一般・学生・教育者向け資料　　2023/12/20

積分の記号の研究

【2018 年 5 月ライプニッツの功績を研究していたとき、$\int f(x)dx$ において $f(x)$ と dx との間に×が存在することに気付き、さらに研究を深めた内容になっている。】

鈴木　啓一、山形県高畠町

1　はじめに（研究のねらい）

区分求積法による定積分の定義は、高校の数Ⅲでは岡部恒治(2021, P.227)によると、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

ただし、$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}, x_k=a+k\Delta x$

とされている。(厳密な定義については、注釈 1 を参照)

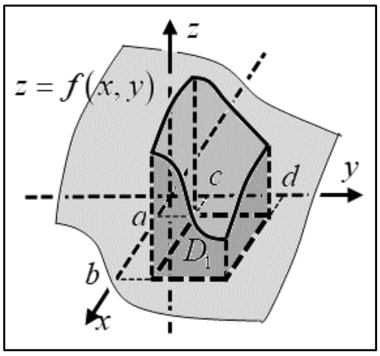
定積分の定義の両辺の関係について考える。左辺は区分求積法による定積分の定義で、Δx とは微小区間の幅である。右辺については、岡部恒治(2021, P.202)に、「$\int f(x)dx+C$ において、$f(x)$ を被積分関数といい、x を積分変数という」と記載されているので、定積分を記号で表現した式であることがわかる。$\int f(x)dx$ を言葉で言うと「$f(x)$ を x で積分する」となるので、右辺の「dx」とは「x で」という意味になる。したがって、Δx と dx の意味に違いがある。

大学ではさまざまな積分を学ぶ。その中で、福田安蔵(1976,P71)では、「D_1 が有界で $f(x,y)$ が連続のとき、

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$$

$$=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx」$$

図 1　領域 D_1 での重積分



と重積分が紹介されている。ここで $\int_a^b f(x,y)dx=F(y)$ とおくと、$\int_c^d F(y)dy=\int_c^d dyF(y)$ が成り立つ。この式において、$F(y)dy$ と $dyF(y)$ は同じ意味となるから、$F(y)$ と dy の間で交換法則が成り立つことになる。福田安蔵(1976,PP.72-96)に、具体的な計算例が紹介されていて、$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ と $\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)\right\}dy$ の計算方法が同じであることからも、交換法則が成り立つことがわかる。

そこで本研究では、Δx と dx の意味の違いを解消させるため、dx の意味を調査し定積分の定義の改善を提案する。交換法則が成り立つ根拠も提案する。

dx を使った定積分の定義の改善をするならば、同様に微分の記号の由来を調査し、当時の考え方を明確にする必要がある。

区間表示のない $\int f(x)dx$ という表現は、1675 年にライプニッツが初めて使用した。詳しくは、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997, P.165)によると「1675 年、数学史上初めて求積に記号 $\int$ が導入された。これはラテン語 summa（和）の頭文字 s の当時用いられていた書体である。」と翻訳者の解説がある。そこで、記号 $\int$ の由来を調査する。

大学で学ぶ数学において、dz , dS , $d\mu$ などを使うさまざまな積分がある。dx と同じ扱いをするならば、「z で」,「S で」,「μ で」となる。しかし、それぞれの積分の定義が区分求積法ならば、Δx に相当する Δz , ΔS , $\Delta\mu$ に比較し意味の違いがあることになる。そこで、大学で学ぶ積分の dz , dS , $d\mu$ の意味を明確にし、さらに定積分の d〜 の解釈の統一を提案する。

定積分の定義の左辺は区分求積法である。積分の計算方法は、微分の逆演算と区分求積法がある。そこで両計算方法の関係を調査し、考え方を提案する。さらに、計算方法の違いを踏まえ、不定積分の記号の扱いを提案する。

2 研究の内容

2.1 研究の対象指定

$\int f(x)dx$ という表現は、1675 年にライプニッツが初めて使用した。ただし、積分区間の含んだ記号 $\int_a^b$ ではなく $\int$ という記号である。この記号は、不定積分ではなく、積分区間が $[0,x]$ のみの定積分である。現代風に表記すると、$\int f(x)dx = F(x)$ （注： $F(0)=0$ ）となる。

積分区間を含んだ $\int_a^b f(x)dx$ という表現は、1816 年にフーリエによって作られた。詳しくは、小川束(2020)によると「今日使われている定積分の記号 $\int_a^b$ はフーリエが考案したもので」と、同ページにその注釈として「”Theorie de la chaleur” *Annales de chimie et de physique*, tome3 (1816), PP.350-375. 定積分記号の初出は P.361」と記載されている。具体的には、下記文献 Annales de chimie et de physique tome 3 (1816,P361)に

$$Fx = \frac{1}{\varpi}\Sigma_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\varpi} dp\, Fp.\cos(ix-ip) \qquad (E)$$

$$fx = \frac{2}{\varpi}\int_0^{\infty} dq.\int_0^{\infty} dp\, fp.\sin qx.\sin qp \qquad (\sigma)$$

$$\varphi x = \frac{2}{\varpi}\int^{\infty} dq.\int_0^{\infty} dp\,\varphi p\cos qx\cos.qp \qquad (\epsilon)$$

Nous employons ici la notation de l'auteur, qui joint ordinairement aux signes Σ et ∫ l'indice des limites entre lesquelles on doit effectuer l'intégration.

Nous employons ici la notation de l’auteur（ここでは著者の表記法を使用します）と記載されている。

定積分の定義の左辺 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ という式は、1854 年にリーマンによって定義された。William Dunham (2009,P.100)で紹介されていて、左辺の式は、リーマン和、

$$S = \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

を簡略化し極限値で表現したものである。(詳しくは、注釈２を参照)

そこで、定積分の定義の「Δx と dx との意味の違い」を解消させるため、ライプニッツの功績を調査し、そこから示唆される積分の記号の考え方を提案する。

2.2 ライプニッツの功績の概要

中村幸四郎(1999,PP.209-242)よると、ライプニッツの功績の概要は下記のようになる。

１６６６年

学位論文「結合法の理論」・「歴史と起源」を作成する。「歴史と起源」は未発表であったが、ライプニッツ死後に編纂され、その資料の中に記号 d と $\int$ がある。記号 d と $\int$ は差・和の記号であって、微積分の意味はない。（詳細は、2.4.4 を参照）

１６７３年

固有三角形による変換定理を発見。関数の接線と、接線から定義できる面積関数の存在を示した。この後、接線・求積のための記号として d と $\int$ を使い始めた。ただ、使い方に試行錯誤があった。

１６８４年

微分算の論文を発表。題名「極大・極小および接線の新方法、分数あるいは無理量によって妨げられない…」

１６８６年

積分算の論文を発表。題名「深奥な数学…不可分量あるいは無限小量の解析について」(不可分の意味については、注釈３を参照)

