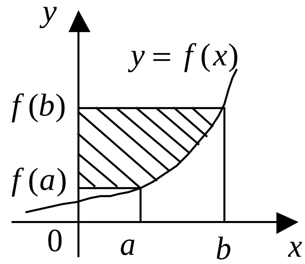
$y=f(x)$は区間$[a,b]$で連続かつ単調、また、同区間で$f'(x)$が存在し連続であるとする。

（１）$\int_a^b xf'(x)dx$は右図の斜線部の面積を示す。



（証明）

部分積分法により

$$\int_a^b xf'(x)dx=[xf(x)]_a^b-\int_a^b f(x)dx$$

$$=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx$$

これを幾何的に見ると斜線部の面積を示す。

（証明）

斜線部の面積をS、$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i],x_0=a,x_n=b$とする。

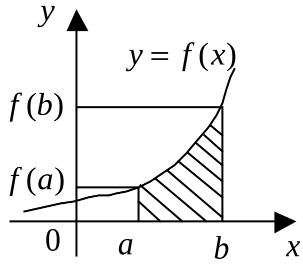
$$S=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\{f(x_i)-f(x_{i-1})\} \qquad (^\exists\eta_i\in[x_i,x_{i-1}])$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\eta_i f'(\eta_i')(x_i-x_{i-1}) \qquad (^\exists\eta_i'\in[x_i,x_{i-1}])$$

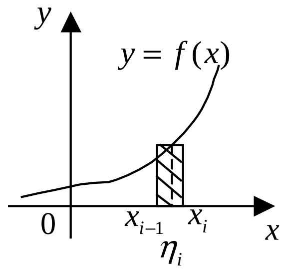
$$\to\int_a^b xf'(x)dx \quad (n\to\infty)$$

（２） $2\pi\int_a^b xf(x)dx$ は右図の斜線部 y 軸回転体の体積を示す。



（証明）

求める体積を V 、$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i],\ x_0=a, x_n=b$ とする。



$$V=\sum_{i=1}^{n}\left\{\pi x_i^2 f(\eta_i)-\pi x_{i-1}^2 f(\eta_i)\right\} \qquad \left({}^{\exists}\eta_i\in[x_i,x_{i-1}]\right)$$

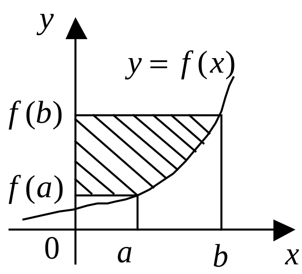
$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)f(\eta_i)$$

$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+x_{i-1}\right)f(\eta_i)\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

$$\to 2\pi\int_a^b xf(x)dx \quad (n\to\infty)$$

（３） $\pi\int_a^b x^2 f'(x)dx$ は右図の斜線部の y 軸回転体の

体積を示す。



（証明）
部分積分法により

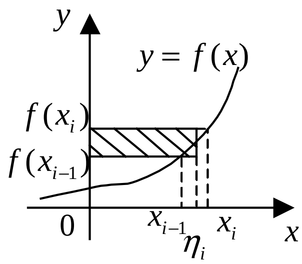
$$\pi\int_a^b x^2 f'(x)dx = \pi\left[x^2 f(x)\right]_a^b - 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

$$= \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

これを幾何的に見ると斜線部の y 軸回転体の体積を示す。

（証明）

求める体積を V 、$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i], x_0=a, x_n=b$ とする。



$$V=\sum_{i=1}^{n}\pi\eta_i^2\left\{f(x_i)-f(x_{i-1})\right\} \qquad \left({}^{\exists}\eta_i\in[x_i,x_{i-1}]\right)$$

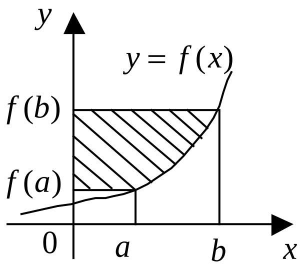
$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\,\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 f'(\eta_i')\left(x_i-x_{i-1}\right) \qquad \left({}^{\exists}\eta_i'\in[x_i,x_{i-1}]\right)$$

$$\to \pi\int_a^b x^2 f'(x)dx \quad (n\to\infty)$$

（４） $2\pi\int_a^b xf'(x)f(x)dx$ は右図の斜線部の x 軸回転体の

体積を示す。



（証明）

部分積分法により

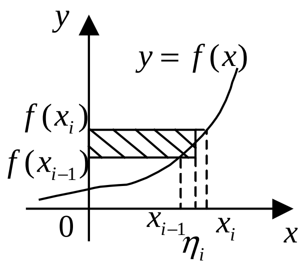
$$\pi\int_a^b f(x)^2 dx = \pi\left[xf(x)^2\right]_a^b - 2\pi\int_a^b xf'(x)f(x)dx$$

$$2\pi\int_a^b xf'(x)f(x)dx = \pi bf(b)^2 - \pi af(a)^2 - \pi\int_a^b f(x)^2 dx$$

これを幾何的に見ると斜線部の x 軸回転体の体積を示す。

（証明）

求める体積を V 、$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i], x_0=a, x_n=b$ とする。



$$V=\sum_{i=1}^{n}\left\{\pi\eta_i f(x_i)^2 - \pi\eta_i f(x_{i-1})^2\right\} \qquad \left({}^{\exists}\eta_i \in [x_i, x_{i-1}]\right)$$

$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\eta_i\{f(x_i)+f(x_{i-1})\}\{f(x_i)-f(x_{i-1})\}$$

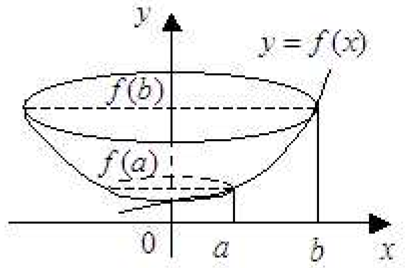
$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\eta_i\{f(x_i)+f(x_{i-1})\}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\pi\sum_{i=1}^{n}\eta_i\{f(x_i)+f(x_{i-1})\}f'(\eta_i')(x_i-x_{i-1}) \qquad \left({}^{\exists}\eta_i' \in [x_i, x_{i-1}]\right)$$

$$\to 2\pi\int_a^b xf'(x)f(x)dx \quad (n\to\infty)$$

（５） $2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx$ は区間 $[a,b]$

における $y=f(x)$ の y 軸回転体の表面積を示す。



（証明）

表面積を S 、

$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i], x_0=a, x_n=b$ とする。

$$S=\sum_{i=1}^{n}\pi(x_i+x_{i-1})\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\{f(x_i)-f(x_{i-1})\}^2} \qquad \left({}^{\exists}\eta_i\in[x_i,x_{i-1}]\right)$$

$$=\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i-1})\sqrt{1+\left\{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right\}^2}\times(x_i-x_{i-1})$$

$$=\pi\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i-1})\sqrt{1+f'(\eta_i')^2}\times(x_i-x_{i-1}) \qquad \left({}^{\exists}\eta_i'\in[x_i,x_{i-1}]\right)$$

$$\to 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx \quad (n\to\infty)$$