代数方程式の加減乗除

私が大学２年当時（昭和５２年／１９７７年)、代数方程式のコンピュータによる数値解析について調べていて、テストデータのための代数方程式を作る作業中に思いついた計算方法です。大学４年に教生をしましたが、そのとき高校 1 年生にこの方法を教えたら、感激したようでした。
ためしに、下記の計算する。

$$(x-3)(2x+1)(x^2+3x+1)=?$$
$$(x^6+4x^5-x^4-5x^3+2x^2-3x-2)\big/(x^2+2x-2)=?$$

解

		1	−3
X		2	1
		1	−3
	2	−6	
	2	−5	−3

			2	−5	−3
X			1	3	1
			2	−5	−3
		6	−15	−9	
	2	−5	−3		
	2	1	−16	−14	−3

				1	2	−3	5	−14		
1	2	−2	)	1	4	−1	−5	2	−3	−2
				1	2	−2				
					2	1				
					2	4	−4			
						−3	−1			
						−3	−6	6		
							5	−4		
							5	10	−10	
								−14	7	
								−14	−28	28
									35	−30

したがって

$$(x-3)(2x+1)(x^2+3x+1)=2x^4+x^3-16x^2-14x-3$$
$$(x^6+4x^5-x^4-5x^3+2x^2-3x-2)\big/(x^2+2x-2)$$
$$=x^4+2x^3-3x^2+5x-14\text{ 余り }35x-30$$

繰り上がりのない、加減乗除と思えばよい。

２０１２年

循環小数の計算方法を応用する。たとえば３／１１を計算すると、

```
          0.  2   7   2   ▪   ▪
        ------------------------
 1   1 ) 3   0
         2   2
       ---------
             8   0
             7   7
           ---------
                 3   0
                 2   2
               ---------
                     8   0
```

となり、3/11=0.27272727・・・になる。

これを代数方程式の計算に応用する。たとえば$\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$を計算すると、

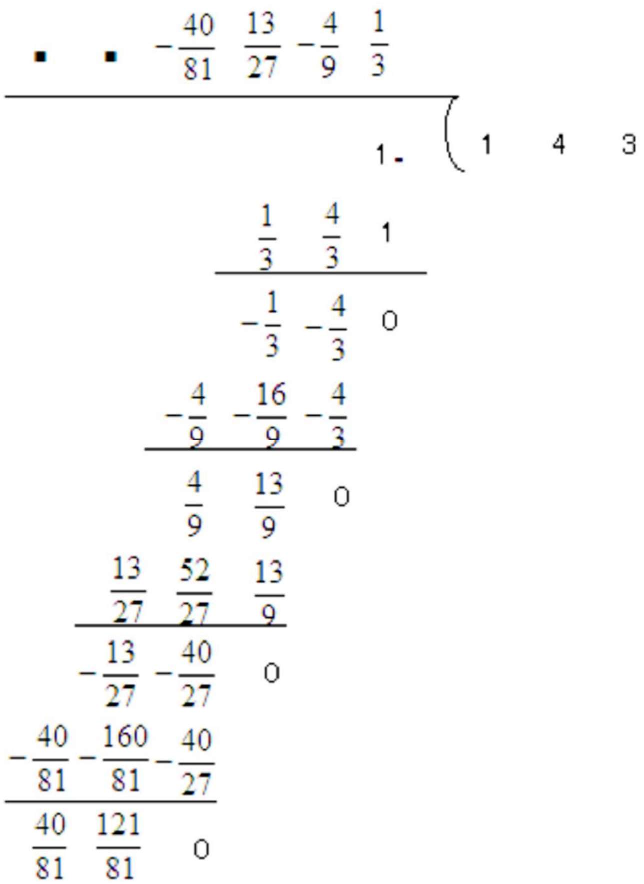
```
             0●   0    1   -4   13  -40   ▪   ▪
           ------------------------------------
 1   4   3 ) 1●   0    0
             1    4    3
           ----------------
                 -4   -3    0
                 -4  -16  -12
                ----------------
                      13   12    0
                      13   52   39
                     ----------------
                          -40  -39    0
                          -40 -160 -120
                          ----------------
                               121  120
```

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{13}{x^4}-\frac{40}{x^5}+\cdots$$

となる。大学で習う Laurent 展開の結果と一致する。

なお、上記計算での0●や1●の小数点は、xの次数がないx^0の項の意味である。ここではxの収束域を求めていないが、$|x|>3$で収束する。

割算の方法を変え、左側へ計算する。



$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x+\frac{13}{27}x^2-\frac{40}{82}x^3+\cdots$$

