２、１　ローラン展開の性質

定理

$w = f(z)$ を複素平面上の関数とし、領域 D ：$0 \leqq R_1 < |z-\alpha| < R_2 \leqq \infty$、で正則とする。

$w = f(z)$ がローラン展開可能で、 $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu (z-\alpha)^\nu$ 、とする。

ここで、 $z = \alpha + re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とし、極形式で $f(z) = g(r,\theta)$ と表現する。

n を自然数として、

$g(r,\theta)$ が恒等的に $g(r,\theta) = g(r,\theta + 2\pi/n) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{n\nu} (z-\alpha)^{n\nu}$

証明

$(\Leftarrow)$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{n\nu} (z-\alpha)^{n\nu} \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{n\nu} r^{n\nu} e^{in\nu\theta}
\end{aligned}
$$

ところで、 $^\forall \nu$ に対し

$$
\begin{aligned}
e^{in\nu(\theta + 2\pi/n)} &= \cos(n\nu\theta + 2\pi\nu) + i\sin(n\nu\theta + 2\pi\nu) \\
&= \cos(n\nu\theta) + i\sin(n\nu\theta) \\
&= e^{in\nu\theta}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad g(r,\theta) = g(r,\theta + 2\pi/n)$

$(\Rightarrow)$

$f(z) = g(r,\theta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu\theta}$ 、　とおく。

$g(r,\theta + 2\pi/n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{i\nu(\theta + 2\pi/n)}$ 、となり、

$g(r,\theta) = g(r,\theta + 2\pi/n)$ 、より、

$^\forall \nu$ に対し、

$c_\nu r^\nu e^{i\nu\theta} = c_\nu r^\nu e^{i\nu(\theta + 2\pi/n)}$ 、が成立つ。

$r \neq 0$ 、だから、 $c_\nu e^{i\nu\theta} = c_\nu e^{i\nu(\theta + 2\pi/n)}$ 、が成立つ。

$c_\nu \neq 0$ 、と仮定すると、

$$e^{i\nu\theta} = e^{i\nu(\theta+2\pi/n)}$$

$$= e^{i\nu\theta} \cdot e^{2\pi i\nu/n}$$

$$\therefore \quad e^{2\pi i\nu/n} = 1$$

ν が n の倍数でなければ、等式は矛盾するため、$c_\nu = 0$ 、となる

あらためて、ν を整数とし、

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{n\nu}(z-\alpha)^{n\nu}$$

となる。

（証明完）

次の結果は明白なことだが、一応掲載だけしておく。

① $w = f(z)$ を複素平面上の関数とし、領域 D ：$0 \leqq R_1 < |z-\alpha| < R_2 \leqq \infty$、でローラン展開可能になるための必要条件は、$g(r,\theta)$ が恒等的に

$$g(r,\theta) = g(r,\theta+2\pi)$$

となること。

② $w = f(z)$ を複素平面上の関数とし、点 α の近傍でローラン展開可能とする。

$g(r,\theta)$ が恒等的に

$$g(r,\theta) = g(r,\theta+2\pi/n) \qquad \text{（}n\text{ は2以上の自然数）}$$

ならば、

ν（$\nu > 0$）が n の倍数でないとすると、ν 次導関数 $f^{(\nu)}(\alpha) = 0$

②より、$f^{(n)}(\alpha)$ というものが、「関数をｎ回微分して α を代入すればわかる」が「α を中心とする極形式の関数の周期性で判明する場合がある」、となった。

２、２　関数の周期性について

$w = f(z)$ を複素平面上で定義された整関数とする。

任意の点 α で、$f(z)$ を $z = \alpha + re^{i\theta}$ により極形式に変換し、$f(z) = g_\alpha(r, \theta)$

とする。

n を２以上の自然数とし、$g_\alpha(r,\theta)$ が恒等的に $g_\alpha(r,\theta) = g_\alpha(r, \theta + 2\pi/n)$ となるような α の個数は、複素平面上で

