# ローラン展開の主要部を実数で計算する

テイラー展開について

$|x-a|<m$ で $f^{(n)}(x)$ が存在するならば、

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\phi)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(a)=a_0$$

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=a_k(k=1,2,3,\cdots)$$

$$f^{(k)}(a)=\left.\frac{d^kf}{dx^k}\right|_{x=a}(k=1,2,3,\cdots)$$

$$|\phi-a|<m$$

複素数に拡張すると、

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz(k=1,2,3,\cdots)$$

$$\frac{1}{k!}\left.\frac{d^kf}{dx^k}\right|_{x=a}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$$

$f^{(k)}(x)$ を実数 $x$ で微分し、$x=a$ とおくと、

$$\frac{d}{da}a_k=\frac{d}{da}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$=\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}$$

$$= (k+1)a_{k+1}$$

$f(x)$ を複素関数 $f(z)$ に拡張する。

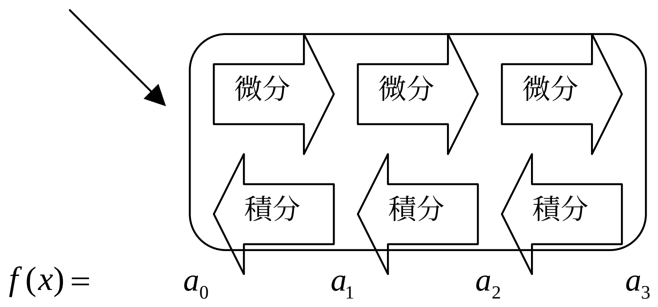
$|x-a| < m$ で $f^{(k)}(x)(1 \le k \le n)$ が存在するから、 $f^{(k)}(z)$ は $|z-a| < m$ で正則となる。

複素数で微分すると、

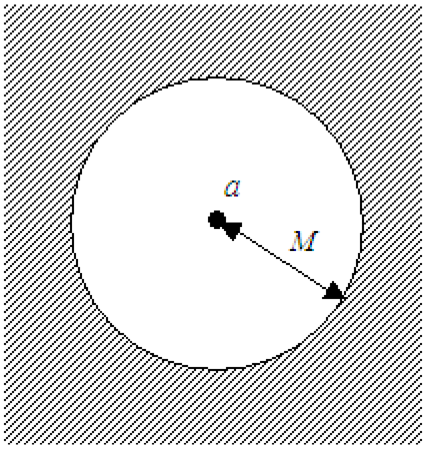
$$\frac{d}{da}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = (k+1)\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+2}}dz$$

このように、実数で微分した場合と複素数で微分した場合が一致する。

実数・複素数で考えると矢印の部分が微積分の関係にある。



次に$F(Z)$が$|Z-a|>M\,(M=1/m)$でローラン展開可能とし、主要部のみが存在するとする。




$$F(Z)=a_0+\frac{a_{-1}}{1!(Z-a)}+\frac{a_{-2}}{2!(Z-a)^2}+\cdots$$

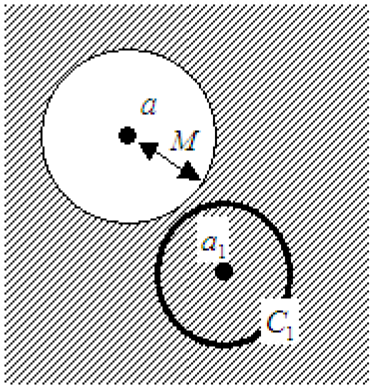
とする。

$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(Z-a)^{k-1}F(Z)dZ$ を$a$の関数と見た場合、

$|Z-a|\le M$

で正則とならないため、$a$の近傍で微分することはできない。

ただ、$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(Z-a)^{k-1}F(Z)dZ$ の$a$を$|Z-a|>M$で考える。




$a$で微分することは、$|Z-a|>M$では正則となるため、微分可能だが、右図でいうと$a_1$の近傍で微分したものであって、点$a$で微分したもとはならない。

