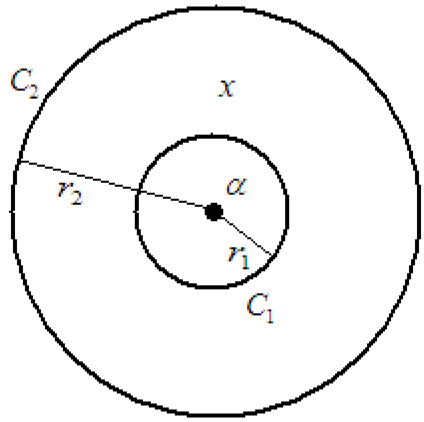
2、3　ローラン展開の正則部と主要部の関係

$w=f(z)$ を複素平面上の関数とし、領域 D :$0 \leqq R_1 < |z-\alpha| < R_2 \leqq \infty$、で正則とする。

$w=f(z)$ がローラン展開可能とする。

$R_1 < r_1 < |z-\alpha| < r_2 < R_2$

を満たす r_1, r_2 を半径とする円を C_1, C_2 とする。



$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C2} \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

$n=1,2,\cdots$ として

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C2} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C1} (z-\alpha)^{n-1} f(z)dz$$

とおける。

$$z-\alpha = \frac{1}{u-\alpha}$$

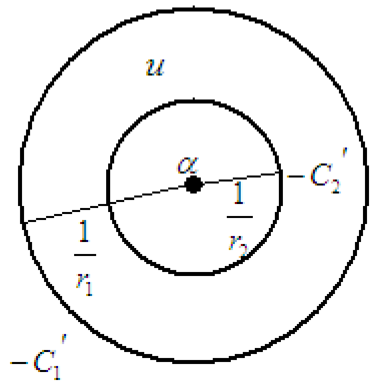
で変数変換し、

$$\begin{aligned} w &= f(z) \\ &= f\left(\alpha + \frac{1}{u-\alpha}\right) \\ &= g(u) \end{aligned}$$

$$C_1' = \left\{ u : u-\alpha = \frac{1}{z-\alpha}, z \in C_1 \right\}$$

$$C_2' = \left\{ u : u-\alpha = \frac{1}{z-\alpha}, z \in C_2 \right\}$$

とおく。



C_1' 、C_2' はそれぞれ時計回りのため、反時計回りの円を $-C_1'$ 、$-C_2'$ とする。

$w=g(u)$ は、領域 D' :$0 \leqq \frac{1}{R_2} < |u-\alpha| < \frac{1}{R_1} \leqq \infty$、で正則となり、

$$g(u)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(u-\alpha)^n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-n}(u-\alpha)^n$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_2'} \frac{g(u)}{u-\alpha}du = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1'} \frac{g(u)}{u-\alpha}du$$

$n=1,2,\cdots$として

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1{}'}\frac{g(u)}{(u-\alpha)^{n+1}}du$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2{}'}(u-\alpha)^{n-1}g(u)du$$

となる。

証明

$g(u)$ が領域 D' :$0 \leqq \frac{1}{R_2} < |u-\alpha| < \frac{1}{R_1} \leqq \infty$ で正則となることは明らか。

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}$$

を

$$z-\alpha = \frac{1}{u-\alpha}$$

で変数変換し、

$$g(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(u-\alpha)^n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-n} (u-\alpha)^n$$

となる。

$$C_1 = \left\{ z : z = \alpha + r_1 e^{i\theta} (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \right\}$$
$$C_2 = \left\{ z : z = \alpha + r_2 e^{i\theta} (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \right\}$$

とすると

$$-C_1{}' = \left\{ u : u = \alpha + \frac{1}{r_1} e^{-i\theta} (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \right\}$$

$$-C_2{}' = \left\{ u : u = \alpha + \frac{1}{r_2} e^{-i\theta} (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \right\}$$

となる。

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + r_2 e^{i\theta})}{r_2 e^{i\theta}} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + r_2 e^{i\theta})}{r_2 e^{i\theta}} i r_2 e^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + r_2 e^{i\theta}) d\theta
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-C_2{}'} \frac{g(u)}{u-\alpha} du$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{0}\frac{g\left(\alpha+\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}\right)}{\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}}\frac{du}{d\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(\alpha+r_2e^{i\theta})}{\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}}\frac{i}{r_2}e^{-i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\alpha+r_2e^{i\theta})d\theta$$

$$\therefore a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_2'}\frac{g(u)}{u-\alpha}du$$

$w=g(u)$が、領域D'：$0\leqq\frac{1}{R_2}<|u-\alpha|<\frac{1}{R_1}\leqq\infty$、で正則だから

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_1'}\frac{g(u)}{u-\alpha}du$$

$n=1,2,\cdots$とする

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(\alpha+r_2e^{i\theta})}{\left(r_2e^{i\theta}\right)^{n+1}}\frac{dz}{d\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(\alpha+r_2e^{i\theta})}{\left(r_2e^{i\theta}\right)^{n+1}}ir_2e^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(\alpha+r_2e^{i\theta})}{\left(r_2e^{i\theta}\right)^{n}}d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'}(u-\alpha)^{n-1}g(u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi}^{0}\left(\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}\right)^{n-1}g\left(\alpha+\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}\right)\frac{du}{d\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{r_2}e^{-i\theta}\right)^{n-1}f(\alpha+r_2e^{i\theta})\frac{i}{r_2}e^{-i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+r_2e^{i\theta})}{\left(r_2e^{i\theta}\right)^n}d\theta$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'}(u-\alpha)^{n-1}g(u)du$$

