これを描くためには、点 X に向かう向心力を必要とし、しかもその力は距離の3乗に反比例する性質をもつ。言い換えれば、点 M における力と、任意の他の点 N における力との比は、 XN^3 (あるいは XB^3) と XM^3

(あるいは XA^3) の比に等しい。そして、この曲線はいくつかの興味深い性質をもっている。まず第一に、この曲線は、力の中心 X から等しい距離にある2本の漸近線をもつ。その距離は、 a 、 b 、および垂線 XZ に対する第4比例量に等しい。また、そのうちの一つの漸近線は軸 XA に平行であり、もう一つは、この軸となす角が、直角に対して $2b:a$ の比をなすような傾きをもつ。さらに注目すべきこととして、もし b が $2a$ を何倍か上回るならば、この曲線は漸近線に達する前に、中心 X のまわりを、 $b:2a$ に含まれる単位の数だけ、完全な回転を行う。特に、もし $b=2a$ であれば、この曲線は中心のまわりをただ一度だけ回り、一方の無限遠の端から出発して他方の無限遠に至る。この場合には、二つの漸近線はともに軸 XA に平行となり、その軸からの距離は、平行線 ZG との間隔、すなわち垂線 XZ の2倍に等しい。また、もし b が a より小さいならば、曲線 $MNOP$ は軸 XA に向かって凸となる。そしてこの場合には、向心力が負、すなわち遠心力に変わる場合でも、(ただしその大きさは依然として中心 X からの距離の3乗に反比例するものとするならば) この曲線は運動によって描かれる。しかし、これらの点にあまり立ち入りすぎるのはやめて、次へ進むことにする。

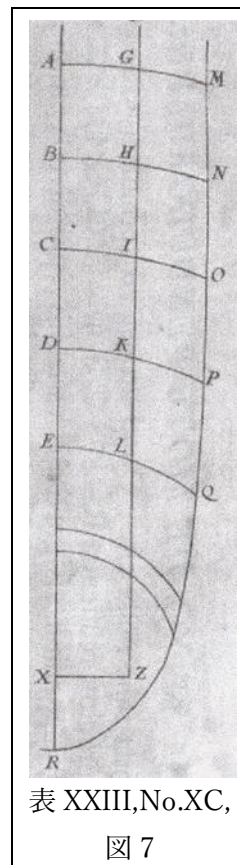


表 XXIII, No. XC,
図 7

L X I X

したがって、対数螺旋において物体が運動するためには、距離の3乗に反比例する向心力が必要であるという事実から、その逆、このような力の法則が与えられれば、必ず曲線は対数螺旋になると結論するのは誤りである。というのも、双曲線的螺旋やその他多くの曲線（代数的なものも超越的なものも）が、同じ力の法則に従いうるからである。同様に、物体が円錐曲線上を運動し、そのとき力の中心が焦点にあるならば、向心力は距離の2乗に反比例することが証明されるが、このことから、このような力の法則が与えられれば、物体の描く軌道は円錐曲線であるに違いないと結論するのも、まちがった推論である。もっとも、ニュートン氏自身もこの同じ誤りに陥っている（P.55の系II、および同様の例としてP.49の系Iを参照）。ただし、この場合は、距離の3乗に反比例する力の仮定の場合とは事情が異なり、我々が示したように多くの異なる曲線が成り立つのに対して、距離の2乗に反比例する力の場合には、これを許す曲線は円錐曲線のみである、ということが証明されていない限りは、この結論は正当化されない。

L X X

この逆の命題については、私の知る限り、最初に発見し、かつ証明を与えたのは私自身であり、それを著名なフランス王立科学アカデミー（Académie Royale des Sciences）に提出した。その後、私の助言によって、我々が高名な学者ヤコブ・ヘルマン（Jakob Hermann）氏もまた、自らの証明をこれに付け加えた。こうして現在では、惑星の軌道が真に円錐曲線、楕円の形をもつことについて、もはや疑う余地はない。ただしそれは、惑星が太陽に向かって、距離の2乗に反比例する引力を受けている、という仮定が認められる限りにおいてである。この点の真実については、以前は確実に知ることができなかったのである。もし仮に、さきに距離の3乗に反比例する力の場合に見たように、同じこの中心力の法則に対して、異なる種類の複数の曲線が対応しうるとしたら、いったいなぜ、他の同様に条件を満たす曲線ではなく、楕円だけを惑星の軌道として採用すべき理由があるのか、私には分からない。