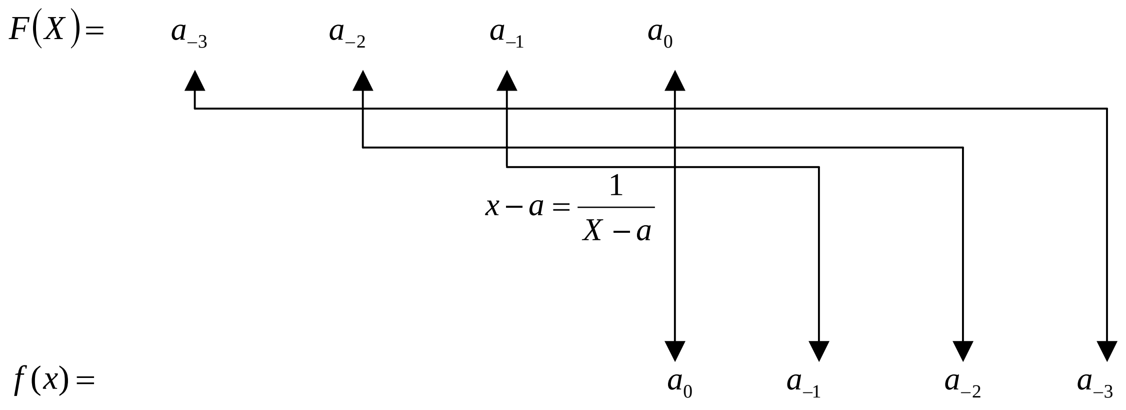
$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(Z-a)^{k-1}F(Z)dZ$ は$C$の外部の積分だから、無限遠点を中心にした積分と考えることができる。

変数を$x-a=\frac{1}{X-a},\ z-a=\frac{1}{Z-a}$で変換する。

$F(Z)=F\left(\frac{1}{z-a}+a\right)=f(z)$とおくと、$f(z)$は$|z-a|<\frac{1}{M}$で正則となり、$f(z)$をローラン展開すると、正則部のみが存在する。

$k=0,1,2,3,\cdots$として、

複素積分$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(Z-a)^{k-1}F(Z)dZ$と$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$との関係を見ると、



