複素空間の考察の概要

鈴木　啓一

$$Z = a + bi + cj + dij = (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij) = r(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)(\cos\theta_j + j\sin\theta_j)(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}) = re^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}$$ の関係

$$a^2 + b^2 = (\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2\alpha_{ij}{}^2 + \beta_j{}^2\beta_{ij}{}^2)$$

$$a^2 + c^2 = (\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2)(\alpha_i{}^2\alpha_{ij}{}^2 + \beta_i{}^2\beta_{ij}{}^2)$$

$$a^2 - d^2 = (\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2)(\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2 - \beta_i{}^2\beta_j{}^2)$$

$$b^2 - c^2 = (\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2)(\beta_i{}^2\alpha_j{}^2 - \alpha_i{}^2\beta_j{}^2)$$

$$b^2 + d^2 = (\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2)(\alpha_i{}^2\beta_{ij}{}^2 + \beta_i{}^2\alpha_{ij}{}^2)$$

$$c^2 + d^2 = (\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2 + \beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2)(\alpha_{ij}{}^2 + \beta_{ij}{}^2)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = (\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 - \beta_j{}^2)(\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2)$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = (\alpha_i{}^2 - \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2)(\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2)$$

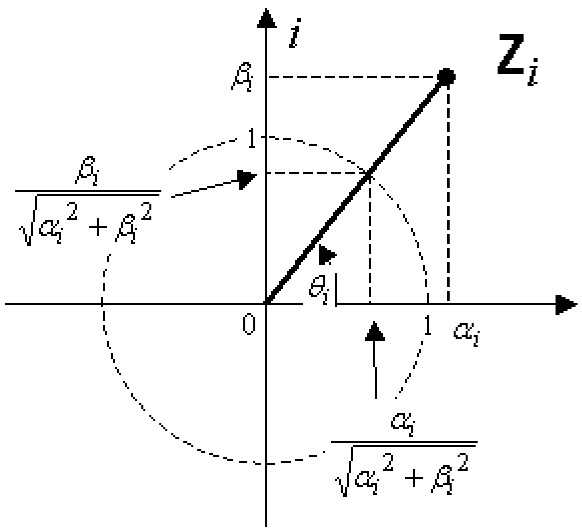
$$ad - bc = \alpha_{ij}\beta_{ij}(\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2)$$

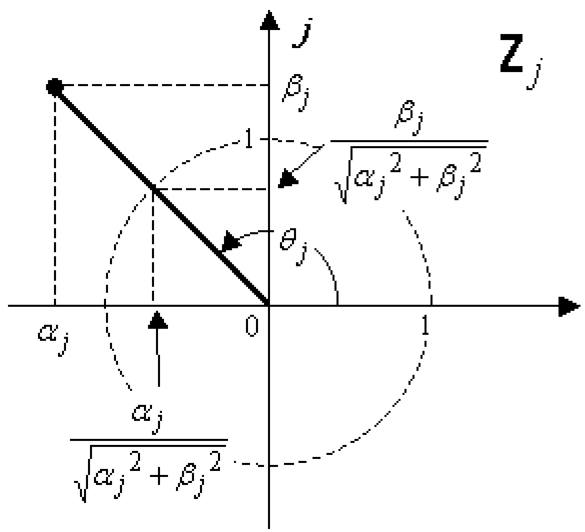
$$|Z| = r = \sqrt[4]{\left((a-d)^2 + (b+c)^2\right)\left((a+d)^2 + (b-c)^2\right)} = \sqrt{\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2}$$