L X X I

さて、ここまで述べてきたことは、すべて、かつて私がニュートン氏の著作を読んだ際に得ていたいくつかの考察にすぎない。しかしそれらを今になって公にしたのは、ちょうどこの著作の新しい版が準備中であり、私がこれを書いているまさに今月中にも印刷される見込みで、しかも多くの注釈・修正・新しい発見によって増補され、整えられると聞いているからである。その修正の中には、私が上の§XXXIIにおいて述べたもの、ニュートン氏の著書（P.265）における、抵抗と重力の比の定め方が正確でないという点に関する訂正も、含まれるであろうと聞いている。そしてこの点については、卓越した人物である私の親族ニコラウス・ベルヌーイ（Nicolaus Bernoulli）が（彼は我々の学問の熱心な研究者であり、最近までイングランドに滞在していたが）、新版の印刷が完了する前に適切にこれを指摘したため、その卓越した著者もまた、この指摘を特別の紙片として自著に挿入することを、ためらわなかったのである。

L X X I I

しかし、この主題を他のものに先んじて詳しく解明すべきものと考えたのは、この問題が、かの偉大な人物自身も認めているように（P.290）、議論が入り組んでいて、とりわけ説明と明確化を必要とするものだったからである。さて、私がその目的を達したかどうかは、読者の判断に委ねることとする。ただ、私としては、もしニュートン氏自身がこのつたない試みを認めてくれるなら、それで十分である。

とりわけ、もし幸運にも、あの卓越した人物がこの問題について公にした内容が（第Ⅱ版では第Ⅰ版が改訂されるのが常だから）、これら私の議論と、まったく同一でなくとも、少なくとも私の望むところではあるが、互いに矛盾しないものであればそれで満足である。

L X X I I I

さらに付け加えるならば、あの比類なき人物ニュートン氏も、私がここで意図したのは、彼自身が序文の末尾で読者に求めていることと何ら異なるものではない、と認めてくれるであろうと私は思う。これほど難しい問題における誤りを責め立てようという意図は、私にはまったくなかったのであり、むしろ、それらを誠実に訂正し、いくつかの不足している点（これほど巨大な著作においては、ごくわずかなものにすぎないが）を好意的に補い、さらに新たな試みによって真理を探究すること、これこそが、私が一貫して目指してきたことである。

§ X X X V I I I への補足

ここで、（本節では重力を一樣と仮定しているが）抵抗と重力とのあいだの関係 $R:G=2Cb-dCG:\mp 2Cc$ を、通常の有限量によって表すために、次のように考える。まず、先に定めたコラディウスとサブラディウスに最も近い、別のコラディウス cg とサブラディウス og を考え、そのコラディウス cg が直線 OG を点 F において切るものとする。また、第2の進展曲線の半径を OH とする。この第2の進展曲線の展開によって、第1の進展曲線 IO が生成されるものとする。さらに同様

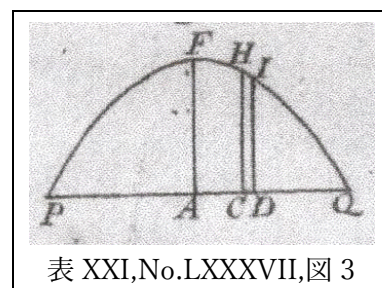


表 XXI, No. LXXXVII, 図 3

に、この第2の進展曲線のコラディウスを OM 、サブラディウスを HM とする。ここから、エボリュートの性質により $CO:OH=Cc:Oo$ が成り立ち、また $OH:HM [=CO:CG]=Oo:Fg$ であるから、合成比により $CO:HM=Cc:Fg$ となる。したがって $Fg=HM.Cc:CO$ である。ゆえに $dCG=cg-CG=Fg-Cb=HM.Cc:CO-Cb$ となり、さらに $2Cb-dCG=3Cb-HM.Cc:CO$ である。これを先の比例関係 $R:G=2Cb-dCG:\mp 2Cc$ に代入すると、 $R:G=3Cb-\frac{HM.Cc}{CO}:\mp 2Cc$ となる。さらにここ