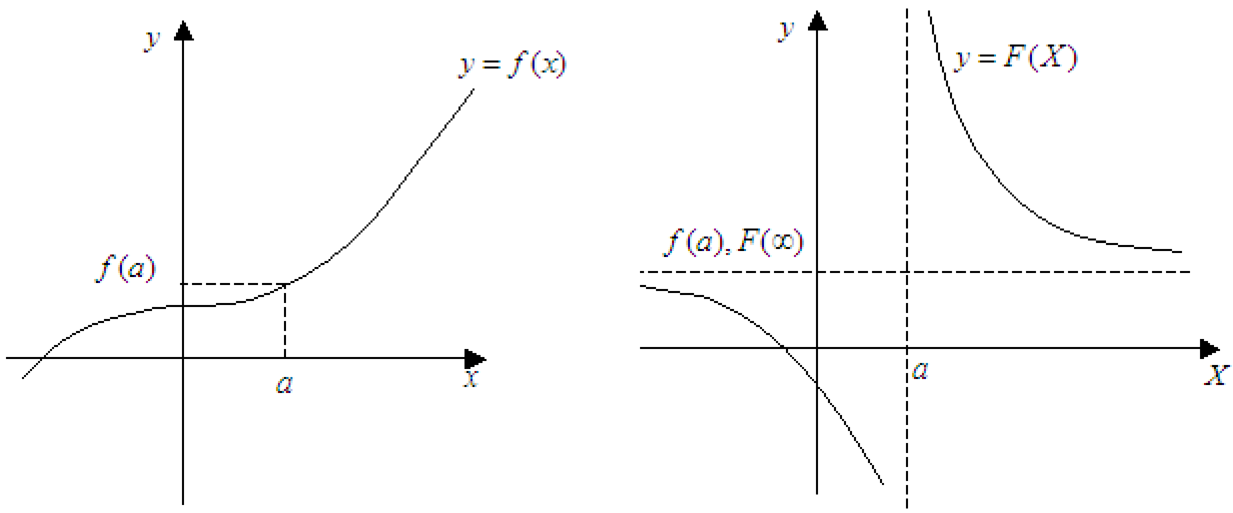

の関係がある。

$f(z)$の変数を実数のみで考えると、

$f(x)$ は$|x-a|<\dfrac{1}{M}$でテーラー展開可能となる。

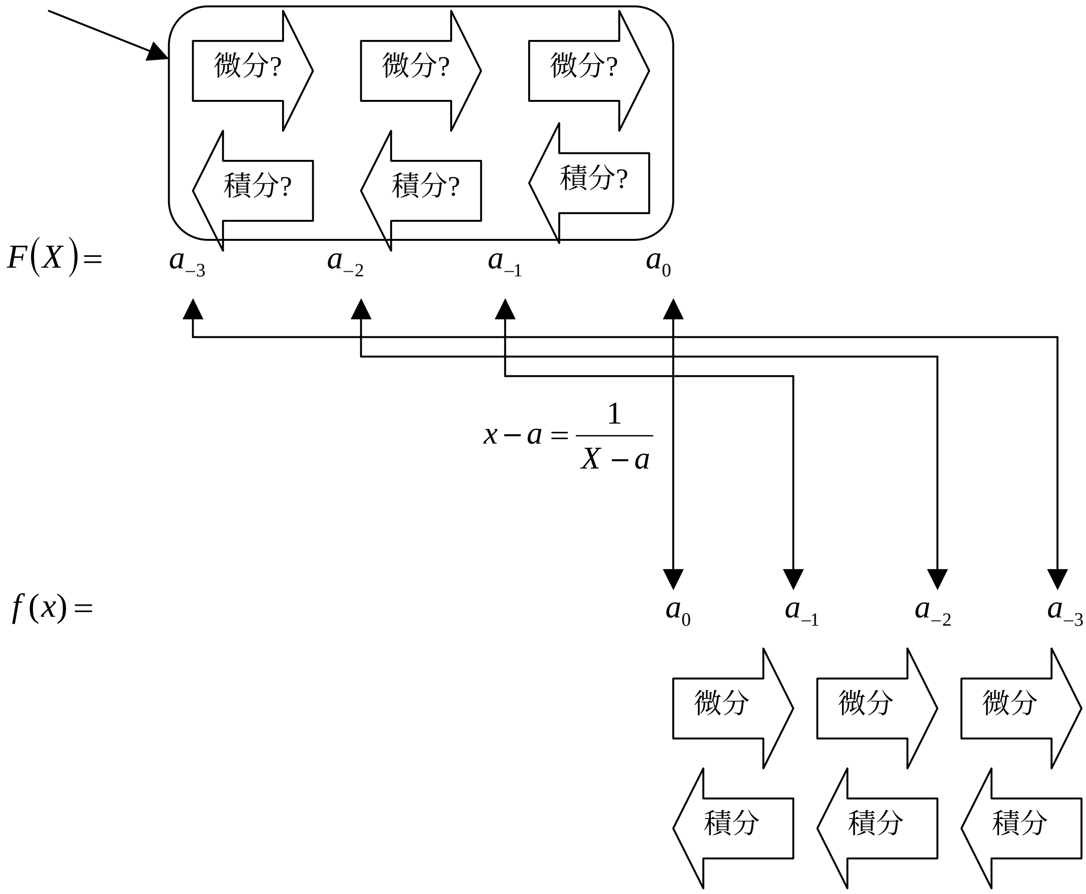
$f(x)$ を $x=a$ で右極限・左極限が一致しかつ微分可能とする。

図にすると下図のようになる。



それでは、

この部分を実数で扱うと、どのようなことが起こるだろうか。




$$x - a = \frac{1}{X - a}$$

より、$f^{(k)}(a)$ は $x \to a$ による極限値として定義されるので、$F(X)$ の各係数 $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots$ は $X \to \pm\infty$ という極限値で定義されなければならない。

