積分の記号の研究

－積分の歴史の見直しによる積分の記号の解釈－

山形県高畠町　鈴木啓一　　　　　E-Mail：szk_kei@yahoo.co.jp

概要：積分の記号の成立ちを見直すことによる、不定積分においてdxのxのことを積分変数と呼ぶことの妥当性、記号の解釈に関するその他の研究。

検索語：積分の記号、ライプニッツ、インテグラル

1　はじめに（研究のねらい）

鈴木啓一(2022)において、定積分の定義を $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b (f(x)\times dx) = \int_a^b f(x)dx$ と改善提案した。$\int_a^b (f(x)\times dx)$のdxとは微小差を意味する。ところで、不定積分においてdxのxのことを積分変数と言う。微小差、かたや積分変数と呼ぶことの妥当性を考察する。

さらに、ライプニッツは「summa の頭文字 S を縦に伸ばして積分記号 ∫ とした」「∫ を使う前は Σ を使った」とされている。そこでこの信憑性を調べる。

2　研究の内容

2. 1 積分変数と呼ぶことの妥当性

ライプニッツの功績の調査

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P213) (1676/7) に、逆接線法の問題の解答の一部に

「$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \frac{n}{y-x}$ ，$d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap \mathrm{d}\bar{y}n$ ，

$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n \int d\bar{y}$」（注：$\sqcap$ は＝の意味）

と記載されている。この式の変換方法の具体的な説明はないが、$\int d\bar{x}y$とは$\int(d\bar{x}\times y)$のことと考えられる。なお、この時代の面積を求める方法が不可分法なので、積分の記号の$d\bar{x}\times y$の意味は「線分の太さ×線分の長さ」と考えられる。

一方、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.37-38)(1695)に、「$B_1C_1 + D_2C_2 + D_3C_3 + D_4C_4 = y$ ……　yの間の微分の積分は端のy自身に戻る。」と微分と積分の関係が記載されている。これを現代風にいうと「微分した関数を積分すると元に戻る$\int \frac{dy}{dx}dx = y$」ということである。ところで、「AB_1,AB_2の間の微分はB_1B_2あるいはC_1D_2であり・・・」という記載もある。このことからライプニッツは、dxを微小区間の幅と考え方を変えたと考えられる。

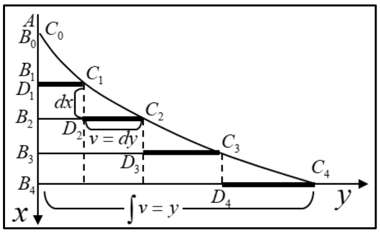


図１　微小差と積分との関係

まとめると、積分の記号における ∫と dとの組合せの由来の説明はないが、積分とは微分の逆演算という説明はある。

高校で扱う積分の調査

高校で指導する計算方法には、微分の逆演算・区分求積法の２つがある。定積分の定義、区分求積法は1854年にリーマンによって作られた。William Dunham (2009, P.100)に、$S = \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(a+\varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(a+\varepsilon_n\delta_n)$ と記載されていて、簡略化し極限値で表現したのが $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta x$である。定義の目的は、William Dunham (2009,PP.95-114)より、$\int_a^b f(x)dx$が存在するための必要十分条件を証明するためである。しかし、「区分求積法で計算をしなさい」とは記載されていない。つまり、区分求積法による計算方法は計算練習としてはいいが、歴史的には要求された方法ではないと考えられる。

大学で扱う積分の調査

大学で扱う積分は高校の積分と比較し、さらに高度化する。重積分・線積分・複素積分・面積分・ベクトル関数の積分などがある。これら

の積分はリーマン積分とよばれ、区分求積法で定義されている。しかし、具体的な関数の積分の計算方法は、変数を置き換え（置換積分等）し微分の逆演算をする方法である。

積分変数と呼ぶことの妥当性の考察

ライプニッツの考え方、高校・大学で扱う積分において、記号の由来よりも計算方法が「微分の逆演算」という性質を重要視している。演算記号という観点から$\int_a^b f(x)dx$を言葉でいうと「$f(x)$をxで積分する」となるので、dxにおけるxのことを積分変数と呼ぶことは妥当と考える。

2.2「ライプニッツは summa の頭文字 S を縦に伸ばして積分記号∫とした」の信憑性

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.165)に「これはラテン語 summa（和）の頭文字Ｓの当時用いられていた書体である」と記載されている。この信憑性を調査する。