で、 Cb と Cc の代わりに、それぞれに比例する量 OG と CO を代入すると、新しい関係 $R:G=3OG-HM:\mp 2CO$ が得られる。抵抗と重力との比は、第1のエボリュートのサブラディウスの3倍から第2のエボリュートのサブラディウスを引いたものと、同じ第1のエボリュートの半径の2倍との比に等しい。このことから直ちに、曲線に沿った上昇または下降が物理的に可能かどうかを判断することができる。 $3OG-HM$ が負ならば、あるいは同じことだが、第2のエボリュートのサブラディウスが第1のエボリュートのサブラディウスの3倍より大きいならば、上昇は可能であると判断される。これに対して、もしそれがこの3倍より小さいならば、下降が物理的に可能であることを示す。もし両者が等しい場合、通常の放物線になるが、そのときには自然は上昇と下降の両方を許す。その場合には抵抗が存在しないからである。次に、§ L における式 $R=(2CB.G-d(CG.G)):\mp 2Cc$ （ここでは重力が、中心からの距離に応じて変化するものと仮定されている）について言えば、これもまた、時間とページの余裕が許すならば、同様に有限量によって一般的に表現することが可能であろう。しかしながら、その一部は我々の読者に委ねることにする。

第1巻、目次

I	発泡と発酵について、新しい仮説に基づく論文 付録：人工的永久運動について	1 19
II	ヤコブ・ベルヌーイ氏（著者の兄弟）による、円錐曲線の理論に関する新しい定理	21
III	ヤコブ・ベルヌーイ氏による螺旋放物線の寸法における微分計算の一試み、 曲線の屈曲、展開線その他について	22
IV	張力・曲線に関する問題の解法	24
V	ヨハン・ベルヌーイ氏のテコの原理から振動中心を導く証明	27
VI	光線の焦線（曲線）の解法。 通常のデカルト幾何学（解析幾何）およびその他の方法	27
VII	風によって膨らんだ帆が示す曲がり（曲率）の問題の解法	33
VIII	ヨハン・ベルヌーイ氏、サイクロイド線に関する論文への補遺	34
IX	ド・ボーン氏がかつてデカルトに提起した問題の解法	35
X	ベルヌーイ医師の手紙からの抜粋 最小の薄明の日を幾何学的に求めるという問題の解	37
XI	デカルト氏により提起され、ド・ボーン氏が与えた問題の解法	38
XII	幾何学者への告知、方程式の解法に関する問題	39
XIII	その問題（方程式の解法）の解答 学者誌 Journal des Savans の 1693 年第 28 号に掲載された問題の解答	39
XIV	この方法に対する反論・疑問、医師ベルヌーイ氏に宛てた返答	42
XV	方程式解法に関する方法への反論に対する再反論 医師ベルヌーイ氏の回答	43
XVI	この応答に関する考察、あるいはその方法に対する新たな反証・事例 幾何学上のある問題に関して、学術誌 Journal des Sçavans の 1694 年第 3 号 に、ベルヌーイ氏の名で掲載された返答についての注釈	45
XVII	命題に関する論理学	47
XVIII	筋肉の運動についての物理学的・解剖学的学位論文	54
XIX	与えられた点から等速で離れていく曲線の容易な作図法	67
XX	一次微分方程式を構成する一般的方法	70
XXI	一般的な級数を用いてすべての曲線の面積及び長さを求める方法に関する 補遺	71
XXII	ロピタル侯爵による平衡曲線の問題及び解答	74
XXIII	ヨハン・ベルヌーイ氏による、前述の解への批評	77
XXIV	ライプニッツ氏の小論、平衡を保つ荷重の運動線の作図に関する考察	82

XXV	ロピタル侯爵による平衡曲線問題の解法 ヨハン・ベルヌーイ氏による補足	83 84
XXVI	円による関数によって曲線の長さを測定することに関する考察	84
XXVII	ボース曲線の構成に関する解析的および総合的証明	87
XXVIII	チルンハウス氏による、新しく特異な幾何学の発展	90
XXIX	ライプニッツ氏による曲線や図形の寸法を求めるための重心の新しい使い方について	94
XXX	デカルト幾何学が軌跡の決定において、欠陥を補う補足	96
XXXI	曲線図形の普遍的求積法・幾何学的連続近似による作図法	101
XXXII	最速降下線問題の解答提出期限の延長	102
XXXIII	プログラム、二つの問題の提示 最速降下の線について 第二の純粹幾何学的問題	104 104 105
XXXIV	チルンハウス氏によるベルヌーイ氏の批評に対する返答	107
XXXV	コノイドおよびスフェロイドについての考察	111
XXXVI	指数関数の計算の原理	114
XXXVII	不均一な透明媒質における光線の曲率の理論、および最速降下線の解	119
XXXVIII	等周問題について	125
XXXIX	解決されるべき諸問題	131
XL	等周問題に関する書簡（解答を含む）	132
XLI	ヤコブ・ベルヌーイ氏による、解答への意見	137
XLII	意見への回答	138
XLIII	ヤコブ・ベルヌーイ氏による、弟の応答への意見	141
XLIV	意見への第二の回答	142
XLV	ヤコブ・ベルヌーイ氏による等周問題の解の検討	142
XLVI	ヤコブ・ベルヌーイ氏による、第2の回答への意見	149
XLVII	前述への回答としての書簡の抜粋	150
XLVIII	ド・ライル氏の力学論からの抜粋 サイクロイドの等時性について	156
XLIX	互いに一定の比をもつ放物線弧の代数的研究 ド・ライル氏の誤りの指摘	158
L	曲線の長さを求めるための一般定理	162