となる。高校で習う Tailor 展開の結果と一致する。

なお、ここでは x の収束域を求めていないが、$|x|<1$ で収束する。

２つの計算は、Tailor 展開での微分・Laurent 展開での複素積分を使わずに、加減乗除だけで級数展開したもののように見える。

一般化を試みる。
有限の有理型関数

$$f(x)=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdot\cdot+a_1x+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+b_1x+b_0}=\frac{A(x)}{B(x)}$$

の場合を考察する。なお、$b_n \neq 0$、$b_0 \neq 0$、分母・分子は既約とする。
今までの計算では$\alpha=0$とした展開であった。一般化となれば$x=\alpha$を中心にする展開にすべきであるが、この一般化は

$$f(x)=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdot\cdot+a_1x+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+b_1x+b_0}=\frac{a_m(x-\alpha)^m + a'_{m-1}(x-\alpha)^{m-1}+\cdot\cdot+a'_1(x-\alpha)+a'_0}{b_n(x-\alpha)^n + b'_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+\cdot\cdot+b'_1(x-\alpha)+b'_0}$$

と変換し、$\left(a_n, a'_{n-1}, \cdot\cdot, a'_0\right)\left(b_m, b'_{m-1}, \cdot\cdot, b'_0\right)$間の割算になるので、$\alpha=0$とするだけで十分である。

$m>n$の場合、

$$f(x)=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdot\cdot+a_1x+a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+b_1x+b_0}$$

$$=\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}+a''_{m-n-1}x^{m-n-1}+\cdot\cdot+a''_{n+1}x^{n+1}+\frac{a''_n x^n + a''_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+a''_1x+a''_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+b_1x+b_0}$$

と変換できるので、級数展開の可否と見た場合、

$$\frac{a''_n x^n + a''_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+a''_1x+a''_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdot\cdot+b_1x+b_0}$$

の級数展開を考察するだけで十分である。$m=n$の場合の証明で十分である。

$m<n$の場合、$a_n, a_{n-1}, \cdot\cdot, a_{m+1}=0$として方程式を作り直すことにより、$m=n$の場合の証明で十分である。

$$c_0=\frac{a_0}{b_0}$$

$$d_{1,i}=c_0b_i(1\le i\le n)$$

$$a_{1,i}=a_i-d_{1,i}(1\le i\le n)$$

$$\begin{array}{ccccc|cccc}
 & & & & c_0 & & & & \\
\hline
a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & b_n & \cdots & b_1 & b_0 \\
d_{1,n} & \cdots & d_{1,2} & d_{1,1} & a_0 & & & & \\
\hline
a_{1,n} & \cdots & a_{1,2} & a_{1,1} & 0 & & & &
\end{array}$$

とおく。この計算により、

$$A(x)=c_0B(x)+a_{1,n}x^n+\cdots+a_{1,1}x$$

となる。

$$c_1=\frac{a_{1,1}}{b_0}$$
$$=\frac{a_1-c_0b_1}{b_0}$$
$$=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{{b_0}^2}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & c_1 & c_0 & & & & \\ \cline{2-6}
 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \Big(& b_n \quad \cdots & b_1 & b_0 \\
 & d_{1,n} & \cdots & d_{1,2} & d_{1,1} & a_0 & & & & \\ \cline{2-6}
 & a_{1,n} & \cdots & a_{1,2} & a_{1,1} & 0 & & & & \\
d_{2,n} & d_{2,n-1} & \cdots & d_{2,1} & a_{1,1} & & & & & \\ \cline{1-5}
a_{2,n} & \cdots & a_{2,2} & a_{2,1} & 0 & & & & &
\end{array}$$

$$d_{2,i}=c_1b_i(1\le i\le n)$$

$$a_{2,i}=a_{1,i+1}-d_{2,i}(1\le i<n)$$

$$a_{2,n}=-d_{2,n}$$

とおく。この計算により、

$$A(x)=(c_0+c_1x)B(x)+a_{2,n}x^{n+1}+\cdots+a_{2,1}x^2$$

となる。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & c_2 & c_1 & c_0 & & & & \\ \cline{3-7}
 & & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \Big(& b_n \quad \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & d_{1,n} & \cdots & d_{1,2} & d_{1,1} & a_0 & & & & \\ \cline{3-7}
 & & a_{1,n} & \cdots & a_{1,2} & a_{1,1} & 0 & & & & \\
 & d_{2,n} & d_{2,n-1} & \cdots & d_{2,1} & a_{1,1} & & & & & \\ \cline{2-6}
 & a_{2,n} & \cdots & a_{2,2} & a_{2,1} & 0 & & & & & \\
d_{3,n} & d_{3,n-1} & \cdots & d_{3,1} & a_{2,1} & & & & & & \\ \cline{1-5}
a_{3,n} & \cdots & a_{3,2} & a_{3,1} & 0 & & & & & &
\end{array}$$