2.3 ライプニッツの学位論文の紹介及び考察

2.3.1 学位論文の紹介１

「結合法の理論」・「歴史と起源」の中で、初めて記号 d と $\int$ が使われた部分について、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,PP.310-315)から紹介する。

文献では「無限の減少数列$\{a,b,c,d,e,\cdots\}$最終項をωとする」と記載されている。この時代に数列表記方法$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$はなかったので、上記数列を現代風に表記すると、

$a=a_1, b=a_2, c=a_3,\cdots$、$\lim_{n\to\infty} a_n=\omega$

となる。

各項と階差を下記表１のようにする。

表１　各項と階差

項	a	b	c	d	e	$\cdots$	ω
第1の差	f	g	h	i	$\cdots$		
第2の差	l	m	n	o	$\cdots$		
第3の差	q	r	s	$\cdots$			
第4の差	β	γ	δ	$\cdots$			
第5の差	λ	μ	$\cdots$				

$1a-1b=1f, 1b-1c=1g, 1c-1d=1h,\cdots$
$1l=1f-1g, 1m=1g-1h,\cdots$
$1q=1l-1m, 1r=1m-1n,\cdots$
……

次に、数列の式を置き換えると、

$$a-\omega=1(a-b)+1(b-c)+\cdots+1(?-\omega)$$
$$=1f+1g+1h+1i+\cdots \qquad \cdots式①$$

となる。なお、この数列を現代風に言うと階差数列のことで、第１の差は第１階差数列、第２の差は第２階差数列、・・・、のことである。式の中の$1f, 1g$等の係数１については、通常は省略するが、引用文献通りに記載した。

次に、$g,h,i,\cdots$を$f,l,q,\beta,\cdots$で置き換える。

$1g=1f-1l$
$1h=1g-1m$
$\quad =1(f-l)-1(l-q)$
$\quad =1f-2l+1q$
$1i=1f-3l+3q-1\beta$
……

となる。式①に代入すると、

$$\left.\begin{aligned} a-\omega=1f& \\ +1f-1l& \\ +1f-2l+1q& \\ +1f-3l+3q-1\beta& \\ +1f-4l+6q-4\beta+1\lambda& \\ +\cdots& \end{aligned}\right\} 式②$$

となる。式②の係数において、符号を省略してみると、下記のようにパスカルの三角形になる。

表２　式②の係数

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1
・・・・・・				

次に、$a=y$、第１の差をdyつまり$f=dy$、第２の差を$l=ddy$、第３の差を$q=d^3y$、$\cdots$、数列の項の数をx、項の和を$\int x$、和の和つまり第２の和を$\iint x$、第３の和を$\int^3 x$、$\cdots$とおく。

$x=1+1+1+1+\cdots$
$\int x=1+2+3+4+\cdots$
$\iint x=1+3+6+10+\cdots$
$\int^3 x=1+4+10+20+\cdots$
$\quad\cdots\cdots$

となる。式②に代入すると、

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

が成り立つ。

2.3.2 学位論文の紹介２

中村幸四郎(1999,P.210)において、「微分算の歴史と起源が未発表であったため Historia et origo calculi differentialis を参照した」と記載されている。この「Historia et origo calculi differentialis」とは、C.I.Gerhardt(1846)のことである。C.I.Gerhardt(1846,P.6)に、

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\int x$$
$$+d^3y\iint x-d^4y\int^3 x+etc$$

と記載されている。

2.3.3 学位論文の紹介３

中村幸四郎(1999,P.212)より紹介する。2.3.1・2.3.2 と大きく違う点は、最初に$\sum$ を使って記述していることである。

$1+1+1+\cdots=x$

$1+2+3+\cdots=\sum x$

$1+1+2+1+2+3+\cdots=\sum\sum x$

とおけば、

$$a=x\cdot da-\sum x\cdot d^2a$$
$$+\sum\sum x\cdot d^3a-\sum{}^3 x\cdot d^4a$$

そして、$\sum$ を$\int$ に置き換えて

$$a-\omega=x\cdot da-\int x\cdot d^2a$$
$$+\iint x\cdot d^3a-\int{}^3 x\cdot d^4a+etc$$

とした。

2.3.4 学位論文の考察

2.3.1 で、

$\int x=1+2+3+4+\cdots$

$\iint x=1+3+6+10+\cdots$

$\int^3 x=1+4+10+20+\cdots$

と使われているので、$\int$ が積分ではなく和の意味であることがわかる。

2.3.1 における式

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

2.3.2 における式

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\int x$$
$$+d^3y\iint x-d^4y\int^3 x+etc$$

2.3.3 における式

$$a-\omega=x\cdot da-\int x\cdot d^2a$$
$$+\iint x\cdot d^3a-\int{}^3 x\cdot d^4a+etc$$

において、注目すべきは式の中の「・」の存在である。

2.4 d と$\int$ の使い方の推移の調査及び考察

ライプニッツは、学位論文で、記号d を差、記号$\int$ を和として扱った。固有三角形・変換定理の発見以降、接線問題・求積問題に取り組み、その手法として、記号化と計算方法の確立に取り組んだ。微小差(微分)の記号にd 、面積を求める記号に$\int$ を使い始める。そして使い方に試行錯誤があった。

2.4.1 d と$\int$ の使い方の推移

１６７５年１０月　求積解析①

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.150)より紹介する。

求積問題にてカヴァリエリ(1598-1647)が考案した記号「omn.」を使う。

（例）

・ $\text{omn.}\overline{yx\,\text{ad}\,x}\sqcap\dfrac{b^2c}{2}-\text{omn.}\overline{\dfrac{x^2}{2}\,\text{ad}\,y}$

「omn.」はラテン語の「omnes」の略で不可分法（注釈５を参照）の「すべての線」の意味、「$\overline{xy}$」は「(xy)」の意味、「$ad\ x$」は「xに関係づけられた」という意味、「⊓」は「=」の意味である。

１６７５年１０月　求積解析②

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.165)より紹介する。

「omn.のかわりに$\int$ と記すと便利であろう」と記載されている。数学史上初めて記号$\int$ が導入された。

（例）

・ $\dfrac{\overline{\int l^2}}{2}\sqcap\int\overline{\int\bar{l}\dfrac{1}{a}}$

・ $\int x\sqcap\dfrac{x^2}{2}$

１６７５年１０月　求積解析③

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.167)より紹介する。

「$\int 1\sqcap ya$ ならば私たちは$1\sqcap\dfrac{ya}{d}$ とおくであろう。すなわち$\int$ が次元を増やすようにd は次元を減ずるであろう」、同ページの解説に「dx と$\dfrac{x}{d}$ とは同じであり、二つの近似するx の差である」、「この箇所で$\int$ とd の逆関係が数学史上

初めて明確に述べられた。」と記載されている。

さらに、応用として$\int \frac{x^3}{b} + \int \frac{x^2 a}{e} \sqcap \int \overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}$ と記載されている。