なお、 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能だから、 $X \to +\infty$ の場合のみで考察する。

まず、$a_0$ の性質を考察する。

$$a_0 = f(a), x - a = \frac{1}{X - a}$$

より、

$$a_0 = \lim_{X\to\infty} F(X)$$

となる。

$a_{-1}$ は、$x-a=\dfrac{1}{X-a}$ で $F(X)$ を変換した関数 $f(x)$ を $x$ で微分し $f^{(1)}(x)$ を求め、$f^{(1)}(x)$ を

$x-a=\dfrac{1}{X-a}$ で変換した関数で $X\to\infty$ とした値である。

したがって、

$x_1-a=\dfrac{1}{X_1-a}$ とおいて、

$$f^{(1)}(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

$$=\lim_{\substack{X_1\to X\\ x_1\to x}}\left(\frac{F(X_1)-F(X)}{X_1-X}\times\frac{X_1-X}{x_1-x}\right)$$

$$=-(X-a)^2F^{(1)}(X)$$

ここで、

$$F^{(-1)}(X)=-(X-a)^2F^{(1)}(X)$$

とおく。

この式で $X\to\infty$ とすれば $a_{-1}$ となる。

$$a_{-1}=-\lim_{X\to\infty}(X-a)^2F^{(1)}(X)$$

平均値の定理から考察する。

$f(x)$ は $x=a$ でテーラー展開可能だから、

$$x<\phi<x_1$$

$$f^{(1)}(\phi)=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

となる$\phi$が存在する。

かつ、

$$a_{-1}=\lim_{x\to a}\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

となる。

次に変数変換する。

$x-a=\dfrac{1}{X-a}$とおいて、

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{F(X_1)-F(X)}{\dfrac{1}{X_1-a}+a-\dfrac{1}{X-a}-a}$$

$$=-\frac{F(X_1)-F(X)}{X_1-X}(X_1-a)(X-a)$$

したがって、

$F(X), f(x)$の平均値の定理は一致しない。

$$F^{(-1)}(X)=-\lim_{X_1\to X}\frac{F(X_1)-F(X)}{X_1-X}(X_1-a)(X-a)$$

と表現すると、

$$a_{-1}=\lim_{X\to\infty}F^{(-1)}(X)$$

となる。

$$f^{(2)}(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f^{(1)}(x_1)-f^{(1)}(x)}{x_1-x}$$

$$=\lim_{\substack{X_1\to X\\ x_1\to x}}\left(\frac{F^{(-1)}(X_1)-F^{(-1)}(X)}{X_1-X}\times\frac{X_1-X}{x_1-x}\right)$$

$$=-(X-a)^2\frac{dF^{(-1)}(X)}{dX}$$

ここで、

$$F^{(-2)}(X) = -(X-a)^2 \frac{dF^{(-1)}(X)}{dX}$$

とおく。

$$a_{-2} = \lim_{X \to \infty} F^{(-2)}(X)$$

となる。

一般の $k(k>1)$ に対し、

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f^{(k-1)}(x_1) - f^{(k-1)}(x)}{x_1 - x} \\ &= \lim_{\substack{X_1 \to X \\ x_1 \to x}} \left( \frac{F^{(-k+1)}(X_1) - F^{(-k+1)}(X)}{X_1 - X} \times \frac{X_1 - X}{x_1 - x} \right) \\ &= -(X-a)^2 \frac{dF^{(-k+1)}(X)}{dX} \end{aligned}$$

