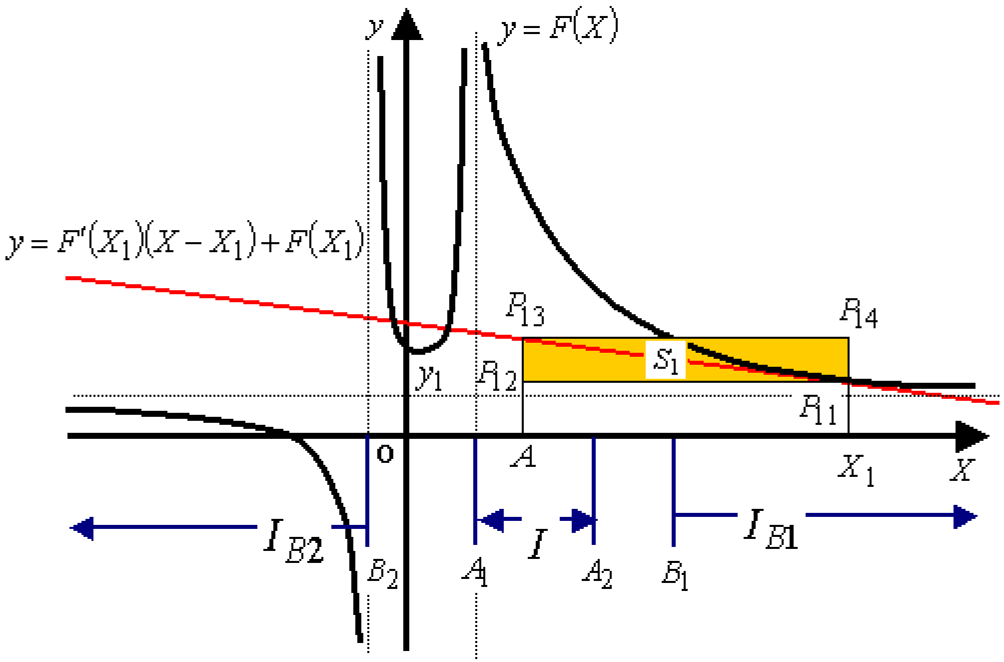
ローラン展開の主要部を実数で定義

$F(X)$が区間I_{B1}上で第n次マイナス導関数が存在し、$X=A$で無限遠点での第$n-1$次マイナス微分係数が存在するとする。
$A\in I, B\in I_{B1}, \lim_{X\to\infty} F(X)=y_1$とすると

$$F(B)=y_1+\frac{F^{(-1)}(A)}{B-A}+\frac{F^{(-2)}(A)}{2!(B-A)^2}+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(B-A)^{n-1}}+\frac{F^{(-n)}(\Phi:A)}{n!(B-A)^n}$$

を満たす$\Phi\in I_{B1}$が存在する。



（証明）

$$G(X)=F(X)-\left(y_1+\frac{F^{(-1)}(A)}{X-A}+\frac{F^{(-2)}(A)}{2!(X-A)^2}+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(X-A)^{n-1}}\right)$$

$(X\in I_{B1})$とおく。

$0<i<n$として、$F^{(-i)}(A)$が有限だから、$\lim_{X\to\infty}\frac{F^{(-i)}(A)}{i!(X-A)^i}=0$となる。

したがって、

$$\lim_{X\to\infty}G(X)=\lim_{X\to\infty}F(X)-\lim_{X\to\infty}\left(y_1+\frac{F^{(-1)}(A)}{X-A}+\frac{F^{(-2)}(A)}{2!(X-A)^2}+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(X-A)^{n-1}}\right)\quad =y_1-y_1=0$$

$H(X)=\frac{1}{(X-A)^n}$とおく。

$\lim_{X\to\infty}H(X)=0$なので、$\lim_{X_1\to\infty}\frac{G(X)-G(X_1)}{H(X)-H(X_1)}=\frac{G(X)}{H(X)}=\frac{G'(\Phi_1)}{H'(\Phi_1)}=\frac{-(\Phi_1-A)^2G'(\Phi_1)}{-(\Phi_1-A)^2H'(\Phi_1)}=\frac{G^{(-1)}(\Phi_1:A)}{H^{(-1)}(\Phi_1:A)}$を満たす$\Phi_1(X<\Phi_1<\infty)$が存在する。

