第ｎ次積分関数

関数 $f(x)$ を区間 (x_1, x_2) で定義された関数とし、積分可能とする。
$f^{[0]}(x) = f(x)$
と定義する。

$x_0 (x_1 \le x_0 \le x_2)$ を定数とする。
変数 $x (x_1 \le x \le x_2)$ に対して、 $f^{[1]}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{[0]}(t)dt$ と定義する。

$f^{[1]}(x)$ も同区間で積分可能とし、 $f^{[2]}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{[1]}(t)dt$ と定義する。
同様に、 $f^{[n-1]}(x), (n > 0)$ も同区間で積分可能とし、 $f^{[n]}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{[n-1]}(t)dt$
と定義する。
$f^{[n]}(x)$ を第ｎ次積分関数と呼ぶことにする。

$f^{[i]}(x)$ の性質、
$1 \leqq i \leqq n$ ならば、 $\frac{d}{dx} f^{[i]}(x) = f^{[i-1]}(x)$ 、 $f^{[i]}(x_0) = 0$

a を $a < x_1$ 又は $x_2 < a$ を満たす定数とする。

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[0]}(t)}{t-a} dt = \left[\frac{f^{[1]}(t)}{t-a} \right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{[1]}(t)}{(t-a)^2} dt$$

$$= \frac{f^{[1]}(x)}{x-a} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{[1]}(t)}{(t-a)^2} dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[1]}(t)}{(t-a)^2} dt = \left[\frac{f^{[2]}(t)}{(t-a)^2} \right]_{x_0}^{x} + 2\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[2]}(t)}{(t-a)^3} dt$$

$$= \frac{f^{[2]}(x)}{(x-a)^2} + 2\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[2]}(t)}{(t-a)^3} dt$$

$0 < i \leqq n$ を満たす i に対して、

$$(i-1)!\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[i-1]}(t)}{(t-a)^i} dt = (i-1)!\left[\frac{f^{[i]}(t)}{(t-a)^i} \right]_{x_0}^{x} + i!\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[i]}(t)}{(t-a)^{i+1}} dt$$

$$= (i-1)!\frac{f^{[i]}(x)}{(x-a)^i} + i!\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[i]}(t)}{(t-a)^{i+1}} dt$$

$i = 1,2,3,\cdot\cdot, n$ の場合のすべての式を等式で結ぶと、

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[0]}(t)}{t-a}dt=\sum_{i=1}^{n}(i-1)!\frac{f^{[i]}(x)}{(x-a)^i}+n!\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[n]}(t)}{(t-a)^{n+1}}dt$$

$n\to\infty$ のとき $n!\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[n]}(t)}{(t-a)^{n+1}}dt\to 0$ ならば、

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[0]}(t)}{t-a}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!\frac{f^{[n]}(x)}{(x-a)^n}$$

とおける。

なお、変数が実数のため、$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[0]}(t)}{t-a}dt=\frac{f(x)}{x-a}$ になるだけで、複素数を使った積分の式のように、きれいにはならない。

追記

$\int_{x_0}^{x}f(t)e^t dt,\int_{x_0}^{x}f(t)\sin t dt$ などのような式から、変換も可能だと思う。

計算例

$x \geqq \dfrac{1}{2}, f(x)=1, a=0, x_0=1$ とおく

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[0]}(t)}{t-a}dt=\int_1^x\frac{1}{t}dt=\log x$$

$$f^{[1]}(x)=\int_1^x 1dt=x-1$$

$$f^{[2]}(x)=\int_1^x(t-1)dt=\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$f^{[n]}(x)=\frac{(x-1)^n}{n!}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)!\frac{f^{[i]}(x)}{(x-a)^i}=\sum_{i=1}^{i}\frac{(x-1)^i}{ix^i}$$

$$n!\int_{x_0}^{x}\frac{f^{[n]}(t)}{(t-a)^{n+1}}dt=n!\int_1^x\frac{1}{t^{n+1}}\frac{(t-1)^n}{n!}dt$$

$$=\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}dt$$

$$=\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}dt$$

$$\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}dt=\int_1^x\left(1-\frac{1}{t}\right)^n\frac{1}{t}dt$$

$1 \leqq x$ の場合、$n>N$ に対して、十分小さな $\varepsilon>0$ が存在し、$\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^n<\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^n<\varepsilon$

$$\therefore \int_1^x\frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}dt<\int_1^x\frac{\varepsilon}{t}dx=\varepsilon\log x$$

$\therefore n\to\infty$ ならば $\displaystyle\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}dt\to 0$

$$\therefore \log x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{nx^n}$$

$\dfrac{1}{2}<x<1$ の場合、$\dfrac{1-t}{t}<\dfrac{1-x}{x}<1$ だから、同様な証明で、

$n\to\infty$ ならば $\displaystyle\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}dt\to 0$

$$\therefore \log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{nx^n}$$

$x = \dfrac{1}{2}$ の場合

$\log 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ が成り立つから、

$x = \dfrac{1}{2}$ の場合も、$\log x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{nx^n}$ が成り立つ。

ところで、周知の事実として、

$|x| < 1$ ならば、$\log \dfrac{1}{1-x} = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + \cdots$

というものがある。

$\dfrac{1}{1-x} = t$ とおくと、$x = \dfrac{t-1}{t}$ となるため、等式の一致をみる。