１６７５年１０月　求積解析④

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.174)より紹介する。

1675 年 10 月の$\int$ の導入に対し、翻訳者である原享吉氏の解説が紹介されている。「カヴァリエリは、すべての線は面積を与え、すべての面は体積を与えると唱えたが『和』という語を避けている。ライプニッツは、面積を線分の和で見ることをためらわず、他方で線の無限小の差を考え、こうして記号$\int$,d を導入したとき、それらはすでにオペレーターでもあった。」と記載されている。

１６７６年７月　逆接線法

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.212-213)より紹介する。

デカルトの逆接線法の問題について。

ABO は曲線、BL は接線、$BC:CL = N:BJ$ となるように N を定める。

$$CL \sqcap \frac{BC \sqcap yn}{BJ \sqcap y-x}$$

（注：この表記方法は、$CL = \frac{BC}{BJ}$, $BC = yn$, $BJ = y-x$ を１行で表したものである。ただし、$CL = \frac{BC}{BJ}$ はライプニッツの計算間違いで、$CL = BC \cdot \frac{BJ}{N}$ が正しい）

$$t \sqcap \frac{ny}{y-x},\ \frac{n}{t} \sqcap \frac{y-x}{y} \sqcap 1 - \frac{x}{y},\ \frac{x}{y} \sqcap \frac{t-n}{t}$$

$$\frac{t}{y} \sqcap \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}$$

（注：初めて微分記号を分母においた。）

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \frac{n}{y-x}$$

$$d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap d\bar{y}n$$

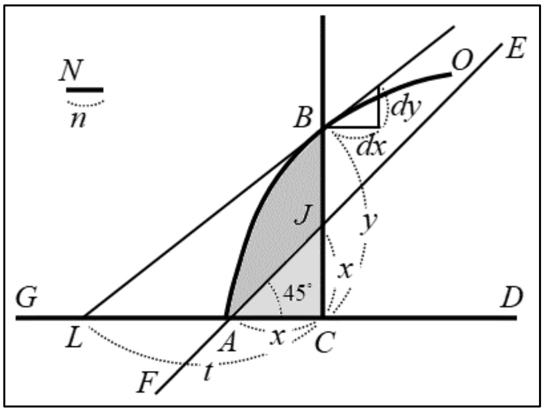
$$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n\int d\bar{y}$$

ところで、$\int d\bar{y} \sqcap y$、$\int \overline{xd\bar{x}} \sqcap \frac{x^2}{2}$、$\int d\bar{x}y \sqcap ACBA$ であるから、

$$ACBA - \frac{x^2}{2} \sqcap ny$$

求積問題、$AJBA \sqcap ny$ と導き出した。

図２　逆接線法



１６７６年１１月　接線の微分算

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.238-241)より紹介する。

単純べきの微積分の一般規則を導く。

$$\frac{dx^e}{dx} \sqcap ex^{e-1}, \int \overline{x^e d\bar{x}} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}$$

下記のような複雑な無理式・分数式にも適用する。

$$d\overline{\sqrt{a++bz+cz^2}} \sqcap -\frac{b+2cz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}$$

１６８４年１０月　微分算の論文

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.296-297)より紹介する。

$dx, dy, \cdots$ を曲線 $X, Y, \cdots$ の接線の有限線分とみなし、有限線分間の演算規則が記載されている。

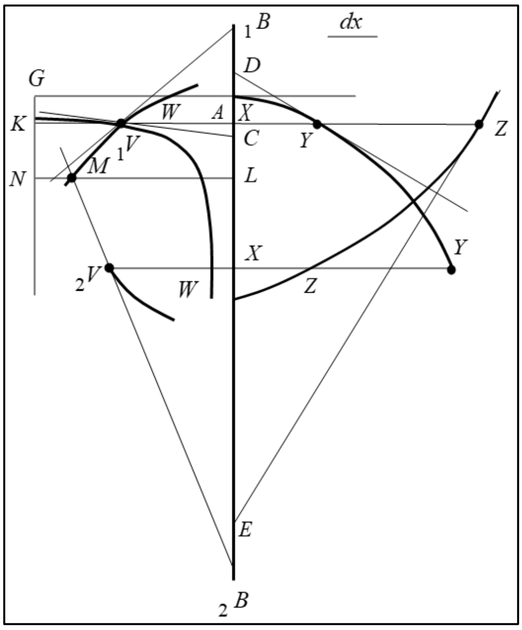
- a が定量ならば $da = 0$
- $d\overline{ax} = adx$
- $d\overline{z-y+w+x} = dz - dy + dw + dx$
- $d\overline{xv} = xdv + vdx$
- $d\frac{v}{y} = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$

上記演算規則で「=」を使ったのは、本論文で簡潔に表現するためであって、文献では「等しいであろう」と記載されている。(除法の$\pm, \mp$に

ついては、注釈４を参照）

ライプニッツは、演算規則の説明するために下記の図を使っている。

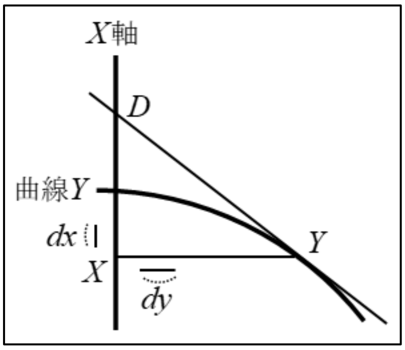
図３　有限線分の説明



ここで、説明を簡略化するため、まず曲線Yだけで説明する図を下記に記載した。

縦線X軸上の小さな線分を固定しdxとする。$XD:XY=dx:dy$を満たす線分dyを定めることができる。dyが曲線Yの有限線分となる。同様に同じ固定したdxから、曲線$V,W,\cdots$の有限線分$dv,dw,\cdots$を定めることができる。

図４　有限線分の説明



P.296 に「dvは有限の線分（差分）であり、微分とは訳せない」と記載されているので、微分の演算規則に似ているが、ライプニッツは「微分」とは考えていなかった。さらに、図を使い演算規則が述べられているが、P.297 に「今日的にいう微分算の四則が述べられているが、証明は略されている。」とあるので、証明の記載はない。つまり、ライプニッツは、図を説明することにより、有限線分間の演算規則を導いている。

実際の計算例として、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.299)に

「$dx^a = ax^{a-1}dx\,,\, d\,\dfrac{1}{x^a} = -\dfrac{adx}{x^{a+1}}$」

Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.233)に

「$d^3(xy) = yd^3x + 3ddxdy + 3dxddy + xd^3y$

一般的に

$$d^e(xy) = 1d^exd^0y + \frac{e}{1}d^{e-1}xd^1y + \frac{e.e-1}{1.2}d^{e-2}xd^2y + \frac{e.e-1.e-2}{1.2.3}d^{e-3}xd^3y + \cdots$$」

と記載されている。しかし、文献 Gottfried Wilhelm Leibniz (1997), Gottfried Wilhelm Leibniz (1999)すべてにおいて、現代の微分表記「$y=f(x)$のときの微分$\dfrac{dy}{dx}$」という説明はない。$\dfrac{dy}{dx}$の計算例の記載もない。

