Ｙ軸回転体の体積、同軸座標系での置換積分

鈴木啓一

Ｙ軸回転体の体積

1984 年 2 月 MAAで下記が発表された

注:Facebook アマチュア数学協会での投稿より引用。

https://www.maa.org/sites/default/files/0002989054163.di991689.99p0631a.pdf

THE DISK AND SHELL METHOD

CHARLES A. CABLE
Department of Mathematics, Allegheny College, Meadville, PA 16335

In most calculus books there is little effort given to showing that the cylindrical shell method and disk method give the same value when computing the volume of a solid of revolution. Indeed it is not obvious that these two distinct methods should give the same result. In some texts this is demonstrated when the trapezoid bounded by the x-axis, $y = mx + b$, $x = a$ and $x = b$ is revolved about the y-axis.

In this paper we shall show that the cylindrical shell and disk methods give the same value if the region revolved about the y-axis is bounded by $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ and the x-axis, provided $f(x)$ is a differentiable function on $[a, b]$ and $f(x)$ is one-to-one. The proof is simple and uses two theorems which the students have recently learned (substitution formula and integration by parts). This proof can easily be included in a calculus course.

We observe from the way that $m(y)$ is defined that it is continuous on $[0, d]$. If we evaluate the volume obtained by revolving the region R about the y-axis by using the disk method, we find this to be $\int_0^d \pi b^2\,dy - \int_0^d \pi m(y)\,dy$. This is equal to

$$\int_0^d \pi b^2\,dy - \int_0^c \pi a^2\,dy - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy = \pi[b^2 d - a^2 c] - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy.$$

By the substitution formula, the latter expression is equal to $\pi[b^2 d - a^2 c] - \int_a^b \pi x^2 f'(x)\,dx$. A straightforward application of the integration by parts formula and algebraic simplification shows that

$$\boxed{\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx} = \pi[b^2 d - a^2 c] - \boxed{\int \pi x^2 f'(x)\,dx}$$

and the argument is complete.

$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$ は図1の斜線部、$\int_a^b \pi x^2 f'(x) dx$ は図2の斜線部の y 軸回転体の体積を示す。

図1

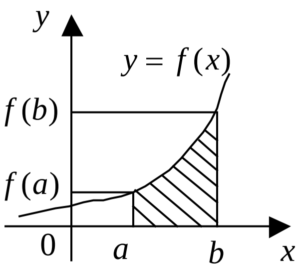
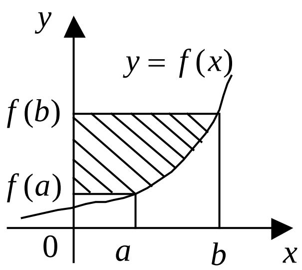


図2



なお、この資料は論文に見えないので、2つの式はすでに既知だったかもしれない。

日本数学協会　年次大会
令和？年９月

同軸座標系での置換積分

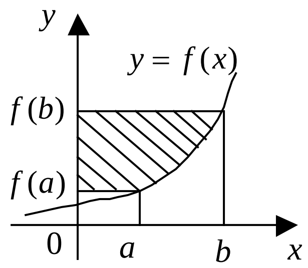
1975 年/秋 私が高校３年のとき、偶然見つけた式

置換積分とは、$\int y dx = \int y \frac{dx}{dt} dt$ のように新しい座標系を作って積分するものである。私は、$\int x dy = \int x \frac{dy}{dx} dx$ のように新しい座標系を作らない置換積分も成り立つことを示した。

（定理）

$y = f(x)$ は区間 $[a,b]$ で微分可能であれば、$\int_a^b x f'(x) dx$ は右図の斜線部の面積を示す。

（証明１）



部分積分法により

$$\int_a^b x f'(x) dx = [x f(x)]_a^b - \int_a^b f(x) dx$$

$$= b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx$$

これを幾何的に見ると斜線部の面積を示す。

（証明２）

斜線部の面積を S 、$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i], x_0 = a, x_n = b$ とする。

$$S = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \{ f(x_i) - f(x_{i-1}) \} \qquad \left({}^{\exists}\eta_i \in [x_i, x_{i-1}] \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \eta_i f'(\eta_i') (x_i - x_{i-1}) \qquad \left({}^{\exists}\eta_i' \in [x_i, x_{i-1}] \right)$$

$$\to \int_a^b x f'(x) dx \quad (n \to \infty)$$

（証明完）

これを拡張すると、$2\pi \int_a^b x f(x) dx$, $\pi \int_a^b x^2 f'(x) dx$, $2\pi \int_a^b x f'(x) f(x) dx$, $2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ という式ができる。

高校３年のとき、この置換積分の証明及びその応用を先生に提出しました。数日後、先生からの回答は「おまえの式は正しい、しかし受験では絶対使わないこと」でした。当時の教科書・数学公式集になかったからです。さらに高校の同級生には、使われては困るので秘密にしました。大学入学後、大学の先生や同級生に上記式を話ししましたが、だれも取り合ってもらえませんでした。大学卒業後の5～10年後に、一部の参考書に使われ始め、今に至ります。

高校生だった当時の私にとって、「数学とは問題を解く学問」から「数学とは作っていい学問」に変わりました。しかし、いいかどうか正式に評価し、この後どうすべきかを指導してくれる人がいたならば、私の人生変わってたかも。