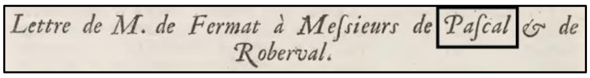
1700 年頃の文献の調査

Johannis Bernoulli(1743,P.Ⅰ)の Epistola に、


UOS inſcribere Philoſophis

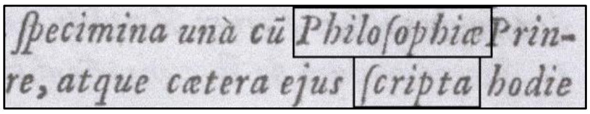
と記載されている。四角で囲った箇所は、英語では「inscribe」「philosophic」に相当すると考えられる。

Pierre de Fermat (1679, P.130)に


Lettre de M. de Fermat à Meſsieurs de Paſcal & de Roberval.

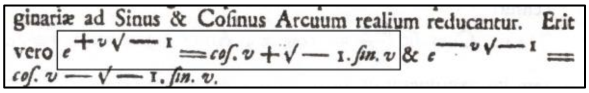
と記載されている。四角で囲った箇所は、個人名 Pascal(パスカル)のことである。

René Descartes (1637, Lectori Benevolo)に、


ſpecimina unà cũ Philoſophiæ Prin-
re, atque cætera ejus ſcripta hodie

と記載されている。四角で囲った箇所は、英語では「philosophy」「script」に相当すると考えられる。

Leonhard Euler (1748,P.104)に


ginariæ ad Sinus & Coſinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = cof.\, v + \sqrt{-1}.\, fin.\, v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = cof.\, v - \sqrt{-1}.\, fin.\, v.$

と記載されている。四角で囲った箇所は、オイラーの公式$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v$のことである。$\cos, \sin$ の S が∫になっている。

積分記号の由来の考察

それぞれ文献で、S が「すべて S」とか「すべて∫」で記述されていたわけではなく、傾向として文字が斜体であれば一部∫が使われて、それ以外は S が使われていた。このことから、ライプニッツは当時の慣習にしたがって∫としただけで、∫はライプニッツの特別な創作ではないというのが理解できる。Gottfried Wilhelm Leibniz (1997, P.165)の記述は正しい。

2.3「ライプニッツは∫を使う前はΣを使った」の信憑性

中村幸四郎(1999,P212)に、ライプニッツの 1666 年の学位論文が下記のように紹介されていて、

$$1+1+\cdots+1=x$$
$$1+2+3+\cdots=\sum x$$
$$1+1+2+1+2+3+\cdots=\sum\sum x \quad \text{等}$$

とおけば $a=x\cdot da-\sum x\cdot d^2a+\sum\sum x\cdot d^3a-\sum^3 x\cdot d^4a$

ライプニッツは「歴史と起源」では $\sum$ を和の記号 $\int$ で表わし，$\sum x$, $\sum\sum x$, $\sum^3 x$ の代りにそれぞれ $\int x$, $\int\int x$, $\int^3 x$ を使っています．このようにするとき

$$a-\omega=x\cdot da-\int x\cdot d^2a+\int\int x\cdot d^3a-\int^3 x\cdot d^4a+\text{etc.}$$

「ライプニッツは『歴史と期限』ではΣを和の記号∫で表し、…」と記載されていることから、ライプニッツは∫を使う前はΣを使ったと解釈できる。一方、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.314)に「記号d,∫は作ってもΔ, Σに相当する記号を持たず、……」と著者の補足説明があることから、ライプニッツは記号Σを使わなかったと解釈できる。そこで、それぞれの引用歴を調べ、Σの利用状況を調査する。

文献の引用の推移

「歴史と起源」の引用（編纂）の推移は下図のようになっている。

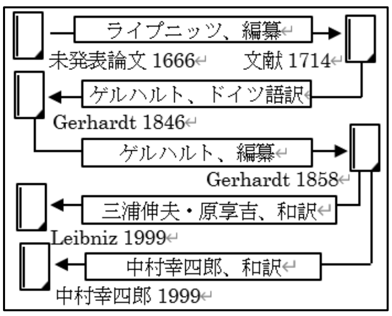


図２　「歴史と起源」の編纂フロー

図における文献名は下記のように簡略化して

いる。

・未発表論文 1666:ライプニッツの学位論文

・文献 1714: 1714 末～1716 年にライプニッツが編纂した文献

・Gerhardt 1846: C.I.Gerhardt (1846,PP.1-6)