ところで、上記同ページ Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.299)で、$\dfrac{v}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{x}{v}=w$で初めて「=」が使われた。

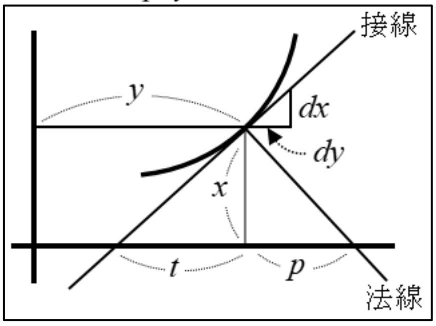
１６８６年７月　積分算の論文

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.326-327)より紹介する。

積分について「$pdy = xdx$ならば、この微分方程式を求和方程式に移せば、$\int pdy = \int xdx$となる」と記載されている。この$pdy = xdx$とは、曲線に接線と法線を引き、各線分の長さをx,y,t,p、有限線分をdx,dyとしたとき、

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{t}=\dfrac{p}{x} \Rightarrow pdy = xdx \Rightarrow \int pdy = \int xdx$となるということである。

図５　$pdy = xdx$ の説明



この論文により、面積問題が代数式をこえて超越的な式にまで及ぶことを示している（超越的なという意味は、注釈５を参照）。

ただし、「1684 年 10 月微分算の論文」の微分算の演算規則に相当する積分算の演算規則、たとえば

$$\int \left(f\left(x\right) \pm g\left(x\right) \right) dx = \int f\left(x\right) dx \pm \int g\left(x\right) dx$$

のような記載はない。中村幸四郎(1999,P.252)に「積分の一般法則を組織したのは実にヨハン・ベルヌイに負うところであります・・」、同ページにヨハン・ベルヌイによる書簡に「積分算(calcul integral)と名付けた」と記載されている。したがって、ヨハン・ベルヌイが積分の演算規則が作り、$\int$ を integral と命名した。

１７１４年　微分算の歴史と起源

Gottfried Wilhelm Leibniz（1999,PP.310-315)より紹介する。

この項目「1714 年　微分算の歴史と起源」とは、「2.3.1 学位論文の紹介１」で紹介した内容のことで、

$$y - \omega = dy \cdot x - ddy \cdot \int x$$
$$+ d^3 y \cdot \iint x - d^4 y \cdot \int^3 x + \cdots、$$

と記載されている。

2.4.2 d と $\int$ の使い方の推移と、ライプニッツ協会の文献との比較

「2.4.1 d と $\int$ の使い方の推移」と、ライプニッツ協会(https://leibnizedition.de/)に掲載されている文献とを比較した。ライプニッツ協会の文献を翻訳することはできなかったが、文献のタイトル・図・数式で比較した。その結果、下記の項目が史実と一致すると考えられる。

１６７５年１０月　求積解析①

日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.150-152)
タイトル：重心論による求積解析１，２
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5
(2021/11/30),
Ⅶ5A.pdf,PP.263-264
タイトル：Analysis Tetragonistiva ex
Centrobarycis

１６７５年１０月　求積解析②、③

日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.157-170)
タイトル：求積解析第２部
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5
(2021/11/30),
Ⅶ5A.pdf,PP.288-295
タイトル：Analyseos Tetragonisticae
pars 2da

１６７６年７月　逆接線法

日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.211-216)
タイトル：逆接線法
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5
(2021/11/30),
Ⅶ5B.pdf,PP.598-602
タイトル：Methodus tangentium inversa

１６７６年１１月　接線の微分算

日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.238-246)
タイトル：接線の微分算
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5
(2021/11/30),
Ⅶ5B.pdf,PP.612-618
タイトル：Calculus Tangetium
differentialis

１６８４年１０月　微分算の論文

日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.296-297)
タイトル：分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法、またそれらのための特別な計算方法
協会文献：参照できなかった

１６８６年７月　積分算の論文

日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.326-327)
タイトル：深奥な幾何学ならびに不可分者と無限の解析について

協会文献：参照できなかった

１７１４年　微分算の歴史と起源
日本語訳：Gottfried Wilhelm Leibniz
(1999,PP.310-315)
タイトル：微分算の歴史と起源
協会文献：参照できなかった

2.4.3 d と $\int$ の使い方の推移の考察

１６７５年１０月　求積解析の考察

「この箇所で $\int$ と d の逆関係が数学史上初めて明確に述べられた。」とあるので、ライプニッツは、面積を求めるという積分が微分の逆演算であることを認めたと考えられる。また、「ライプニッツは、面積を線分の和で見ることをためらわず、他方で線の無限小の差を考え、こうして記号 $\int$,d を導入したとき、それらはすでにオペレーターでもあった。」とあるので、ライプニッツは、$\int$ を「総和を求める記号」、d を「線分の無限小の差の演算記号」として使い始めた。ライプニッツは、デカルトが構築した記号の演算による幾何学を継承して、記号による微積分つまり接線問題・面積問題の解法の構築を目標にしたと考えられる。(デカルトの功績については、注釈６を参照)

不可分法の線分による比較を、線分の和という解釈にすることは、ライプニッツにとって大きな変化点と考えられる。ただし、「$\int$ が次元を増やすように d は次元を減ずるであろう」と記載されているので、この時点でのライプニッツの考える関数とは、べき乗関数 $y=x^n$ とその組み合わせの関数と考えられる。

１６７６年７月　逆接線法の考察

$\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \dfrac{n}{y-x}$ を $d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap d\bar{y}n$ に変換する方法は、$\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \dfrac{n}{y-x}$ の両辺に $d\bar{y}(y-x)$ を掛けることである。したがって、$d\bar{x}y - xd\bar{x}$ において、たとえば $d\bar{x}y$ の $d\bar{x}$ と y の間に掛算があるので、$d\bar{x}\times y - x\times d\bar{x} \sqcap d\bar{y}\times n$ と解釈できる。$d\bar{x}\times y - x\times d\bar{x} \sqcap d\bar{y}\times n$ とは、$d\bar{x}, d\bar{y}$ を使った差分の演算が等しい、という意味である。そして、差分の式 $\left(d\bar{x}y - xd\bar{x}\right)$ の総和と、差分の式 $\left(d\bar{y}n\right)$ の総和が等しいというのが、式 $\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n\int d\bar{y}$ である。

$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n\int d\bar{y}$ において、総和の記号 $\int$ とは、たとえば $\int d\bar{x}y$ においては $d\bar{x}$ のみの総和や y のみの総和ではなく、$d\bar{x}\times y$ に対しての総和と解釈するのが妥当である。式にすると、$\int d\bar{x}y = d\overline{x_1}y_1 + d\overline{x_2}y_2 + \cdots$ となる。したがって、$\int\left(d\bar{x}\times y\right) - \int\left(x\times d\bar{x}\right) \sqcap n\times\int d\bar{y}$ と解釈できる。なお、この時代の面積を求める方法が不可分法なので、ライプニッツは「線分の総和」を面積と扱った。積分の記号の $d\bar{x}\times y$ の由来は「線分の太さ×線分の長さ」と考えられる。

