

B 関数 ($p, q > 0$ で、整数ではない) を級数展開すると、

$$B(p, q) = \frac{1}{2^{p+q-1}} \left(\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

$$a_0 = 1$$

$$b_0 = 1$$

$$a_n = \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} = \prod_{i=1}^n \frac{q-i}{p+i}$$

$$b_n = \frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)} = \prod_{i=1}^n \frac{p-i}{q+i}$$

($i = 1, 2, 3, \dots$)

(証明)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx &= \left[\frac{1}{p} x^p (1-x)^{q-1} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{q-1}{p} \int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^{q-2} dx \\ &= \frac{1}{2^{p+q-1}} \frac{1}{p} + \left[\frac{q-1}{p(p+1)} x^{p+1} (1-x)^{q-2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{(q-1)(q-2)}{p(p+1)} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p+1} (1-x)^{q-3} dx \\ &= \frac{1}{2^{p+q-1}} \frac{1}{p} + \frac{1}{2^{p+q-1}} \frac{q-1}{p(p+1)} + \frac{(q-1)(q-2)}{p(p+1)} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p+1} (1-x)^{q-3} dx \end{aligned}$$

これを続け、数列 $\{a_n\} (n = 0, 1, 2, \dots)$ を

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} = \prod_{i=1}^n \frac{q-i}{p+i}$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

とすることにより、

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{2^{p+q-1}} \frac{1}{p} \left\{ \sum_{i=0}^n a_i + (q-n-1) a_n \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p+n} (1-x)^{q-n-2} dx \right\}$$

とおける。

次に

$$\frac{q-n-1}{p} a_n \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p+n} (1-x)^{q-n-2} dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を示す。

$$\frac{x}{1-x} = t$$

とおく。

$$x = \frac{t}{1+t}$$

$$1-x = 1 - \frac{t}{1+t}$$

$$= \frac{1}{1+t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{1+t} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{1}{1+t} \right)$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\left| \frac{q-n-1}{p} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p+n} (1-x)^{q-n-2} dx \right| = \left| \frac{q-n-1}{p} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{n+1} dx \right|$$

$$= \left| \frac{q-n-1}{p} \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t} \right)^{p-1} \left(\frac{1}{1+t} \right)^{q-1} t^{n+1} \frac{1}{(1+t)^2} dt \right|$$

$$= \left| \frac{q-n-1}{p} \int_0^1 \frac{t^{p+n+1}}{(1+t)^{p+q}} dt \right|$$

$$< \left| \frac{q-n-1}{p} \int_0^1 t^{p+n+1} dt \right|$$

$$= \left| \frac{q-n-1}{p(p+n+2)} \right| \rightarrow \frac{1}{p} \quad (n \rightarrow \infty)$$

n が十分に大きいとする。

$q < I$ を満たす整数 I が存在する。ただし $1 < I$ とする。

$$q < I \text{ ならば、 } 0 < 1 - \frac{p+q}{p+i} < 1$$

$$|a_n| = \left| \prod_{i=1}^n \frac{q-i}{p+i} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \prod_{i=1}^{l-1} \frac{q-i}{p+i} \right| \prod_{i=1}^n \frac{i-q}{i+p} \\
&= \left| \prod_{i=1}^{l-1} \frac{q-i}{p+i} \right| \exp\left(\log \prod_{i=1}^n \frac{i-q}{i+p}\right) \\
&= \left| \prod_{i=1}^{l-1} \frac{q-i}{p+i} \right| \exp\left(\sum_{i=1}^n \log \frac{i-q}{i+p}\right) \\
&\sum_{i=1}^n \log \frac{i-q}{i+p} = \sum_{i=1}^n \log\left(1 - \frac{p+q}{i+p}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\left(\frac{p+q}{i+p}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p+q}{i+p}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{p+q}{i+p}\right)^3 - \dots \right\} \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

したがって、

$$|a_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

したがって、

$$\frac{q-n-1}{p} a_n \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p+n} (1-x)^{q-n-2} dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

同様な方法で、 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ から数列 $\{b_n\} (n=0,1,2,\dots)$ を作り、数列 $\{b_n\}$ が収束することを証明することができる。

(証明完)