①　存在しない

②　１個だけ存在する

③　一直線上に等間隔に無限個（可符番個）存在し、各点では、$g_\alpha(r,\theta) = g_\alpha(r, \theta + \pi)$

　　が成立する、

のいずれかである。

（証明）

①の場合

a,b を実数の定数とし、$w = az + b$ とすると、①を満たすことは明らか。

②の場合

ｎを２以上の自然数とし、$w = z^n$ とすると、②を満たすことは明らか。

③の場合

$w = \cos z$、$\alpha = n\pi$ $(n = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ において、考察する。

$$\cos(n\pi + z) = \frac{1}{2}\left(e^{i(n\pi+z)} + e^{-i(n\pi+z)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{in\pi}e^{iz} + e^{-in\pi}e^{-iz}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z & \text{（ｎが偶数）} \\ \frac{1}{2}\left(-e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\cos z & \text{（ｎが奇数）} \end{cases}$$

このことにより、$w = \cos z$ の周期性を、$0 \leqq \Re(z) < \pi$ の領域で判定する。

$\alpha = 0$、の場合、

$$g_0(r, \theta + \pi) = \frac{1}{2}\left(e^{ir(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))} + e^{-ir(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-ir(\cos\theta+i\sin\theta)}+e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$$
$$=g_0(r,\theta)$$
したがって、$\alpha=0$で周期性を持つ。

nが偶数の場合、

$$g_{n\pi}(r,\theta+\pi)=\frac{1}{2}\left(e^{i(n\pi+r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)))}+e^{-i^{i(n\pi+r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)))}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(n\pi-r(\cos\theta+i\sin\theta))}+e^{-i(n\pi-r(\cos\theta+i\sin\theta))}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-ir(\cos\theta+i\sin\theta)}+e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-in\pi-ir(\cos\theta+i\sin\theta)}+e^{in\pi+ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$$
$$=g_{n\pi}(r,\theta)$$

nが奇数の場合、

$$g_{n\pi}(r,\theta+\pi)=\frac{1}{2}\left(e^{i(n\pi+r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)))}+e^{-i^{i(n\pi+r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)))}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(n\pi-r(\cos\theta+i\sin\theta))}+e^{-i(n\pi-r(\cos\theta+i\sin\theta))}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-e^{-ir(\cos\theta+i\sin\theta)}-e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-in\pi-ir(\cos\theta+i\sin\theta)}+e^{in\pi+ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$$
$$=g_{n\pi}(r,\theta)$$

　したがって、直線上（実数軸上）の点$\alpha=n\pi$で、$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+\pi)$が成立する。③を満たす関数は存在する。
この場合、実数軸上に、周期性のある点$\beta(0<\beta<\pi)$があるかどうかは不明である。実数軸以外の点で周期性があるかどうかも不明である。この場合は、一般の整関数の性質で証明する。

一般の整関数で考察する。
まず、周期性のある点が２個存在したと仮定する。

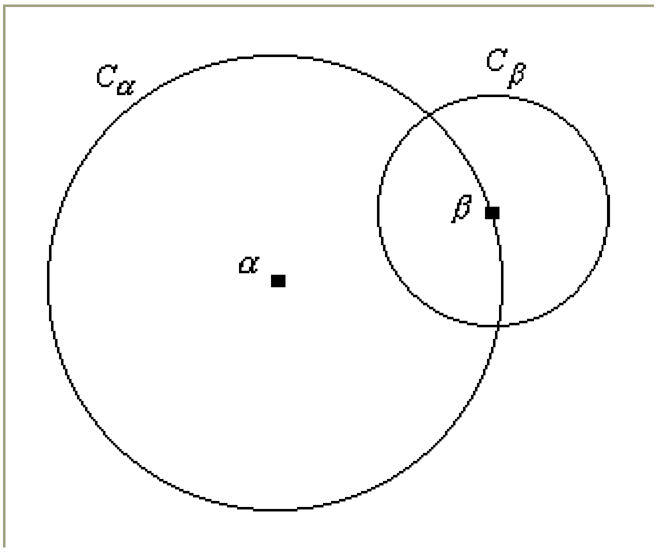
$z=\alpha$ で $g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+2\pi/m)$