差分の式 $d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap d\bar{y}n$ から総和の式 $\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n\int d\bar{y}$ へ変換するライプニッツの発想については、1666 年の学位論文における差分と総和の関係式

$$y-\omega = dy\cdot x - ddy\cdot\int x + d^3y\cdot\iint x - d^4y\cdot\int^3 x + \cdots$$

が源と考えられる。

$\int d\bar{x}y \sqcap ACBA$ という式について考える。$\int d\bar{x}y$ が図２の関数曲線と座標軸とで描く図形 ABC の面積を表すので、現代風に記述すると $\int yd\bar{x}$ となる。つまり $\int d\bar{x}y = \int yd\bar{x}$ なので、$d\bar{x}$ と y との間で交換法則が成立つことになる。

再度 $\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \dfrac{n}{y-x}$ について考える。$\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}}$ を現代風に言うと微分表記になるが、直角三角形の辺の比として扱っている。つまり、ライプニッツは $\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}}$ を割算（分数）と同じ扱いをしている。

１６８４年１０月　微分算の論文の考察

有限線分間の演算規則において、文献では「等しいであろう」となっている。なぜ「=」とできなかったかという疑問が生じる。

ライプニッツは定義の基本を不可分法におい

ている。線分とは長さを示すもので幅は０である。ライプニッツは、幅０の演算規則を、有限線分の短い長さで近似して証明しようとしたが、満足のゆく証明ができなかったと考えられる。

なお、有限線分間の演算規則とは、現代風に言うと、微分の演算規則で、$\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dx}$ の微小差 dx を固定し、さらに dx を省略した表現である。

１６８６年７月　積分算の論文の考察

$\frac{dx}{dy} = \frac{p}{x}$ の両辺に xdy を掛けることから、$p \times dy = x \times dx$、さらに $\int (p \times dy) = \int (x \times dx)$ と解釈できる。

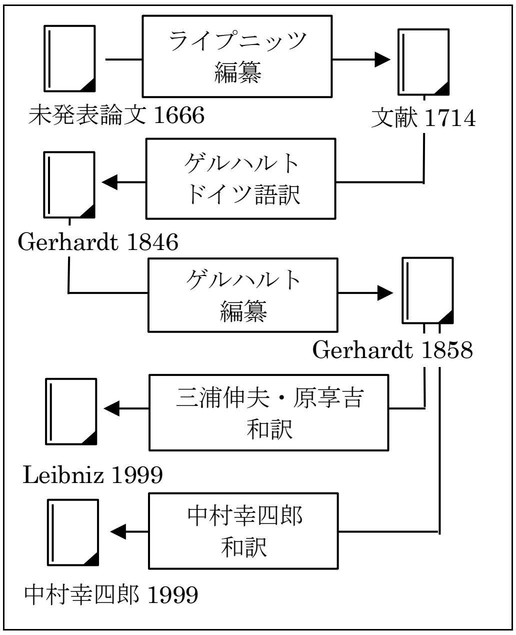
2. 4. 4 学位論文における数式に関する考察

2.3 で 1666 年の学位論文「歴史と起源」を紹介した。ところで、2.4.1 により、「$\int$ 」を使い始めるのが 1675 年 10 月、「=」を使い始めるのが 1684 年 10 月なので、「歴史と起源」の数式の記載方法は史実と一致しない。そこで、各文献の引用歴を調査する。

図における文献名を下記のように簡略化する。

・未発表論文 1666:ライプニッツの学位論文
・文献 1714: 1714 末～1716 年にライプニッツが編纂した文献
・Gerhardt 1846: C.I.Gerhardt (1846,PP.1-6)
・Gerhardt 1858: C.I.Gerhardt (1858,PP.392-398)
・Leibniz 1999: Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,PP.305-315)
・中村幸四郎 1999: 中村幸四郎 (1999,PP.211-212)

図６　「歴史と起源」の編纂フロー



未発表論文 1666・文献 1714 の調査

Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.305)に「これは 1714 年の秋ごろから執筆され、ライプニッツの死の直前の 1715-16 年頃に中断された断片」と記載されている。つまり、1714 年以前の「1666 年の未発表論文」以降を再執筆したという意味である。見発表であったことから、「歴史と起源」という題名があったかどうかは不明である。

ここで執筆された文献のことを「文献 1714」略記した。Gottfried Wilhelm Leibniz (1999, P.305)の表題にあるように、この文献名は「Historia et origo caluculi differentialis」、日本名「微分算の歴史と起源」である。中村幸四郎(1999,P.210)において、「微分算の歴史と起源が未発表であったため」とあるように、「文献 1714」も未発表である。

林知宏(2012)とは、ニュートンとライプニッツとの間の先取権論争まとめた文献である。林知宏(2012,P88)に「1714 年『微分算の歴史と起源』執筆開始」と記載されている。したがって、微分算の歴史と起源とは、ライプニッツの 1666 年の出来事から微分算創設までの過程を、ニュートン宛てに作った資料である。当然刊行はされていない。

Gerhardt 1846 の調査

中村幸四郎(1999,PP.220-221)に「最初のこの手稿に取り組んだのは、ゲルハルトでありました。… Historia et origo calculi differentialis …という出版物を出しておりますが、」と記載されている。つまり、「文献 1714」をゲルハルト

がドイツ語に翻訳した文献が「Gerhardt 1846」である。Gottfried Wilhelm Leibniz(1997, P.213)に「手稿がもっぱら Π を示しているにもかかわらず、ゲルハルトは=に置き変えているのを見るとき、本作品についても、低本を離れて等号 Π をとりたい。」と記載されている。ゲルハルトは元になった文献の「Π」を「=」に置き換えた。

Gerhardt 1858 の調査

文献 C.I.Gerhardt (1846)及びその他文献が C.I.Gerhardt (1858)に掲載されている。実際、C.I.Gerhardt (1846)は総ページ数 50 ページで、その中 PP.1-20 に記載されている内容が、C.I.Gerhardt (1858)では PP.392-410 に記載されている。C.I.Gerhardt (1858)は、文献 C.I.Gerhardt (1846)及びその他文献から編纂された文献と考えることができる。

Leibniz 1999 の調査

Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.305)に「①LH,XXXV,VⅡ;②LMG,V,392-410」「翻訳は一応②によった上、①を照合して訳文を決定した」と記載されている。②LMG,V,392-410 とは、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.4)に「LMG Leibniz Mathematishe Schriftrn …」と記載されている。これは C.I.Gerhardt(1858,P392-410)のことである。

中村幸四郎 1999 の調査

中村幸四郎(1999,PP.210)に引用文献の説明で「『微分算の歴史と起源』(Historia et origo calculi differentialis『数学論文集』V pp.392-418)」と記載がある。明らかにこの文献は Gerhardt 1858 のことである。