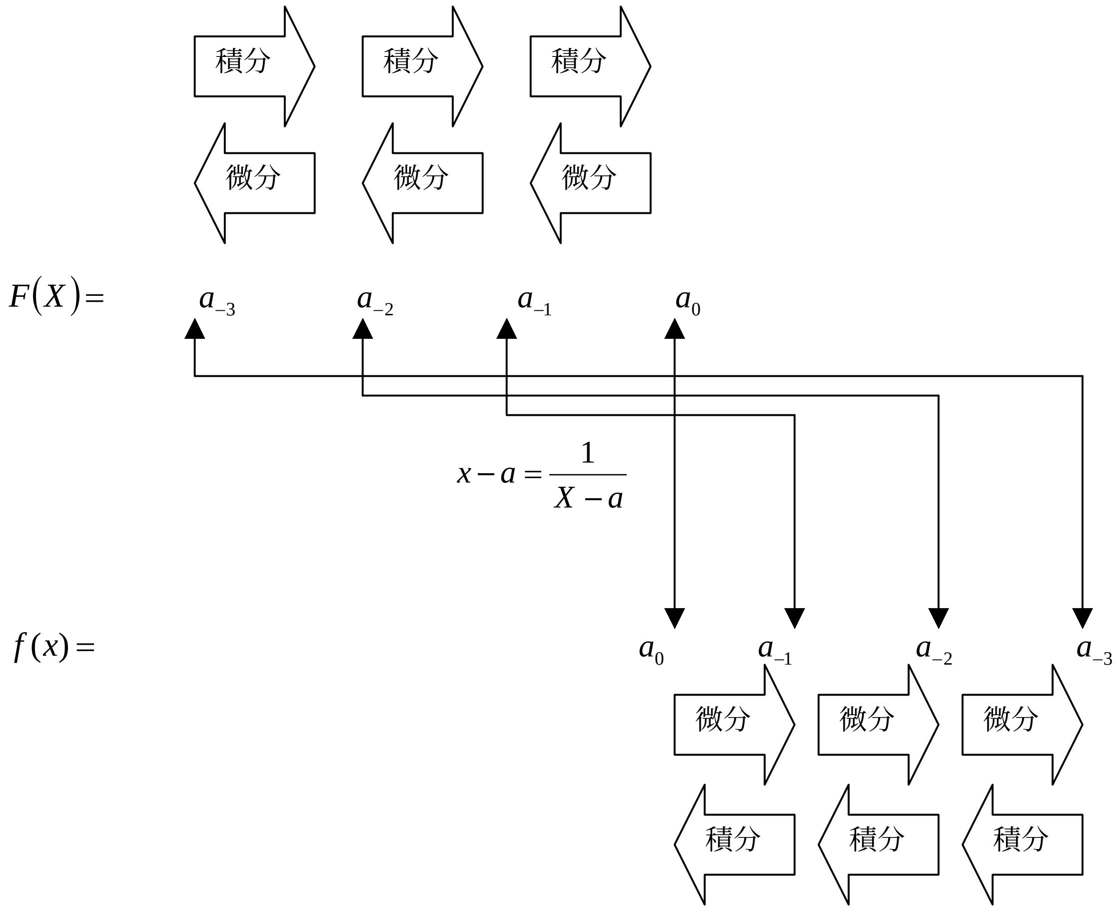
ここで、

$$F^{(-k)}(X) = -(X-a)^2 \frac{dF^{(-k+1)}(X)}{dX}$$

とおく。

$a_{-k} = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ となるから、$a_{-k} = \lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{F^{(-k)}(X)}{k!}$ となる。

