題名「有限次数の有理型関数の割算は、テイラー展開・ローラン展開の主要部と一致する」

鈴木啓一

循環小数の計算方法、たとえば３／１１を計算すると、

$$
\begin{array}{r|llllll}
 & 0. & 2 & 7 & 2 & \cdot & \cdot \\
\hline
1\;\;1 & 3 & 0 & & & & \\
 & 2 & 2 & & & & \\
\hline
 & & 8 & 0 & & & \\
 & & 7 & 7 & & & \\
\hline
 & & & 3 & 0 & & \\
 & & & 2 & 2 & & \\
\hline
 & & & & 8 & 0 &
\end{array}
$$

となり、3/11=0.27272727・・・になる。

これを代数方程式の計算に応用する。たとえば $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$ を計算すると、

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 0. & 0 & 1 & -4 & 13 & -40 & \cdot & \cdot \\
\hline
1\;\;4\;\;3 & 1. & 0 & 0 & & & & & \\
 & 1 & 4 & 3 & & & & & \\
\hline
 & & -4 & -3 & 0 & & & & \\
 & & -4 & -16 & -12 & & & & \\
\hline
 & & & 13 & 12 & 0 & & & \\
 & & & 13 & 52 & 39 & & & \\
\hline
 & & & & -40 & -39 & 0 & & \\
 & & & & -40 & -160 & -120 & & \\
\hline
 & & & & & 121 & 120 & &
\end{array}
$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{13}{x^4}-\frac{40}{x^5}+\cdots$$

となる。$|x|>3$ の場合のローラン展開の主要部と一致する。

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
\cdot & \cdot & -\frac{40}{81} & \frac{13}{27} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & & \\
\hline
 & & & & & & 1. & 1\;\;4\;\;3 \\
 & & & & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & \\
\hline
 & & & & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \\
 & & & -\frac{4}{9} & -\frac{16}{9} & -\frac{4}{3} & & \\
\hline
 & & & \frac{4}{9} & \frac{13}{9} & 0 & & \\
 & & \frac{13}{27} & \frac{52}{27} & \frac{13}{9} & & & \\
\hline
 & & -\frac{13}{27} & -\frac{40}{27} & 0 & & & \\
 & -\frac{40}{81} & -\frac{160}{81} & -\frac{40}{27} & & & & \\
\hline
 & \frac{40}{81} & \frac{121}{81} & 0 & & & &
\end{array}
$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x+\frac{13}{27}x^2-\frac{40}{82}x^3+\cdots$$

となる。$|x|<1$ の場合のテイラー展開と一致する。

（証明の概要）
テイラー展開で証明する

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x + b_0}=\frac{A(x)}{B(x)}$$

とおく、数学的機能法で証明する。$k \le i$ で代数方程式の割算と一致すると仮定する。

$$f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=c_0+c_1x+\cdots+c_i x^i+\frac{a_{i+1,n}x^{n+i}+\cdots+a_{i+1,1}x^{i+1}}{B(x)}$$

$$f^{(i+1)}(x)=\left(c_0+c_1x+\cdots+c_i x^i+\frac{a_{i+1,n}x^{n+i}+\cdots+a_{i+1,1}x^{i+1}}{B(x)}\right)^{(i+1)}$$

$$=\left(x^{i+1}\,\frac{a_{i+1,n}x^{n-1}+\cdots+a_{i+1,1}}{B(x)}\right)^{(i+1)}$$

$$=(i+1)!\frac{a_{i+1,n}x^{n-1}+\cdots+a_{i+1,1}}{B(x)}+{}_{i+1}C_1(i+1)!x\left(\frac{a_{i+1,n}x^{n-1}+\cdots+a_{i+1,1}}{B(x)}\right)^{(1)}\quad+\cdots+x^{i+1}\left(\frac{a_{i+1,n}x^{n-1}+\cdots+a_{i+1,1}}{B(x)}\right)^{(i+1)}$$

したがって、

$$\frac{f^{(i+1)}(0)}{(i+1)!}=\frac{a_{i+1,1}}{b_0}$$

この式により、$k=i+1$のときも代数方程式の割算と一致する。

この計算方法は、数学上の理論的な価値はない。ただ、テイラー展開・ローラン展開のイメージが理解できる教育的価値はあると思う。