数式における考察

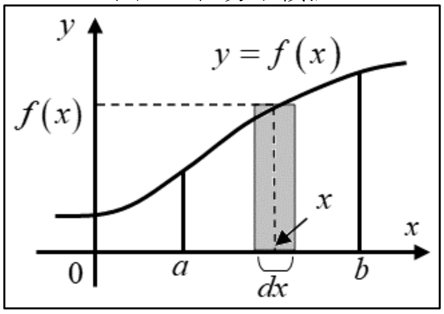
文献の編纂・翻訳の推移から、未発表論文 1666 でどのような記号を使ったは明らかでないが、文献 1714 又は Gerhardt 1846 から「Π」の替わりに「=」、そして「$d, \int$ 」を使ったと考えられる。

2. 5 定積分の定義

2.5.1 定積分の定義の改善提案・交換法則の説明

2.3.4 における記号 d と $\int$ の間の「・」の存在、2.4.3 逆接線法の考察における「×」の存在から、定積分の記述 $\int_a^b f(x)dx$ において $f(x) \times dx$ と考えると、$f(x) \times dx$ は区分求積法の「微小区間における面積」という解釈と一致する。$\int$ については、和（ラテン語 summa）という意味だから「a から b までの総和を求めなさい」と解釈できる。

図 7　区分求積法



これらのことから、定積分の定義を下記のように改めることを提案する。

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x = \int_a^b \left(f(x) \times dx \right)$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{ただし、} \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \Delta x$$

$\int_a^b \left(f(x) \times dx \right)$ の意味は、微小差 dx と微小区間上の x での $f(x)$ をかけて面積を求め、カッコで閉じる。そしてインテグラルの元は和（ラテン語 summa）という意味だから「a から b までの総和を求めなさい」というものである。この後、×と( )を省略すれば、従来の式になる。

さて、積分の各記号を岡部恒治(2021, P. 202)にしたがって解釈すると、$\boxed{\int} f(x) \boxed{dx}$ のように「$\int$ がと $d \sim$ がペア」となる。「1　研究のねらい」で説明した「$F(y)$ と dy の間の交換法則」を成り立たたせるためには不合理がある。$\boxed{\int} \boxed{f(x)dx}$ のように「$\int$ と $f(x)dx$ がペア」と解釈すると、$f(x)$ と dx が一つの連結した式として表現されるので、交換法則が成り立つと仮定しても矛盾がない。

2. 5. 2「×」の性質・厳密化

$\int_a^b \left(f(x) \times dx \right)$ における「×」の性質につい

て考える。

置換積分は、

$$\int_a^b \left(f\left(x\right)\times dx \right) = \int_\alpha^\beta \left(f\left(g\left(t\right)\right)\times \frac{dx}{dt}\times dt \right)$$
$$= \int_\alpha^\beta f\left(g\left(t\right)\right)\frac{dx}{dt}dt$$

のように記述することができる。したがって、「×」は掛算と同じ性質がある。掛算の交換法則により、

$$\int_a^b \left(f\left(x\right)\times dx \right) = \int_a^b \left(dx\times f\left(x\right) \right)$$

が成り立つ。

さて、前節で、dx は微小差であると説明したが、「微小差の差とはどの程度か？」という疑問が生じる。これに対し、小数による記述にすれば小数点の後の０の個数は無限個であり、正確な微小差の値を特定することはできない。そのため、微小差とは極限値の考え方である。「×」は極限値を扱う掛算である。

2.5.3 定積分の記述方法において、「･」の記載がないことの考察

ライプニッツは固有三角形･変換定理の発見し、1675 年 10 月以降、つまり文献では Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.157)以降、d と $\int$ で記号化とその応用に取り組んだが、$\int$ と d の間に「･」「×」の記載はない。「･」「×」を省略したと考えられる。ライプニッツは、なぜ省略したか、という疑問が生じる。ところで、中村幸四郎(1999,P.202)に、ライプニッツは 1691 年の論文で、「ホイヘンスとそれからガリレオとデカルトとから多くのものを学んだ。」と記載がある。つまり、ライプニッツはデカルトの記述規則を踏襲したと考えられる。(デカルトの記述規則については、注釈 6 を参照)

2.6 微分の記号「－」の性質及び厳密化

「2.4.3 d と $\int$ の使い方の推移の考察」から、微分 $\dfrac{dy}{dx}$ において、微分の定義からわかるように、1 階微分のみ割算と同じ性質である。ただし極限値を扱う割算である。

2.7 $\int$ と $\sum$ の関係の調査及び考察

中村幸四郎(1999,P.212)に

いま，数列 $a, b, \cdots, z$ までの項の数が x であるとき

$$1+1+\cdots+1=x$$
$$1+2+3+\cdots=\sum x$$
$$1+1+2+1+2+3+\cdots=\sum\sum x \qquad 等$$

とおけば

$$a=x\cdot da-\sum x\cdot d^2a+\sum\sum x\cdot d^3a-\sum^3 x\cdot d^4a \qquad (3)$$

ライプニッツは「歴史と起源」では $\sum$ を和の記号 $\int$ で表わし，$\sum x$，$\sum\sum x$, $\sum^3 x$ の代りにそれぞれ

$$\int x, \quad \int\int x, \quad \int^3 x$$

を使っています．このようにするとき（3）に対応して

$$a-\omega=x\cdot da-\int x\cdot d^2a+\int\int x\cdot d^3a-\int^3 x\cdot d^4a+\text{etc.} \qquad (4)$$

ここで ω は最終項の意味です．またこの等式から，容易に次の式が導かれ

「ライプニッツは『歴史と起源』では $\sum$ を和の記号 $\int$ で表し」と記載があるので、ライプニッツは $\int$ を使う前は $\sum$ を使った、と解釈できる。一方、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999, P.314)に「記号 $d, \int$ は作っても $\Delta, \sum$ に相当する記号を持たず、『微分』『積分』をも differentia,summa と呼び続けようとしたライプニッツの『こだわり』を見るのは、誤りであろうか。」と著者の補足説明があることから、ライプニッツは記号 $\sum$ を使わなかったと解釈できる。そこで、それぞれの引用歴を調べ、$\sum$ の利用状況を調査する。

C.I.Gerhardt (1846,P.6)では、

et summam tertiam $\int^3 x$, et summam quartam $\int^4 x$. Hinc posito $1+1+1+1+1+$ etc. esse $=x$ seu x esse numeros naturales, quorum $dx=1$, tunc $1+3+6+10+$ etc. fit $=\int x$ et $1+4+10+20+$ etc. fit $=\int\int x$, et $1+5+15+35+$ etc. fit $=\int^3 x$, et ita porro. Unde tandem fit:

$$y-\omega=dy.x-ddy\int x+d^3y\int\int x-d^4y\int^3 x+\text{etc.}$$

と記載がある。明らかに $\sum$ の記載はない。

C.I.Gerhardt (1858, PP.397-398)では、

tiam $\int^3$x, et summam quartam $\int^4$x. Hinc posito 1 + 1 + 1 + 1 + etc. esse = x, seu x esse numeros naturales, quorum dx = 1, tunc

$$1+2+3+4+5 \text{ etc. fit} = \int x$$
$$\text{et } 1+3+6+10+ \text{ etc. fit} = \int\int x$$
$$\text{et } 1+4+10+20+ \text{ etc. fit} = \int^3 x$$
$$\text{et } 1+5+15+35+ \text{ etc.} = \int^4 x$$