この計算を続けると、$k>1$として、

$$A(x)=(c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k)B(x)+a_{k+1,n}x^{n+k}+\cdots+a_{k+1,1}x^{k+1}$$

となる。
xを複素数まで拡張し、$B(x)\neq 0$ならば、

$$\frac{A(x)}{B(x)}=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k+\frac{a_{k+1,n}x^{n+k}+\cdots+a_{k+1,1}x^{k+1}}{B(x)} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

となる。

$B(x)=0$を満たすn個の解を$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$とし、

$$r = \min_{1 \le i \le n} |\beta_i|$$

とする。

$|x| < r$ ならば、$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ は微分可能となり、Tailor 展開可能で、

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = f(0) + f^{(1)}(0)x + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}x^k \quad ・・・・②$$

を満たす $\xi(|\xi| < r)$ が存在する。

①と②が一致することを数学的帰納法で証明してみる。

$$f(0) = \frac{A(0)}{B(0)} = \frac{a_0}{b_0} = c_0$$

$$f^{(1)}(0) = \frac{A^{(1)}(0)B(0) - A(0)B^{(1)}(0)}{B(0)^2} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{{b_0}^2} = c_1$$

したがって、$i = 0,1$ のとき①と②は一致する。

$k = i$ で①と②が一致すると仮定する。

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_i x^i + \frac{a_{i+1,n}x^{n+i} + \cdots + a_{i+1,1}x^{i+1}}{B(x)}$$

$$f^{(i+1)}(x) = \left(c_0 + c_1 x + \cdots + c_i x^i + \frac{a_{i+1,n}x^{n+i} + \cdots + a_{i+1,1}x^{i+1}}{B(x)} \right)^{(i+1)}$$

$$= \left(x^{i+1} \frac{a_{i+1,n}x^{n-1} + \cdots + a_{i+1,1}}{B(x)} \right)^{(i+1)}$$

$$= (i+1)!\frac{a_{i+1,n}x^{n-1} + \cdots + a_{i+1,1}}{B(x)} + {}_{i+1}C_1 (i+1)!\, x \left(\frac{a_{i+1,n}x^{n-1} + \cdots + a_{i+1,1}}{B(x)} \right)^{(1)}$$

$$+ \cdots + x^{i+1} \left(\frac{a_{i+1,n}x^{n-1} + \cdots + a_{i+1,1}}{B(x)} \right)^{(i+1)}$$

したがって、

$$\frac{f^{(i+1)}(0)}{(i+1)!} = \frac{a_{i+1,1}}{b_0}$$

となる。この式は、代数方程式の割算と一致する。つまり $k = i + 1$ のときも、①と②が一致する。

次に、右側に向かって下記のように計算する。

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
 & & & & c'_0 \bullet & c'_{-1} & c'_{-2} & \\
\cline{2-8}
b_n \cdots b_1 \; b_0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & & \\
 & a_n & d'_{1,n-1} & \cdots & d'_{1,0} \bullet & & & \\
\cline{2-6}
 & 0 & a'_{1,n-1} & a'_{1,n-2} & \cdots & 0 & & \\
 & & a'_{1,n-1} & d'_{2,n-2} & \cdots & d'_{2,-1} & & \\
\cline{3-7}
 & & 0 & a'_{2,n-2} & a'_{2,n-3} & \cdots & 0 & \\
 & & & a'_{2,n-2} & d'_{3,n-3} & \cdots & d'_{3,-2} & \\
\cline{4-8}
 & & & 0 & a'_{3,n-3} & a'_{3,n-4} & \cdots & 0
\end{array}
$$

$$A(x) = c'_0 B(x) + \frac{a'_{1,n-1}}{x^{1-n}} + \cdots + a'_{1,0}$$

$$A(x) = \left(c'_0 + \frac{c'_{-1}}{x} \right) B(x) + \frac{a'_{2,n-2}}{x^{2-n}} + \cdots + \frac{a'_{2,-1}}{x}$$

