日本数学協会　年次大会
平成 31 年　9 月

＜ポスターセッション予稿フォーム＞

題名　$\left[e^{i\pi} = -1\right]$について

鈴木啓一

複素関数論における e^{ix} の定義

複素数の四則演算を定義し、べき級数により一般の複素関数を定義する。

関数例

z を複素数として、$e^{z} \equiv 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ により複素数の指数関数を定義する。

x を実数として、$z = i\,x$ とおく。

$$1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 、という関係式ができる。$x = \pi$ とおくと、$\left[e^{i\pi} = -1\right]$となる。

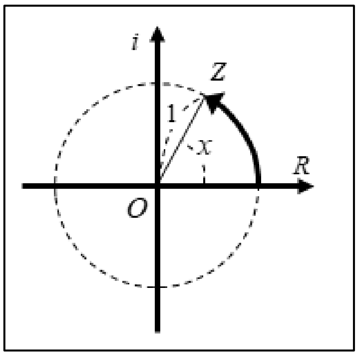
ここで、私はあえて言いたい

$\left[e^{i\pi} = -1\right]$さん、あなたは綺麗（美人）だけど、なにが言いたいの？と

e^{ix} に特化した定義案、及び $e^{i\pi} = -1$ の説明

$f(x) \equiv \{$複素平面上の単位円において、偏角がxのときの座標$\}$

と定義する。具体的には $f(x) = \cos x + i \sin x$ とおける。



$$\cos x + i \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos x + i \sin x\right) = i\left(\cos x + i \sin x\right)$$

より，$\dfrac{d}{dx} f(x) = i\, f(x)$　　　　　　$\cdots\cdots ②$

が成り立つ。①・②の性質より、実数の指数関数を参考に、$f(x) = e^{ix}$ と表記する。

e とは、あくまでも関数表記であって定数ではない。ただし、関数 e^{ix} は、実数の指数関数と同じ性質がある。

　　実数の指数関数の積＝指数の和

　　単位円上の点の積＝偏角の和

つまり、図にすると、円周上の点の軌跡は、実数の指数関数の軌跡と同じ性質になる。

$x = \pi$ とおくと、$\left[e^{i\pi} = -1\right]$ となる。この意味は

「複素平面上の単位円において、偏角が π の場合の座標は－1 である」と解釈できる。

＜ポスターセッション予稿フォーム＞

e^{ix} の拡張

　複素数の乗法は回転群と一致するので、拡張し、i 平面上の回転・j 平面上の回転を考える。ij とは、i 回転・j 回転の合成と解釈する。$Z=a+bi+cj+dij\left(a,b,c,d\in R\right)$ とする。四則演算・交換法則・結合法則・分配法則すべて成り立つ。ただし、$a=-d, b=c$ または $a=d, b=-c$ ならば、割算ができない。

$Z=a+bi+cj+dij=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij\right)\left(\alpha_i,\beta_i,\alpha_j,\beta_j,\alpha_{ij},\beta_{ij}\in R\right)$、と積で表示できる。

複素空間上の絶対値を $\|Z\|$ と表記する。$\|Z_1\|\|Z_2\|=\|Z_1Z_2\|$ を満たす絶対値の式が定義できる。

$$\|Z\|=\sqrt[4]{\left(a-d\right)^2+\left(b+c\right)^2}\ \sqrt[4]{\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2}=\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}$$

$$Z=\|Z\|\left(\cos\theta_i+i\sin\theta_i\right)\left(\cos\theta_j+j\sin\theta_j\right)\left(\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\right)=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$$

$ad=bc$ ならば、

$Z=a+bi+cj+dij=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)$、と積で表示できる。

$$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}=\frac{1}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}$$

$$Z=\|Z\|\left(\cos\theta_i+i\sin\theta_i\right)\left(\cos\theta_j+j\sin\theta_j\right)=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j}$$

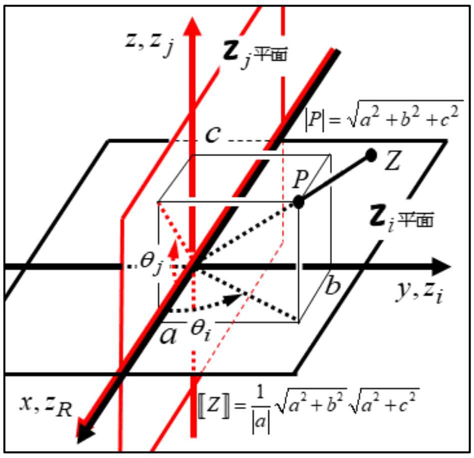
$$\cos\theta_i=\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta_i=\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\theta_j=\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\sin\theta_j=\frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

これらの式で右図のような解釈ができる。



　3次元ユークリッド空間 $\mathbf{E}(3)$ 上の点 $\left(x_1,x_2,x_3\right)$ において、条件 $x_1x_4=x_2x_3$ を満たす新たな変数 x_4 を追加して、4次元ユークリッド空間 $\mathbf{E}(4)$ とする。$\mathbf{E}(4)$ 上の絶対値を $|E|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2}$ と定義する。絶対値の式 $|E_1||E_2|=|E_1E_2|$ を満たすような積 E_1E_2 が定義できる。定義方法は 4 種類ある。その定義の中で、$ad=bc$ という条件の複素空間上の積と一致する定義が存在する。つまり、$Z=\ \ Z\ \ e^{i\theta_i+j\theta_j}$ が利用可能ということがわかる。

注：絶対値の積の定義のポイント（2種類の方法）

　乗法公式 $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(ax-by\right)^2+\left(ay+bx\right)^2$ により、$\left(a,b\right)$ と $\left(x,y\right)$ の積を $\left(ax-by,ay+bx\right)=\left(\text{複素数の積}\right)$ で定義できる。また、$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(ax+by\right)^2+\left(ay-bx\right)^2$ により、$\left(ax+by,ay-bx\right)=\left(\text{内積},|\text{外積}|\right)$ でも定義できる。