398

et ita porro. Unde tandem fit:

$$y-\omega=dy.x-ddy.\int x+d^3y\int\int x-d^4y.\int^3 x+\text{etc.}$$

と記載がある。明らかに $\sum$ の記載はない。

Gottfried Wilhelm Leibniz (1999, PP.314-315)では、

d⁴y と呼んでよいであろう．そして，もう一方の数列の項を x と呼ぶならば，項の和は ∫x，和の和つまり第 2 の和は ∬x，第 3 の和は $\int^3 x$，第 4 の和は $\int^4 x$ と呼んでよいであろう．よって 1 + 1 + 1 + 1 + などが = x，つまり x は自然数で，それらの dx = 1 とおくならば，

1 + 2 + 3 + 4 + 5 など = ∫x

1 + 3 + 6 + 10 + など = ∬x

1 + 4 + 10 + 20 + など = $\int^3 x$

1 + 5 + 15 + 35 + など = $\int^4 x$

以下同様である．よって結局

$y - \omega = dy \cdot x - ddy \cdot \int x + d^3y \cdot \iint x - d^4y \cdot \int^3 x +$ など[40]

と記載がある。明らかに $\sum$ の記載はない。

したがって、ライプニッツが $\sum$ を使っていたと解釈するのは間違いと考えられる。中村幸四郎(1999,P.212)になぜ $\sum$ が記載されているかについては、読者に理解しやすくためと考える。

2.8 $\int$ の由来の調査及び考察

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.165)に「これはラテン語 summa（和）の頭文字Ｓの当時用いられていた書体である」と記載されていたので、当時の書体を調査する。

Leibniz Gottfried Wilhelm(1768,P.XII) の序文の中で、

ex vitâ Leibnitii a Dn. Jaucourt ſcripta.

と記載されている。言語はラテン語で、四角で囲った箇所は英語では「script」に相当すると考えられる。そして、$\int$ がたびたび使われていて、そのスペルがＳと考えられる。

ヨハン・ベルヌイはライプニッツと同時代の人で、ライプニッツと共に微積分の構築に貢献した。Johannis Bernoulli(1743,P. Ⅰ)の Epistola（手紙）が掲載されていて、その最初に

UOS inſcribere Philoſophis Veteres ſolebant Tractatus

と記載されている。四角で囲った箇所は英語では「inscribe」「philosophic」に相当すると考えられる。そして、同様に $\int$ がたびたび使われていて、そのスペルがＳと考えられる。

Pierre de Fermat(1679)では、特に序文の１ページ目に $\int$ が多用されていたが、解読できなかった。しかし、Pierre de Fermat (1679, P.130)に

Lettre de M. de Fermat à Meſsieurs de Paſcal & de Roberval.

と記載されている。四角で囲った箇所は明らかに、個人名 Pascal(パスカル)のことである。

René Descartes (1637, Lectori Benevolo S)では、

ſpecimina unà cū Philoſophiæ Prin-re, atque cætera ejus ſcripta hodie

と記載されている。四角で囲った箇所は明らかに英語では「philosophy」「script」に相当すると考えられる。

Leonhard Euler(1748,P.104)では、

ginariæ ad Sinus & Coſinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = cof.\, v + \sqrt{-1}.\, fin.\, v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = cof.\, v - \sqrt{-1}.\, fin.\, v.$

と記載されている。四角で囲った箇所は、オイラーの公式 $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v$ のことである、この式の中の Cos の s、Sin の s が縦に伸ばされている。

なお、それぞれ文献で、S が「すべて S」･「すべて $\int$ 」で記述されていたわけではなく、傾向として文字が斜体であれば $\int$ 、それ以外は S が使われていた。

積分の記号の由来は、「ライプニッツが summa の S を縦に伸ばして積分の記号を作った」とされている。しかし、そもそもラテン語において S を縦に伸ばす慣習があったことから、ライプニッツは当時の慣習にしたがって $\int$ としただけで、$\int$ はライプニッツの特別な創作ではないと考えられる。したがって、Gottfried Wilhelm Leibniz(1997,P.165)の記述は正しい。

2.9 大学で学ぶ積分の定義の調査及び考察

2.9.1 大学で学ぶ積分の定義の調査

重積分の定義

高木貞治(1975,PP.325-326)により紹介する。

xy 平面の閉矩形

$[K] = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$、において

$f(x, y)$ が有界。区間 $[a, b]$ を m 個、区間 c, d を n 個の区間に分割する。

$[\omega_{ij}] = \{(x, y) : x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\}$

面積 ω_{ij} は、$\omega_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

δ :すべての小矩形の最長辺

P_{ij} :小矩形 $[\omega_{ij}]$ 上の任意の点

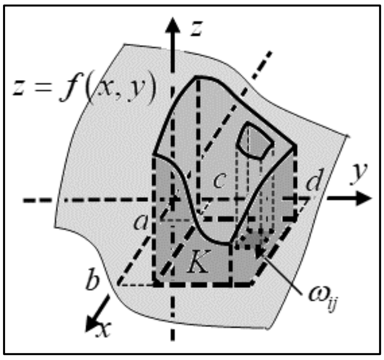
$\Sigma_\Delta = \sum f(P_{ij})\omega_{ij}, (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$

$m,n \to \infty$ とし、かつ $\delta \to 0$ のとき分割と P_{ij} の選択に無関係に Σ_{Δ} の極限値 I が存在するならば、

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_K f(P)\,d\omega$$

と表す。

図８　重積分



したがって、重積分の定義とは２次元の区分求積法である。

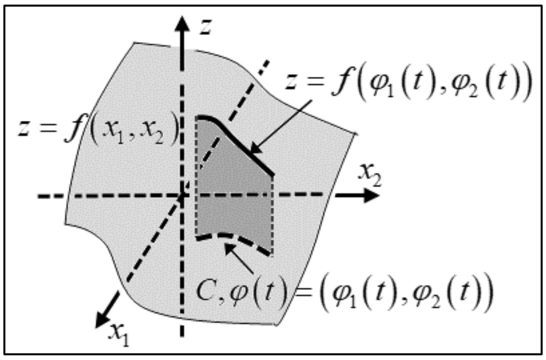
線積分の定義

相沢貞一(1975,P.623)により紹介する。

R^1 の区間 $a \le t \le b$ から R^n の中への連続写像 $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ が、向きづけられた曲線である。この像 C の近傍 U で定義された関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ に対する Riemann-Stieltjes 積分（詳細は、注釈７を参照）