LI	ヤコブ・ベルヌーイ氏による、無数のサイクロイドに関する問題の幾何学的証明 6つの兄弟問題 無数の対数曲線を直角に横切る曲線についての問題	1 6 5 1 6 8 1 7 1
LII	自ら提示したいくつかの問題に対する兄の解答への注記	1 7 4
LIII	栄養に関する医学・物理学的論考	1 8 1
LIV	最小抵抗の立体に関する問題の解	2 0 1
LV	ロピタル侯爵による軸方向の運動に対して流体抵抗が最小となる回転体を求める方法	2 0 4
LVI	最小抵抗をもつ回転体について	2 0 7
LVII	ライプニッツの定理の証明、活力（運動エネルギー）は速度の2乗に比例する	2 1 2
LVIII	基本サイクロイドの無数の部分が求積可能であること、およびその他の同種の求積可能な諸領域の決定	2 1 2
LIX	Jacques Bernoulli による、サイクロイドの帯状部分の求積の証明	2 1 7
LX	サイクロイド的空間の新しい求積法に対する補足 ならびに、ある重心について	2 1 9
LXI	サイクロイド帯の求積ならびに、サイクロイド的立体扇形の重心問題の解決	2 2 3
LXII	気圧計を発光させる新しい方法	2 2 4
LXIII	新しい燐光物質	2 3 0
LXIV	新しい燐光体について	2 3 4
LXV	反射光学・屈折光学に関する考察	2 4 1
LXVI	等周問題についての書簡からの抜粋	2 4 7
LXVII	あらゆる代数曲線において、接触円の半径、曲率を、迅速に決定する方法	2 4 8
LXVIII	代数曲線および超越曲線に対して、曲率を構成する新しい方法	2 5 0
LXIX	角または弧の多分割、二つの普遍方程式によって提示し、サイクロイドのすべての可積分帯域を一般的に決定する	2 5 3
LXX	積分計算に関する問題の解法	2 5 8
LXXI	分子と分母とがある特定の場合（ともに0となる場合）の分数の値を決定するためのもの	2 6 3
LXXII	問題：代数曲線を、それと等しい無数の曲線へ変換せよ	2 6 7
LXXIII	LXXII の解	2 6 7
LXXIV	曲線に沿った運動	2 6 8

LXXV	等周問題の解と証明	279
LXXVI	摩擦を受けた物体の発光について	285
LXXVII	運動によって図形を測定するための迅速な近似法の考案、這行運動の考察を提示するもの	287
LXXVIII	同じ主題に関するライプニッツ氏の書簡抜粋	292
LXXIX	同じ主題に関するベルヌーイ氏の応答抜粋	293
LXXX	楕円の周長を円の周長に還元するための定理	294
LXXXI	曲線の長さについて	296
LXXXII	曲線変換問題に関するクレイグ氏の誤った解の批判	298
LXXXIII	クレイグ氏の撤回（誤りの認定）	298
LXXXIV	賭博に関する書簡	300
LXXXV	ヘルマン氏の書簡抜粋、中心力の逆問題について	309
LXXXVI	ベルヌーイ氏よりヘルマン氏への返信の抜粋	309
LXXXVII	ニュートン氏の「自然哲学の数学的諸原理」より抜粋	316
LXXXVIII	媒質の密度と速度のベキの合成比に従う抵抗中での中心力について ニコラ・ベルヌーイ氏による付記	334
		337
LXXXIX	角や弧を、任意の数に分割する問題	339
XC	重い物体、振り子、そして投射体の運動について	342

原書

「Johannis Bernoulli Opera omnia : tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita : tomus primus, quo continentur ea quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt」

<https://uvadoc.uva.es/handle/10324/49380>

参照 2023/3/26

翻訳

鈴木啓一、ChatGPT

変更履歴

2026年 3月28日 第1版	
2026年 4月 5日 第2版	・掛算表示、「 $\times$ 」ではなく「 $\cdot$ 」で表示された場合があった。ただ、点の位置が下にあったので、点表示の掛算を「 $n.(n-1).(n-2)$ 」という表現で統一した。