$z=\beta$ で $g_\beta(r,\theta)=g_\beta(r,\theta+2\pi/n)$

とする。

$m>2$、$n>2$ とする。
C_α が点 α を中心とする円で、C_α 上に点 β があるとする。

C_β が点 β を中心とする円で、半径は任意とする。



$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+2\pi/m)$ より、

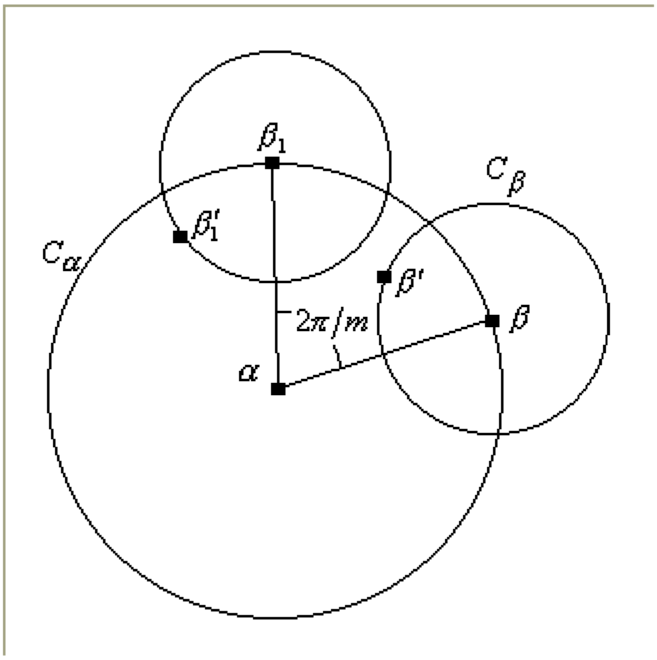
β を C_α 上で反時計回りに $2\pi/m$ 回転させた点を β_1 とすると、

$f(\beta)=f(\beta_1)$

同様に C_β 上の任意の点 β' を $2\pi/m$ 回転させた点を β'_1 とすると、

$f(\beta')=f(\beta'_1)$

となる。

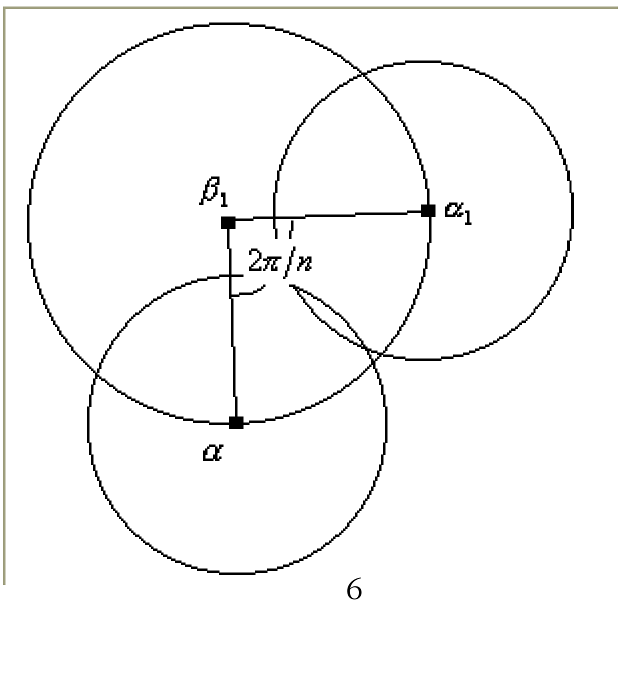


したがって、$z=\beta$ で $g_\beta(r,\theta)=g_\beta(r,\theta+2\pi/n)$ が成り立つ性質は β_1 でも適用

されて、$g_{\beta 1}(r,\theta)=g_{\beta 1}(r,\theta+2\pi/n)$

となる。
周期的な点は３個になる。

今回は α から始めたが、今度は β_1 から始め、α から α_1 を作ると、
$g_{\alpha 1}(r,\theta)=g_{\alpha 1}(r,\theta+2\pi/m)$
となる。
したがって、周期的な点は４個になる。



これを続ければ、格子状に、周期性を持つ点が、無限（可符番）個存在することになる。

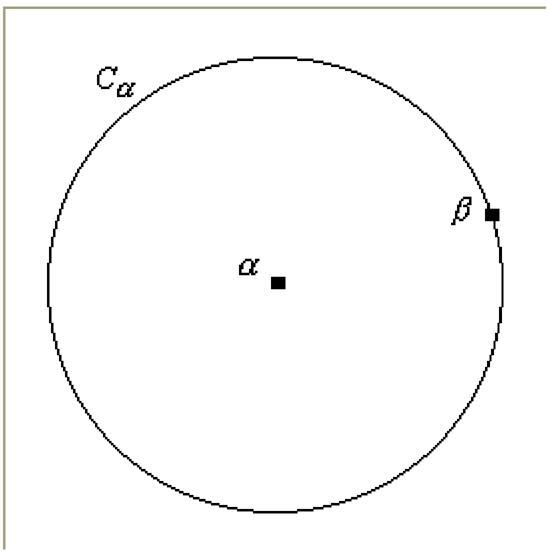
m, n いずれかが３以上で他方が２とする。
この場合も、$m > 2$、$n > 2$ の場合と同様に、格子状に、周期性を持つ点が、無限（可符番）個存在することになる。