微積分の関係を図にすると、下図のようになる。



主要部のみの場合のテイラー展開について考察する。

$$F_a^{(0)} = \lim_{X\to\infty} F(X)$$

$$F^{(-1)}(X) = -(X-a)^2 \frac{dF(X)}{dX}$$

$$F_a^{(-1)} = \lim_{X\to\infty} F^{(-1)}(X)$$

$$F^{(-k)}(X) = -(X-a)^2 \frac{dF^{(-k+1)}(X)}{dX}$$

$$F_a^{(-k)} = \lim_{X\to\infty} F^{(-k)}(X)$$

$$(1<k\le n)$$

とおく。

$|X-a|>M$ で $F_a^{(0)}, F_a^{(-1)}, \cdots, F_a^{(-n+1)}, F^{(-n)}(X)$ が存在するとする。

$|\Phi-a|>M$ として、

$$F(X) = F_a^{(0)} + \frac{F_a^{(-1)}}{1!(X-a)} + \frac{F_a^{(-2)}}{2!(X-a)^2} + \cdots + \frac{F_a^{(-n+1)}}{(n-1)!(X-a)^{n-1}} + \frac{F^{(-n)}(\Phi)}{n!(X-a)^n}$$

を満たす $\Phi$ が存在するはずである。

テイラー展開は、平均値の定理 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\phi)$ の応用である。

なぜなら、 $f(x) = f(a) + f'(\phi)(x-a)$ と変換し、拡張すればよいからである。

さて、 $F(X)$ の展開は、どのような定理の応用なのだろうか。

まず、 $n=1$ として、 $F(X) = F_a^{(0)} + \dfrac{F^{(-1)}(\Phi)}{X-a}$

について考える。これを変換し、

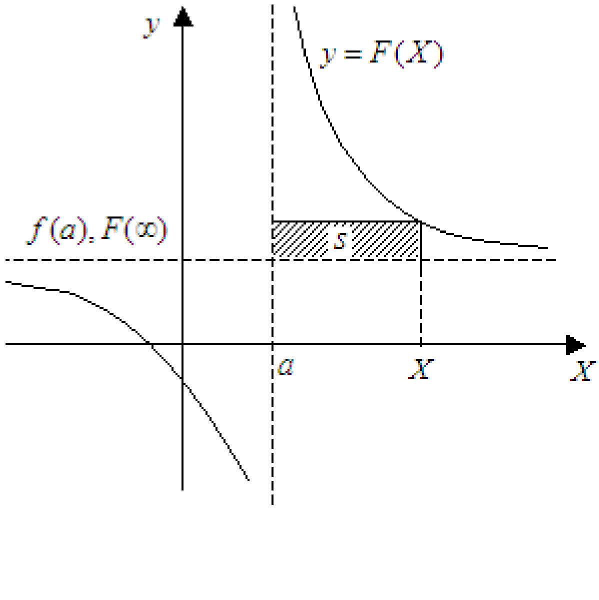
$\left(F(X) - F_a^{(0)}\right)(X-a) = F^{(-1)}(\Phi)$

を満たす $\Phi$ が存在する、という定理が

存在するかもしれない。

図で考えると、斜線部の面積 $S$ に対し、

$F(X)$ から作られた関数 $F^{(-1)}$ が存在し、



かつ等式$S=F^{(-1)}(\Phi)$を満たす$\Phi$が存在する

はずである。

ところで、積分の平均値の定理、

$F(X)$が区間$[a,X]$で連続ならば、$\int_a^X F(X)dX=(X-a)F(\Phi)(a<\Phi<X)$

を満たす$\Phi$が存在する、を応用しようとしても、

$$F(X)=F_a^{(0)}+\frac{F^{(-1)}(\Phi)}{X-a}$$

という式に変換はできない。

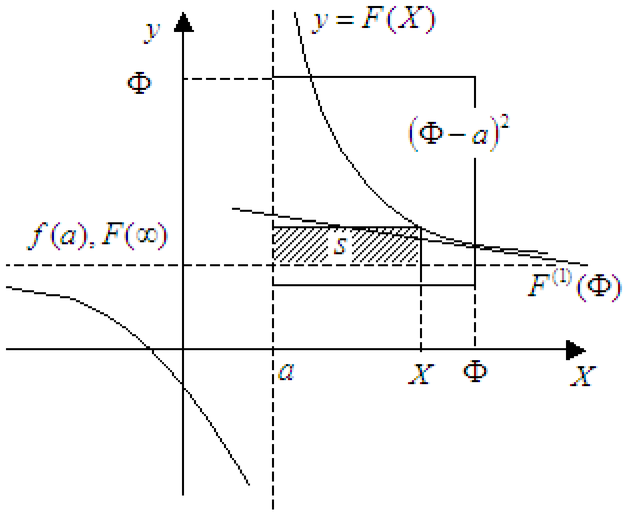
つまり、$F(X)=F_a^{(0)}+\dfrac{F^{(-1)}(\Phi)}{X-a}$という式は、積分の平均値の定理からは作れない。