同様な計算方法で

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'}\frac{g(u)}{(u-\alpha)^{n+1}}du$$

証明完

このことは、$f(z)$の正則部の係数は変数変換した$g(u)$主要部の係数と、$f(z)$の主要部の係数は$g(u)$の正則部の係数と一致する。$f(z)$の主要部のa_{-n}とは、$g(u)$のn回微分係数である。

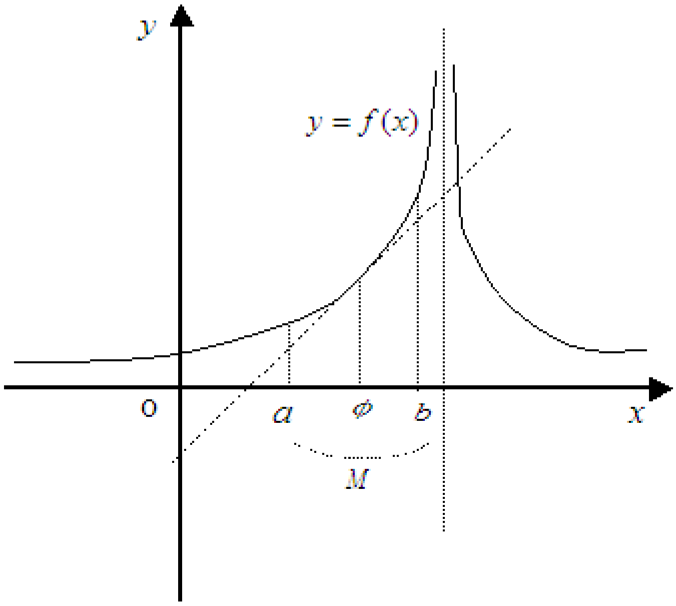
テイラーの公式の拡張

「平均値の定理」

$f(x)$ は $[a,b]$ において連続、(a,b) において微分可能ならば、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\phi), a<\phi<b$$

となる ϕ が存在する。



「テイラーの公式」

$f(x)$ は区間 $[a,b]$ において

n 階微分可能とする。

$a<x<b$ 、ならば、

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f^{(2)}(a)}{2!}+\cdots+(x-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(\phi)}{n!}$$

ただし、$a<\phi<b$

そして、x の収束半径を

$$|x-a|<M$$

とする。

「拡張」

まず a を定数として固定する。

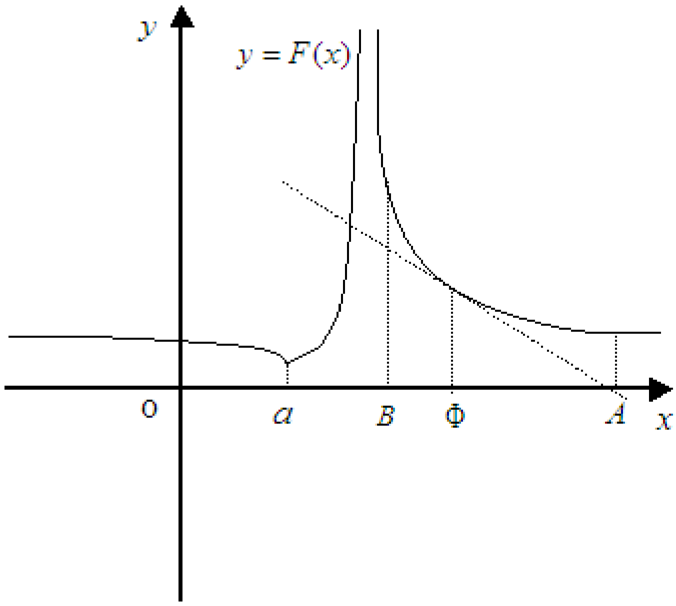
$$x = a + \frac{1}{X - a}$$

で変数変換する。

$$f(x) = f\left(a + \frac{1}{X - a}\right)$$
$$= F(X)$$

とおく。

これは、a を中心にした x の逆数を X とおき、そのときの関数 $f(x)$ を $F(X)$ に置き換えることである。



平均値の定理を拡張する。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\phi)$$

の式で

$$a = \lim_{A \to \infty}\left(a + \frac{1}{A - a}\right)$$

$$b = a + \frac{1}{B - a}$$

$$\phi = a + \frac{1}{\Phi - a}$$

とする

$$b - a = \frac{1}{B - a} - \lim_{A \to \infty}\frac{1}{A - a}$$
$$= \frac{1}{B - a}$$

平均値の定理は、

$$\frac{F(B) - f(a)}{\dfrac{1}{B - a}} = f'\left(a + \frac{1}{\Phi - a}\right)$$

$$F(B) = f(a) + \frac{f'\left(a + \dfrac{1}{\Phi - a}\right)}{B - a}$$

と変形できる。

ただし、$B<\Phi<\infty$

テイラーの公式に代入すると、

$$F(X)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!(X-a)}+\frac{f^{(2)}(a)}{2!(X-a)^2}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(X-a)^{n-1}}+\frac{f^{(n)}\left(a+\frac{1}{\Phi-a}\right)}{n!(X-a)^n}$$

となる。
ただし、$B<\Phi<\infty$
収束半径は

$$|X-a|>\frac{1}{M}$$

となる。

計算例

$$F(X)=\frac{X}{X+1}$$

$a=0$
$1<B<X$
とする。
変数変換すると、

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

これは、$0\leqq x<1$、で範囲でテイラー展開可能だから、

$$f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

となる。
したがって、$F(X)$の範囲$1<X$でのテイラー展開は、

$$F(X)=1-\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}-\frac{1}{X^3}+\cdots$$

となる。