明らかに$\Phi_1\in I_{B1}$となる。

$$\frac{d}{dX}G(X)=\frac{d}{dX}F(X)+\left(\frac{F^{(-1)}(A)}{(X-A)^2}+\frac{F^{(-2)}(A)}{(X-A)^3}+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-2)!(X-A)^n}\right)$$

$$(X-A)^2\frac{d}{dX}G(X)=(X-A)^2\frac{d}{dX}F(X)+\left(F^{(-1)}(A)+\frac{F^{(-2)}(A)}{X-A}+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-2)!(X-A)^{n-2}}\right)$$

$$G^{(-1)}(X:A)=F^{(-1)}(X:A)-\left(F^{(-1)}(A)+\frac{F^{(-2)}(A)}{X-A}+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-2)!(X-A)^{n-2}}\right)$$

したがって、$\lim\limits_{X\to\infty}G^{(-1)}(X:A)=\lim\limits_{X\to\infty}F^{(-1)}(X:A)-F^{(-1)}(A)=F^{(-1)}(A)-F^{(-1)}(A)=0$

$$H^{(-1)}(X:A)=\frac{n}{(X-A)^{n-1}}$$

$\lim\limits_{X_1\to\infty}\dfrac{G^{(-1)}(\Phi_1:A)-G^{(-1)}(X_1:A)}{H^{(-1)}(\Phi_1:A)-H^{(-1)}(X_1:A)}=\dfrac{G^{(-1)}(\Phi_1:A)}{H^{(-1)}(\Phi_1:A)}=\dfrac{G^{(-1)'}(\Phi_2:A)}{H^{(-1)'}(\Phi_2:A)}=\dfrac{-(\Phi_2-A)^2G^{(-1)'}(\Phi_2:A)}{-(\Phi_2-A)^2H^{(-1)'}(\Phi_2:A)}=\dfrac{G^{(-2)}(\Phi_2:A)}{H^{(-2)}(\Phi_2:A)}$ を満たす $\Phi_2(\Phi_1<\Phi_2<\infty)$ が存在する。

次に、$G^{(-2)}(X:A)=F^{(-2)}(X:A)-\left(F^{(-2)}(A)+\dfrac{F^{(-3)}(A)}{X-A}+\cdots+\dfrac{F^{(1-n)}(A)}{(n-3)!(X-A)^{n-3}}\right)$、$H^{(-2)}(X:A)=\dfrac{n(n-1)}{(X-A)^{n-2}}$

$\lim\limits_{X_1\to\infty}\dfrac{G^{(-2)}(\Phi_2:A)-G^{(-2)}(X_1:A)}{H^{(-2)}(\Phi_2:A)-H^{(-2)}(X_1:A)}=\dfrac{G^{(-2)}(\Phi_2:A)}{H^{(-2)}(\Phi_2:A)}=\dfrac{G^{(-2)'}(\Phi_3:A)}{H^{(-2)'}(\Phi_3:A)}=\dfrac{-(\Phi_3-A)^2G^{(-2)'}(\Phi_3:A)}{-(\Phi_3-A)^2H^{(-2)'}(\Phi_3:A)}=\dfrac{G^{(-3)}(\Phi_3:A)}{H^{(-3)}(\Phi_3:A)}$ を満たす $\Phi_3(\Phi_2<\Phi_3<\infty)$ が存在する。

これを続けると、$\dfrac{G(X)}{H(X)}=\dfrac{G^{(-1)}(\Phi_1:A)}{H^{(-1)}(\Phi_1:A)}=\dfrac{G^{(-2)}(\Phi_2:A)}{H^{(-2)}(\Phi_2:A)}=\cdots=\dfrac{G^{(-n)}(\Phi_n:A)}{H^{(-n)}(\Phi_n:A)}$ を満たす $\Phi_n(X<\Phi_1<\Phi_2<\cdots<\Phi_n<\infty)$ が存在する。

$G^{(-n)}(X:A)=F^{(-n)}(X:A),H^{(-n)}(X:A)=n!$ なので、$G(X)=\dfrac{F^{(-n)}(\Phi_n:A)}{n!(X-A)^n}$

$\Phi_n=\Phi,X=B$ とすると、$F(B)=y_1+\dfrac{F^{(-1)}(A)}{B-A}+\dfrac{F^{(-2)}(A)}{2!(B-A)^2}+\cdots+\dfrac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(B-A)^{n-1}}+\dfrac{F^{(-n)}(\Phi:A)}{n!(B-A)^n}$ が成り立つ。