全平面に無限（可符番）個存在したと仮定する。

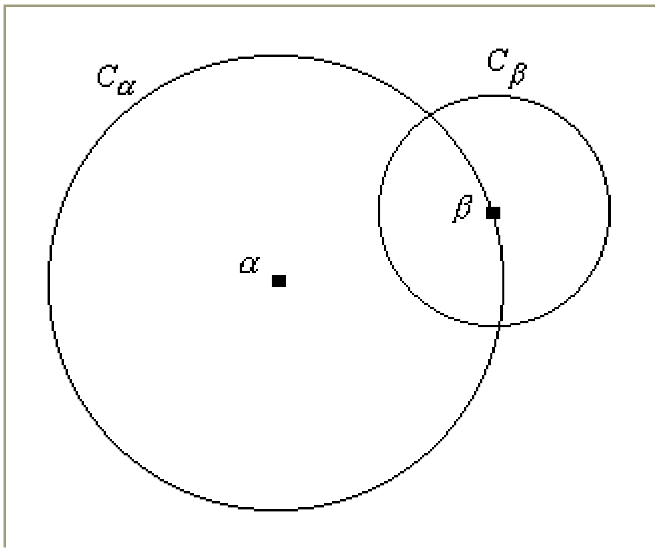
$w = f(z)$ が $|z| = \infty$ においても有限な値になる。

Liouville の定理より、 $w = f(z)$ は常数にならなければならない。
したがって、全平面に無限（可符番）個の点で周期性を持つことには矛盾がある。
当然、全平面に連続の濃度で周期性を持つことにも矛盾がある。

$m = n = 2$ とする。
C_α が点 α を中心とする円で、C_α 上に点 β があるとする。



C_β が点 β を中心とする円で、半径は任意とする。



$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+\pi)$ より、

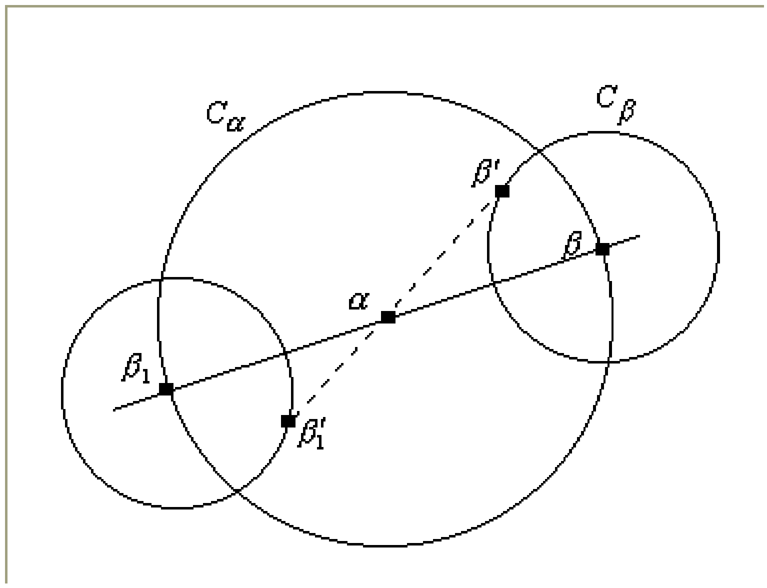
β を C_α 上で反時計回りに π 回転させた点を β_1 とすると、

$f(\beta)=f(\beta_1)$

同様に C_β 上の任意の点 β' を π 回転させた点を β_1' とすると、

$f(\beta')=f(\beta_1')$

となる。



したがって、$z=\beta$ で $g_{\beta}(r,\theta)=g_{\beta}(r,\theta+\pi)$ が成り立つ性質は β_1 でも適用

