積分の関係式

1　関数の積分と逆関数の積分との関係

定理

　$y=f(x)$ を xy 平面上で定義された関数とし、x で微分可能、かつ定数関数でなければ、

$$\int ydx+\int xdy=xy+C \qquad （C \text{は積分定数}）$$

証明

$$(xy)'=y+x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$xy=\int ydx+\int x\cdot\frac{dy}{dx}dx+C$$

$$=\int ydx+\int xdy+C$$

（証明完）

（解説）

　さて、$\int ydx$ と $\int xdy$ はそれぞれ不定積分なので、積分の区間に関係はなさそうであるが、同一の式内に記述することは、

$$f: dx\to dy$$

を意味するので、右図のように積分の区間が関数 f により対応する。

　したがって、関係式は、

$$\int_{x_0}^{x} ydx+\int_{y_0}^{y} xdy=xy-x_0y_0$$

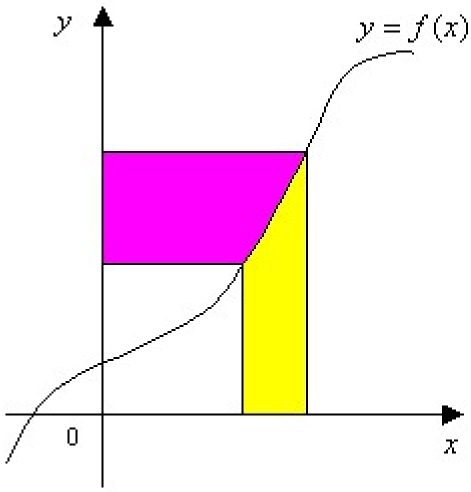
$$（C=-x_0y_0）$$

と記述すると理解しやすい。

　ただ、証明でも明らかなように、

$$\int ydx+\int xdy=xy+C$$

は、部分積分の応用、と解釈ができる。



（別解説）

$y=x^2-1$ の場合、

関係式は区間で１対１対応であることが必要なので $x\geq 0$ とする。逆関数は $x=(y+1)^{\frac{1}{2}}$ となる。

$$\int ydx=\int(x^2-1)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+C_1$$

$$\int xdy=\int(y+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}+C_2$$

$$\int y\,dx + \int x\,dy = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}} + C_1 + C_2$$
$$= x^3 - x + C_1 + C_2$$
$$= xy + C_1 + C_2$$

ここで $C_1 + C_2 = C$ とおく。

つまり、１対１対応の区間で不定積分がなりたつ。

関係式の計算例
注：積分定数は省略する。

例１　$y=\sin^{-1}x$、の場合

逆関数は、$x=\sin y$

$$\int \sin^{-1}xdx+\int \sin ydy=x\sin^{-1}x$$

$$\int \sin^{-1}xdx=x\sin^{-1}x+\cos y$$

$$\begin{aligned}\cos y&=\cos(\sin^{-1}x)\\&=\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})\\&=\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sin^{-1}xdx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$$

例２　$y=\log x$、の場合

逆関数は$x=e^y$

$$\int \log xdx+\int e^y dy=x\log x$$

$$\begin{aligned}\int \log xdx&=x\log x-e^y\\&=x\log x-x\end{aligned}$$

例３　$y=x^3+x^2+x+1$、の場合

逆関数を$x=g(y)$とおくと、

$$\begin{aligned}\int g(y)dy&=x(x^3+x^2+x+1)-\int(x^3+x^2+x+1)dx\\&=x^4+x^3+x^2+x-(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x)\\&=\frac{3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

例４　$y=\frac{1}{x}$、の場合

左辺$=\int ydx+\int xdy$

$$\begin{aligned}&=\log x+\log y\\&=\log x+\log\frac{1}{x}\\&=0\end{aligned}$$

右辺$=1+c$

等式は成り立たないように見えるが、本来は

左辺$=[xy]_{x_0}^{x}$

$$\begin{aligned}&=xy-x_0y_0\\&=xy-1\end{aligned}$$

であって、cは定数-1である。

２　微分可能でない場合の関係式

定理

　$y = f(x)$ を xy 平面上で定義された関数とし、閉区間 $[a,b]$ において、連続かつ有界変動であれば、

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b xdf(x) = bf(b) - af(a)$$

ただし、$\int$ は lebesgue 積分を意味する。

証明は、Lebegue-Stielties 積分の応用である。

　図での解釈は、下図のように、関数が閉区間［ａ，ｂ］で無限遠点を含まず連続であれば、関数がどうなっていてもいい、というのがわかるはずである。

　したがって、１、１の

$$\int ydx + \int xdy = xy + c$$

は、Lebegue-Stielties 積分の特別な場合、とも解釈できる。