・Gerhardt 1858: C.I.Gerhardt(1858,PP.392-398)

・Leibniz 1999: Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,PP.305-315)

・中村幸四郎 1999: 中村幸四郎 (1999,PP.211-212)

文献の記載内容の調査

未発表論文 1666・文献 1714 は未発表文献である。

Gerhardt 1846(P.6)では、

et summam tertiam $\int^3 x$, et summam quartam $\int^4 x$. Hinc posito $1+1+1+1+1+$ etc. esse $=x$ seu x esse numeros naturales, quorum $dx=1$, tunc $1+3+6+10+$ etc. fit $=\int x$ et $1+4+10+20+$ etc. fit $=\int\int x$, et $1+5+15+35+$ etc. fit $=\int^3 x$, et ita porro. Unde tandem fit:

$$y-\omega=dy.x-ddy\int x+d^3y\int\int x-d^4y\int^3 x+\text{etc.}$$

Gerhardt 1858(PP.397-398)では、

$1+2+3+4+5$ etc. fit $=\int x$

et $1+3+6+10+$ etc. fit $=\int\int x$

et $1+4+10+20+$ etc. fit $=\int^3 x$

et $1+5+15+35+$ etc. $=\int^4 x$

et ita porro. Unde tandem fit:

$$y-\omega=dy.x-ddy.\int x+d^3y\int\int x-d^4y.\int^3 x+\text{etc.}$$

Leibniz 1999(PP.314-315)では、

$1+2+3+4+5$ など $=\int x$

$1+3+6+10+$ など $=\int\int x$

$1+4+10+20+$ など $=\int^3 x$

$1+5+15+35+$ など $=\int^4 x$

以下同様である．よって結局

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x+d^3y\cdot\int\int x-d^4y\cdot\int^3 x+\text{など}$$ [40]

と記載されている。

数式の考察

中村幸四郎 1999 にΣの記載はあったが、Gerhardt 1846・Gerhardt 1858・Leibniz 1999 にΣの記載はない。したがって、ライプニッツは記号Σを使わなかったというのが正しいと考えられる。

3 まとめ

積分の歴史を深く考察することにより、ライプニッツの積分の式に隠された意図、誤解されていた点が理解できた。

引用・参考文献

[1]C.I.Gerhardt,Historia et origo calculi differentialis,（微分算の歴史と起源）, https://archive.org/details/historiaetorigo00gerhgoog/page/n68/mode/2up, 1846,閲覧 2021/5/14

[2]C.I.Gerhardt,Leibnizens Mathematische Schriften,（ライプニッツ数学著作集）, Wentworth Press,1858

[3]Gottfried Wilhelm Leibniz;原享吉, 佐々木力,三浦伸夫,馬場郁,斎藤憲,安藤正人, 倉田隆（訳）,ライプニッツ著作集２数学論・数学,工作舎,1997

[4]Gottfried Wilhelm Leibniz;原享吉, 横山雅彦,三浦伸夫,馬場郁,倉田隆, 長島秀男,西敬尚(訳), ライプニッツ著作集３数学・自然学,工作舎,1999

[5]Johannis Bernoulli,Johannis Bernoulli Opera Omnia tomus primus, （ヨハンベルヌイ全集Ⅰ）, https://uvadoc.uva.es/handle/10324/49380 https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/49380/SC_07280.pdf?sequence=1&isAllowed=y 1743,閲覧 2023/03/26

[6]Leonhard Euler,Introductio in analysin infinitorum volume 1,（無限解析序説Ⅰ）, https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/101/ 1748,閲覧 2023/11/30

[7]Pierre de Fermat,Varia opera mathemativa, Tolosae 1679,（数学作品集）, https://dn790006.ca.archive.org/0/items/variaoperamathe00ferm/variaoperamathe00ferm.pdf 1748,閲覧 2023/06/19

[8]René Descartes,Geometria a Renato Des Cartes anno 1637, （デカルト方法序説（幾何学)）, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8601510z/ 1637,閲覧 2023/7/25

[9]William Dunham;一樂重雄,實川敏明(訳), 微積分名作ギャラリー,日本評論社,2009

[10]鈴木啓一,定積分の定義の研究, 数学教育学会 2022 年度春季年会予稿集, PP.130-132,2022

[11]中村幸四郎,近世数学の歴史, 日本評論社,1999