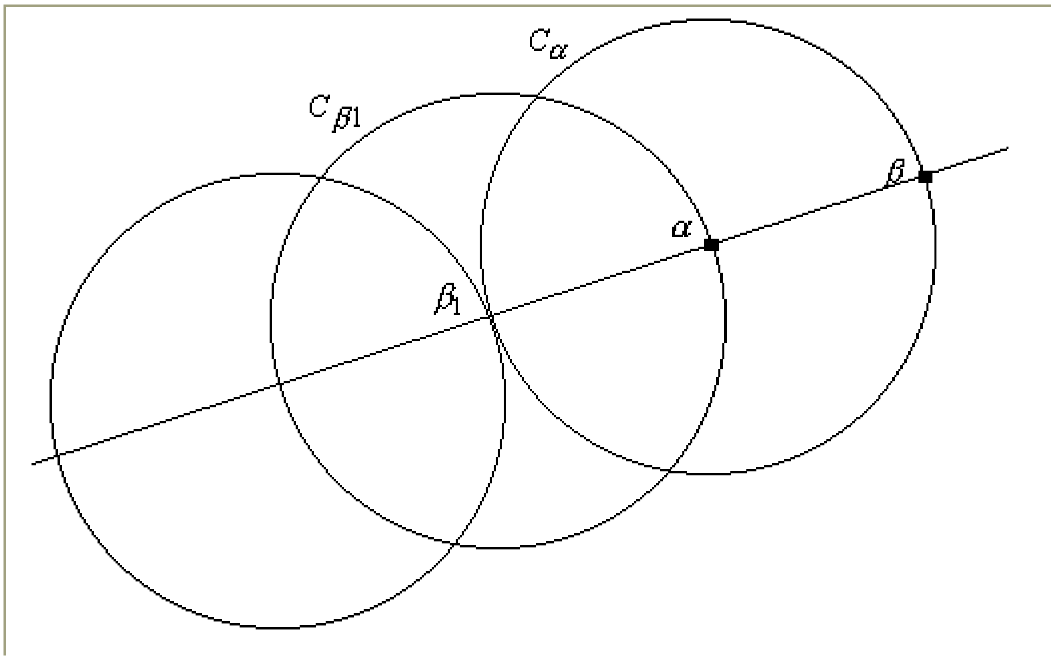
されて、$g_{\beta 1}(r,\theta)=g_{\beta 1}(r,\theta+\pi)$

となる。

これを続ければ、一直線上に等間隔に、

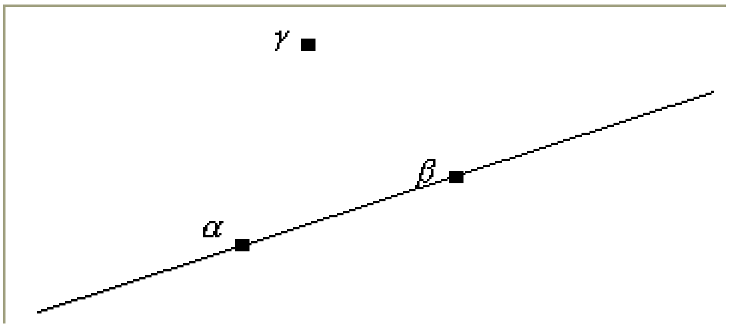
$$g_{\alpha}(r,\theta)=g_{\alpha}(r,\theta+\pi)$$

を満たす点 α が、無限個（可符番個）存在することになる。



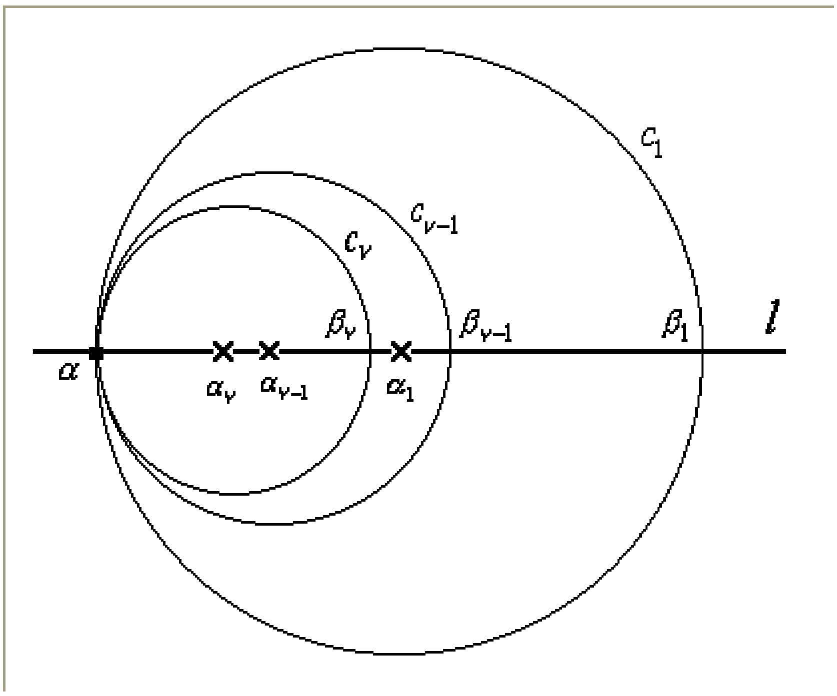
$m,n=2$ で、下図のように、点 α β を結ぶ直線上以外の点 γ において、 $g_\gamma(r,\theta)$ に周期性