$F^{(-1)}(\Phi)=-(\Phi-a)^2F^{(1)}(\Phi)$だから、

$$\left(F(X)-F_a^{(0)}\right)(X-a)=-(\Phi-a)^2F^{(1)}(\Phi)$$

この式が、中間値の定理になると思われる。

図にすると、$-(\Phi-a)^2F^{(1)}(\Phi)$が面積$S$と一致することになる。



簡単にするため$a=0$とする。

$$F^{(-1)}(X)=-X^2\frac{dF(X)}{dX}$$

$n>1$のとき、

$$F^{(-n)}(X)=-X^2\frac{dF^{(-n+1)}(X)}{dX}$$

通常の微分・導関数は微小区間の極限値となるが、$F^{(-1)}(X), F^{(-n)}(X)$の場合は$X\to\infty$で考えるため、無限遠点の導関数と呼ぶことにする。
無限遠点の導関数の性質を調べる。

$$F(X)=G(X)+H(X)$$

の場合

$$F^{(-1)}(X)=-X^2\frac{d\{G(X)+H(X)\}}{dX}$$

$$=-X^2\frac{dG(X)}{dX}-X^2\frac{dH(X)}{dX}$$

$$=G^{(-1)}(X)+H^{(-1)}(X)$$

同様に、

$$F^{(-n)}(X)=-X^2\frac{d\{G^{(-n+1)}(X)+H^{(-n+1)}(X)\}}{dX}$$

$$=-X^2\frac{dG^{(-n+1)}(X)}{dX}-X^2\frac{dH^{(-n+1)}(X)}{dX}$$

$$=G^{(-n)}(X)+H^{(-n)}(X)$$

$$F(X)=G(X)H(X)$$

の場合

$$F^{(-1)}(X)=-X^2\frac{d\{G(X)H(X)\}}{dX}$$

$$=-X^2\frac{dG(X)}{dX}H(X)-X^2\frac{dH(X)}{dX}G(X)$$

$$=G^{(-1)}(X)H(X)+G(X)H^{(-1)}(X)$$

同様に、

$$F^{(-n)}(X)=-X^2\frac{d\left\{G^{(-n+1)}(X)H^{(-n+1)}(X)\right\}}{dX}$$

$$=-X^2\frac{dG^{(-n+1)}(X)}{dX}H^{(-n+1)}(X)-X^2\frac{dH^{(-n+1)}(X)}{dX}G^{(-n+1)}(X)$$

$$=G^{(-n)}(X)H^{(-n+1)}(X)+G^{(-n+1)}(X)H^{(-n)}(X)$$

実際の関数で計算してみる。

| $F(X)$ | $F^{(-1)}(X)$ | $F^{(-n)}(X)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{X}$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{1}{X^2}$ | $\frac{2}{X}$ | $2(n=2)$<br>$0(n>2)$ |
| $\frac{1}{X^n}$ | $\frac{k}{X^{k-1}}$ | $k!(k=n)$<br>$0(k>n)$ |
| $\sin\frac{1}{X}$ | $\cos\frac{1}{X}$ | |
| $\cos\frac{1}{X}$ | $-\sin\frac{1}{X}$ | |
| $\tan\frac{1}{X}$ | $\sec^2\frac{1}{X}$ | |
| $e^{\frac{1}{X}}$ | $e^{\frac{1}{X}}$ | $e^{\frac{1}{X}}$ |
| | | |