$k > 1$として、

$$A(x) = \left(c'_0 + \frac{c'_{-1}}{x} + \cdots + \frac{c'_{-k}}{x^k} \right) B(x) + \frac{a'_{k+1.n-k-1}}{x^{k+1-n}} + \cdots + \frac{a'_{k+1.-k}}{x^k}$$

となる。

$$R = \max_{1 \le i \le n} |\beta_i|$$

とする。

$|x| > R$ならば、$B(x) \neq 0$なので、

$$\frac{A(x)}{B(x)} = c'_0 + \frac{c'_{-1}}{x} + \cdots + \frac{c'_{-k}}{x^k} + \frac{\dfrac{a'_{k+1,n-k-1}}{x^{k+1-n}} + \cdots + \dfrac{a'_{k+1.-k}}{x^k}}{B(x)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot ③$$

となる。

$|x| > R$ならば、$\dfrac{A(x)}{B(x)}$は正則関数であり Laurent 展開可能で、かつ③は Laurent 展開と一致するはずである。

$x = \dfrac{1}{X}$とおく。

$\left|X\right| < \dfrac{1}{R}$ ならば、$A\left(\dfrac{1}{X}\right)\Big/B\left(\dfrac{1}{X}\right)$ は微分可能となり Tailor 展開可能で、$A\left(\dfrac{1}{X}\right)\Big/B\left(\dfrac{1}{X}\right)$ の Tailor 展開は、$A\left(\dfrac{1}{X}\right)\Big/B\left(\dfrac{1}{X}\right)$ 左側への割算と一致する。$x = \dfrac{1}{X}$ により元にもどすことにより、Laurent 展開と一致するはずである。

$$A'(X) = X^n A\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$B'(X) = X^n B\left(\frac{1}{X}\right)$$

とおく

$$\frac{A'(X)}{B'(X)} = \frac{a_n + \cdot\cdot + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n}{b_n + \cdot\cdot + b_1 X^{n-1} + b_0 X^n}$$

を左側に向かって割算する。

$$\begin{array}{ccccccl}
 & & & c'_{-2} & c'_{-1} & c'_0 & \\
\cline{3-6}
 & & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \Big(\; b_0 \; b_1 \cdot\cdot \; b_n \\
 & & d'_{1,0} & \cdots & d'_{1,n-1} & a_n & \\
\cline{3-6}
 & & a'_{1,0} & \cdots & a'_{1,n-1} & 0 & \\
 & d'_{2,-1} & \cdots & d'_{2,n-2} & a'_{1,n-1} & & \\
\cline{2-5}
 & a'_{2,-1} & \cdots & a'_{2,n-2} & 0 & & \\
d'_{3,-2} & \cdots & d'_{3,n-3} & a'_{2,n-2} & & & \\
\cline{1-4}
a'_{3,-2} & \cdots & a'_{3,n-3} & 0 & & &
\end{array}$$

$$A'(X) = c'_0 B'(X) + a'_{1,0} X^n + \cdots + a'_{1,n-1} X$$

$$A'(X) = (c'_0 + c'_{-1} X) B'(X) + a'_{2,-1} X^{n+1} + \cdots + a'_{2,n-2} X^2$$

$k > 1$ として、

$$A'(X) = \left(c'_0 + c'_{-1} X + \cdot\cdot + c'_{-k} X^k\right) B'(X) + a'_{k+1.-k} X^{n+k} + \cdots + a'_{k+1.n-k-1} X^{k+1}$$

$$X^n A\left(\frac{1}{X}\right) = \left(c'_0 + c'_{-1} X + \cdot\cdot + c'_{-k} X^k\right) X^n B\left(\frac{1}{X}\right) + a'_{k+1.-k} X^{n+k} + \cdots + a'_{k+1.n-k-1} X^{k+1}$$

$$A\left(\frac{1}{X}\right) = \left(c'_0 + c'_{-1} X + \cdot\cdot + c'_{-k} X^k\right) B\left(\frac{1}{X}\right) + a'_{k+1.-k} X^{k} + \cdots + a'_{k+1.n-k-1} X^{k+1-n}$$

$x = \dfrac{1}{X}$ により元にもどすと、

$$\frac{A(x)}{B(x)} = c'_0 + \frac{c'_{-1}}{x} + \cdot\cdot + \frac{c'_{-k}}{x^k} + \frac{\dfrac{a'_{k+1,-k}}{x^k} + \cdots + \dfrac{a'_{k+1,n-k-1}}{x^{k+1-n}}}{B(x)}$$

となり、Laurent 展開と一致する。