があった場合、この場合も、 $m>2$、 $n>2$ の場合と同様に、格子状に、周期性を持つ点が、無限（可符番）個存在することになる。



したがって、これは矛盾する。

$m=n=2$ とし、かつ一直線上 l に連続の濃度で周期的な点が存在する、と仮定する。

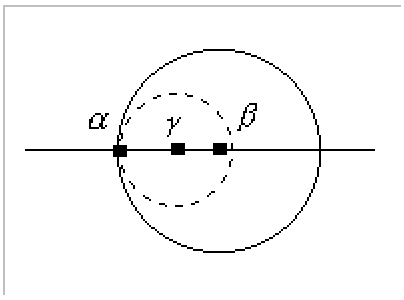


直線 l で、点 α に収束するような、点列 $\{\alpha_\nu\}$ が存在する。
各点 α_ν で $g_{\alpha\nu}(r,\theta)=g_{\alpha\nu}(r,\theta+\pi)$ が成り立つとする。

α_ν を中心とする円で、円周上に α があるような円を c_ν とする。

直線lとc_νとのもう一方の交点をβ_νとする。
α_νにおける周期性により、
$f(\alpha)=f(\beta_\nu)$
点列$\{\beta_\nu\}$は点αに収束し、かつ任意のνに対し、$f(\alpha)=f(\beta_\nu)$となるから、
一致の定理より、$f(z)$は点αの近傍で恒等的に常数$f(\alpha)$になる。
これは矛盾する。

点α,βを結ぶ線上で、α,βの間にある点γにおいて$g_\gamma(r,\theta)=g_\gamma(r,\theta+\pi)$を満たすとする。



線分$\alpha\beta$、$\alpha\gamma$の長さをそれぞれ$|\alpha\beta|$、$|\alpha\gamma|$とする。

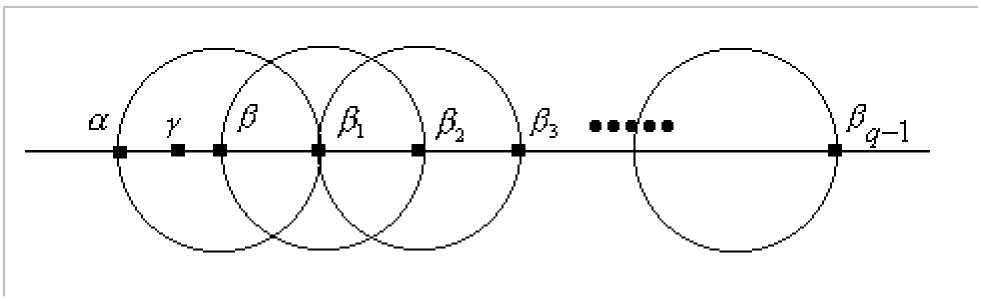
$|\alpha\beta|$と$|\alpha\gamma|$との比が有理数とする。

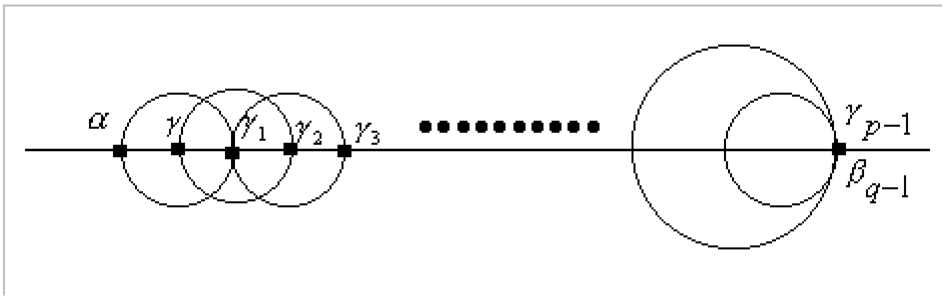
p,qを互いに素な自然数として、

$$\frac{|\alpha\gamma|}{|\alpha\beta|}=\frac{q}{p}$$

とおける。

$g_\beta(r,\theta)=g_\beta(r,\theta+\pi)$、$g_\gamma(r,\theta)=g_\gamma(r,\theta+\pi)$より、$\alpha$を拡張すると、下図のようになり、



