題名「ローラン展開のベキ指数の周期性について」

鈴木啓一

たとえば $f(z)=\dfrac{1}{x^3}+1+x^3+x^6+x^9+\cdot\cdot$ のように、ベキ指数が３トビになる場合がある。一般的にベキ指数が n トビの場合の関数の性質です。

（n トビになる必要十分条件）

Ⅰ　$w=f(z)$ を複素平面上の関数とし、領域 $D: 0 \leqq R_1 < |z-\alpha| < R_2 \leqq \infty$、で正則とする。$w=f(z)$ がローラン展開可能で、$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu (z-\alpha)^\nu$、とする。ここで、$z=\alpha+re^{i\theta}(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とし、極形式で $f(z)=g(r,\theta)$ と表現する。

n を自然数として、$g(r,\theta)$ が恒等的に $g(r,\theta)=g(r,\theta+2\pi/n) \Leftrightarrow f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{n\nu}(z-\alpha)^{n\nu}$

（証明の概要）

$f(z)=g(r,\theta)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu\theta}$　　$g(r,\theta)=g(r,\theta+2\pi/n)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu(\theta+2\pi/n)}$ と変換することにより、必要十分条件が証明できる。

（n トビになるになる点の個数について）

Ⅱ　$w=f(z)$ を複素平面上で定義された整関数とする。

任意の点 α で、$f(z)$ を $z=\alpha+re^{i\theta}$ により極形式に変換し、$f(z)=g_\alpha(r,\theta)$ とする。

n を２以上の自然数とし、$g_\alpha(r,\theta)$ が恒等的に $g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+2\pi/n)$ となるような α の個数は、複素平面上で

①　１個も存在しない
②　１個だけ存在する
③　一直線上に等間隔に無限個（可符番個）存在し、各点では、$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+\pi)$ が成立する

のいずれかである。

（証明の概要）
a,b を実数の定数とし、$w=az+b$ とすると、①を満たす。

n を２以上の自然数とし、$w=z^n$ とすると、②を満たす。

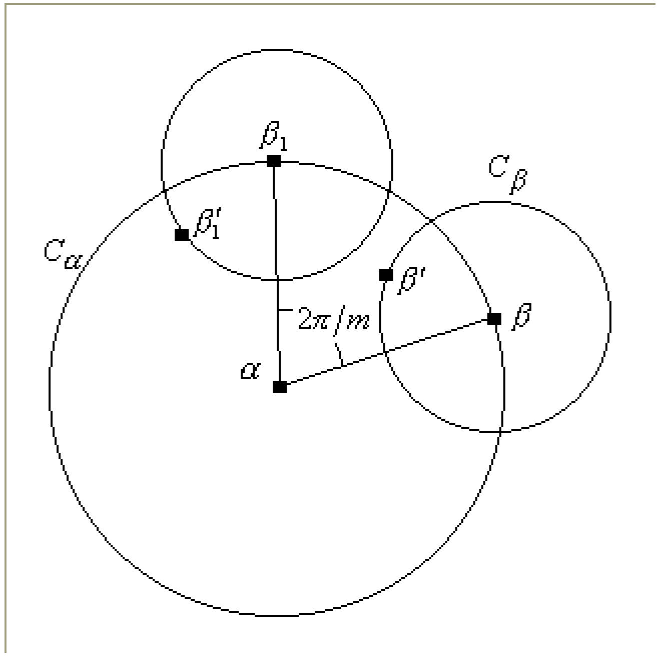
$w=\cos z$ の場合は、③を満たす。
①、②、③を満たす関数は存在する。この条件以外では、矛盾が出ることを証明する。

周期性のある点が２個存在し、$m>2$、$n>2$として、

$z=\alpha$で$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+2\pi/m)$

$z=\beta$で$g_\beta(r,\theta)=g_\beta(r,\theta+2\pi/n)$

とする。



β_1でも周期性は保存される。これを続けると、格子状に周期性を持つ点が無限（可符番）個存在することになる。

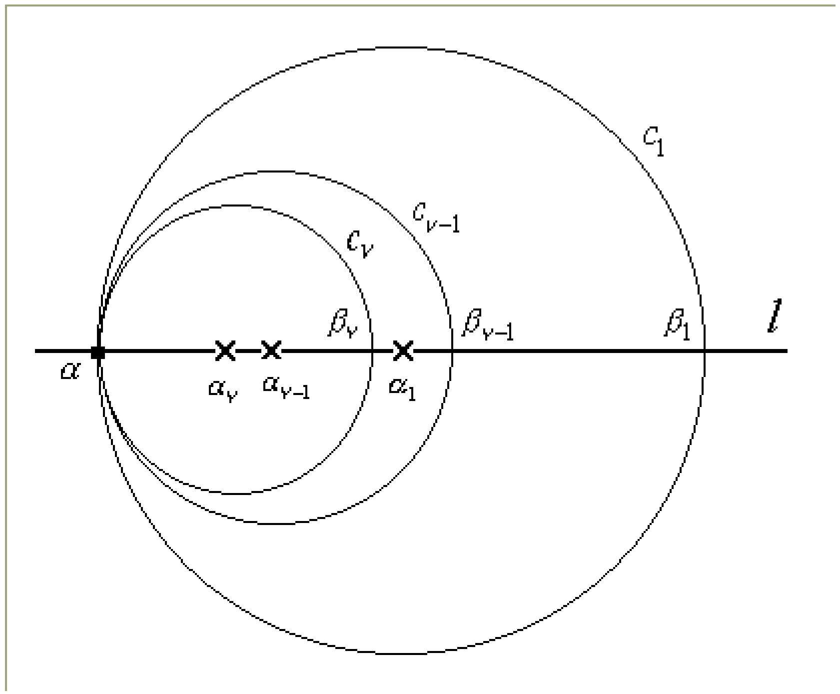
全平面に無限（可符番）個存在し、$w=f(z)$が$|z|=\infty$においても有限な値になる。

Liouville の定理より、$w=f(z)$は定数にならなければならない。

したがって、全平面に無限（可符番）個の点で周期性を持つことには矛盾がある。

$m=n=2$とし、かつ一直線上lに連続の濃度で周期的な点が存在する、と仮定する。

直線lで、点αに収束するような、点列$\{\alpha_\nu\}$が存在する。



各点α_νで$g_{\alpha\nu}(r,\theta)=g_{\alpha\nu}(r,\theta+\pi)$が成り立つとする。

α_νを中心とする円で、円周上にαがあるような円をc_νとする。

直線lとc_νとのもう一方の交点をβ_νとする。

α_νにおける周期性により、$f(\alpha)=f(\beta_\nu)$

点列$\{\beta_\nu\}$は点αに収束し、かつ任意のνに対し、$f(\alpha)=f(\beta_\nu)$となるから、

一致の定理より、$f(z)$は点αの近傍で恒等的に常数$f(\alpha)$になる。

これは矛盾する。