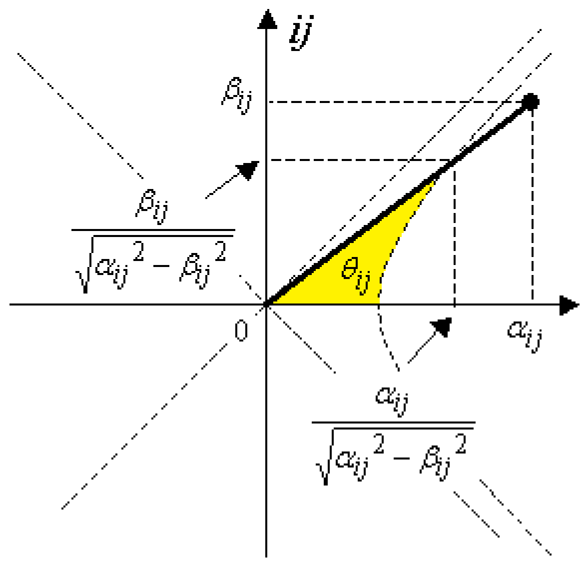
$$a + bi + cj + dij = \sqrt{\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2} \times \frac{\alpha_i + \beta_i i}{\sqrt{\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2}}\frac{\alpha_j + \beta_j j}{\sqrt{\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2}}\frac{\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2}}$$

$$= r(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)(\cos\theta_j + j\sin\theta_j)(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij})$$

を満たす $\theta_i, \theta_j, \theta_{ij}$ が存在する。







$$\cos\theta_i=\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}},\sin\theta_i=\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}\qquad \cos^2\theta_i=\frac{1}{2r^2}\left(r^2+a^2-b^2+c^2-d^2\right)、\sin^2\theta_i=\frac{1}{2r^2}\left(r^2-a^2+b^2-c^2+d^2\right)$$

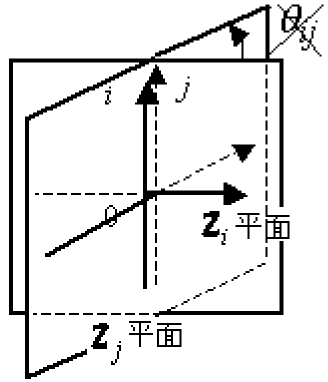
$$\cos\theta_j=\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}},\sin\theta_j=\frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}}\qquad \cos^2\theta_j=\frac{1}{2r^2}\left(r^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)、\sin^2\theta_j=\frac{1}{2r^2}\left(r^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$

$$\cosh\theta_i=\frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}},\sinh\theta_i=\frac{\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}\qquad \cosh^2\theta_{ij}=\frac{1}{2r^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+r^2\right)、\sinh^2\theta_{ij}=\frac{1}{2r^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-r^2\right)$$

$$\theta_{ij}=\log\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}=\log\frac{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}=\frac{1}{2}\log\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}=\frac{1}{2}\log\frac{(a+d)^2+(b-c)^2}{r^2}=\frac{1}{2}\log\frac{r^2}{(a-d)^2+(b+c)^2}$$

$$r^2=\sqrt{\left((a-d)^2+(b+c)^2\right)\left((a+d)^2+(b-c)^2\right)}\text{ より、}\theta_{ij}=\frac{1}{4}\log\frac{(a+d)^2+(b-c)^2}{(a-d)^2+(b+c)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ad-bc)}{a^2+b^2+c^2+d^2-2(ad-bc)}$$

当初、θ_{ij} を $\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_j$ 平面の偏角と考えていたが、違ったようである。



双曲線の性質

$$\left(\cosh\theta_1+ij\sinh\theta_1\right)\left(\cosh\theta_2+ij\sinh\theta_2\right)=\cosh\left(\theta_1+\theta_2\right)+ij\sinh\left(\theta_1+\theta_2\right)$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cosh\theta+ij\sinh\theta\right)=\sinh\theta+ij\cosh\theta=\frac{1}{ij}\left((ij)^2\cosh\theta+ij\sinh\theta\right)=\frac{ij}{(ij)^2}\left(\cosh\theta+ij\sinh\theta\right)=ij\left(\cosh\theta+ij\sinh\theta\right)$$

この微分方程式より、$\cosh\theta+ij\sinh\theta=e^{ij\theta}$ と表記する。

$\cos\theta_i+i\sin\theta_i=e^{i\theta_i},\cos\theta_j+j\sin\theta_j=e^{j\theta_j}$ となるので、$Z=a+bi+cj+dij=re^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$

課題

- ３次元空間（又は４次元空間）と複素空間との関係
- 微積分
- 応用