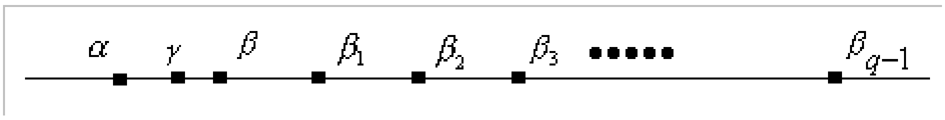


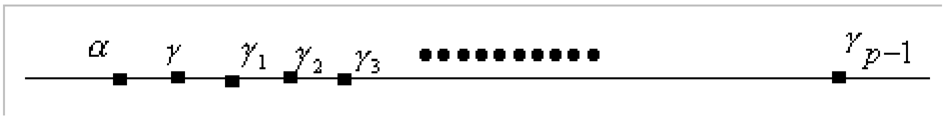
点列$\{\beta_j\}$、$\{\gamma_i\}$ができて、β_{q-1}、γ_{p-1}が同一の点となる。

点列$\{\beta_j\}$、$\{\gamma_i\}$の中で、ある点、β_{j0}とγ_{i0}の間の長さが最小になるとする。

β_{j0}とγ_{i0}から、関数の周期性という新たな展開が可能となる。

これを点列だけに着目すると、





線分$\alpha\beta_{q-1}$をq等分したときの点列、p等分したときの点列になり、それぞれの点列を

共に含むような点列を求めることと同値である。p、qが互いに素だから、線分$\alpha\beta_{q-1}$

をpq等分すれば条件を満たす分割になる。

したがって、$|\alpha\beta|$と$|\alpha\gamma|$との比が有理数の場合、p,qを互いに素な自然数として、

$$\frac{|\alpha\gamma|}{|\alpha\beta|}=\frac{q}{p}$$

おくと、α,γをq等分した点が、αに一番近い周期性のある点となり、この点を基準に、無限個（可符番個）の周期性のある点が定義できる。

$|\alpha\beta|$ と $|\alpha\gamma|$ との比が無理数とする。

$g_\beta(r,\theta)=g_\beta(r,\theta+\pi)$、$g_\gamma(r,\theta)=g_\gamma(r,\theta+\pi)$ より、α を拡張し、点列 $\{\beta_j\}(-\infty<j<\infty)$、

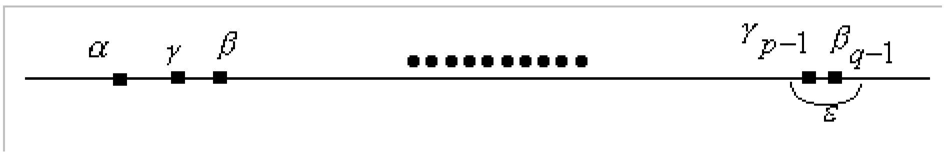
$\{\gamma_i\}(-\infty<i<\infty)$ を作ると、$\{\beta_j\}$ $\{\gamma_i\}$ の中で一致するものはない。

十分に小さな ε を想定する。
p,q を互いに素な自然数として、

$$\left|\frac{|\alpha\gamma|}{|\alpha\beta|}-\frac{q}{p}\right|<\varepsilon$$

を満たす p,q が存在する。

点列 $\{\beta_j\}$、$\{\gamma_i\}$ の中の、β_{q-1}、γ_{p-1} との間の長さが ε 未満になる。



β_{q-1}、γ_{p-1} を基準に、関数の周期性という新たな展開が可能になる。

この展開で、点 α の近傍に、α との長さが ε 未満の、周期性のある点を作れる。
したがって、点 α に収束するような点列を作ることが可能になる。

$|\alpha\beta|$ と $|\alpha\gamma|$ との比が無理数となることには矛盾がある。

したがって、①、②、③を満たす整関数は存在する。かつ、整関数が周期性を持つ場合、
②または③の条件に限る。