$\int_a^b f(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\,d\varphi_i(t), i=1,\cdots,n$ を C に沿う f の x_i に関する線積分といい $\int_C f dx_i$ と表す。

図９　３次元の線積分



なお、Riemann-Stieltjes 積分とは、リーマン積分の区分求積法をさらに一般化した積分なので、線積分の定義とは区分求積法である。

面積分の定義

相沢貞一(1975,P.623)により紹介する。

R^m の領域 G から R^n $(m<n)$ の中への正則な C^1 級写像

$\xi(u) = (\xi_1(u_1,\cdot\cdot,u_m),\cdot\cdot,\xi_n(u_1,\cdot\cdot,u_m))$

による像を S とする。近傍 U で定義された関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ に対する重積分

$$\int\cdot\cdot\int_G f(\xi_1(u),\cdot\cdot,\xi_n(u))\frac{D(x_i,\cdot\cdot x_{i_m})}{D(u_1,\cdot\cdot,u_m)}du_1\cdot\cdot du_m$$

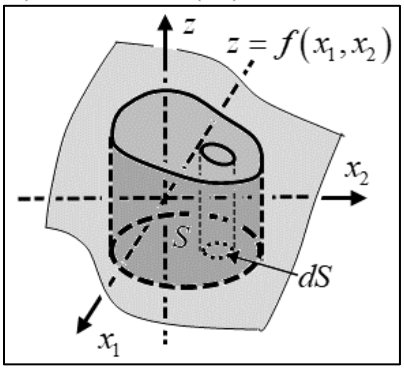
を、S に沿う f の $x_i,\cdot\cdot,x_{i_m}$ に関する面積分という。ヤコビアン $D(x_i,\cdot\cdot x_{i_m})/D(u_1,\cdot\cdot,u_m)$ を S の面積を表す量

$$\left(\sum_{i_1<\cdot\cdot<i_m}\left(D(x_i,\cdot\cdot x_{i_m})/D(u_1,\cdot\cdot,u_m)\right)^2\right)^{1/2}$$

で置き換えたとき、面素に関する面積分といって $\int_S f\,dS$ で表す。

図１０　３次元の面積分

（$\xi_1(u_1) = u_1 = x_1, \xi_2(u_2) = u_2 = x_2$ の場合）



この面積分とは、1 変数の Riemann-Stieltjes 積分を多変数に拡張したものであるから、定義とは多変数の区分求積法である。面素 dS とは、微小領域の面積（体積）を表す。

複素積分の定義

能代清(1977,PP48-49) により紹介する。

複素平面上の二点 α,β を結ぶ正則曲線

$C: Z(t) = x(t) + iy(t)$

ただし、$a \le t \le b, z(a) = \alpha, z(b) = \beta$

複素関数 $w = f(z)$ が C 上で連続

区間 $[a,b]$ を $a = t_0 < t_1 < \cdot\cdot < t_n = b$ と分割

$z_\nu' \in [z_{\nu-1}, z_\nu]$

小区間の幅を０に近づけ、

$$S=\sum_{\nu=1}^{n} f\left(z_\nu'\right)\left(z_\nu - z_{\nu-1}\right)$$

が一定の極限値Aに近づくとき、
$A=\int_C f(z)dz$ と表す。

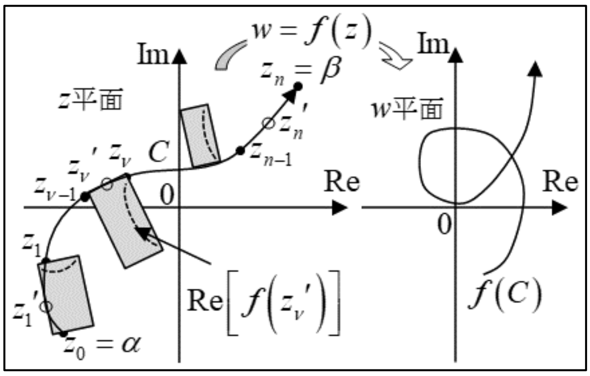


図１１　複素積分
（図中の　は実部のみの区分求積法）

したがって、複素積分の定義とは複素平面上の区分求積法である。

ベクトル関数の積分の定義

沢木澄男(1976,P51)より紹介する。

$\boldsymbol{A}(t): a\le t\le b$ で定義されたベクトル関数

$$\boldsymbol{A}(t)=a_1(t)\boldsymbol{i}+a_2(t)\boldsymbol{j}+a_3(t)\boldsymbol{k}$$

$[a,b]$ の定積分を

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt=\left(\int_a^b a_1(t)\,dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_a^b a_2(t)\,dt\right)\boldsymbol{j}+\left(\int_a^b a_3(t)\,dt\right)\boldsymbol{k}$$

で定義する。

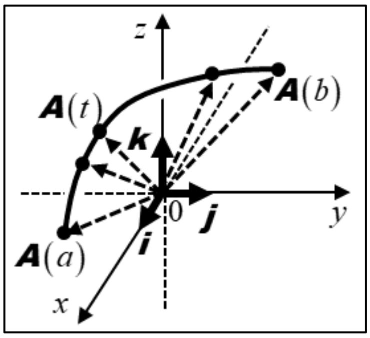


図１２　ベクトル関数の積分

右辺の各定積分 $\int_a^b a_\nu(t)\,dt,(\nu=1,2,3)$ の $a_\nu(t)$ は１変数の実数値関数なので、定積分 $\int_a^b a_\nu(t)\,dt$ の定義は区分求積法である。したがって、ベクトル関数の積分の定義とは区分求積法である。

ルベーグ積分の定義

伊藤清三(1977, PP. 73-74)より紹介する。

空間 X 、$\sigma-$加法族$\mathcal{B}$、$\mathcal{B}$上の測度μ、$f(x)\ge 0$ で単関数のとき

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j \chi_{E_j}(x)$$

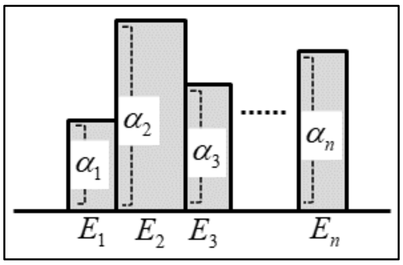
$$\text{ただし}\begin{cases} E=E_0+E_1+\cdots+E_n \\ \alpha_0=0 \\ \alpha_j>0\,(j\ge 1)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in E_j \to \chi_{E_j}(x)=1 \\ x\notin E_j \to \chi_{E_j}(x)=0\end{cases}$$

と表される。$f(x)$の積分を、

$\int_E f\,d\mu=\sum_{J=1}^{n}\alpha_j\mu\left(E_j\right)$ と定義する。

図１３　ルベーグ積分



ルベーグ積分の基本的な定義に、極限値という概念はないが、階段関数に対し区分求積法と同じ考え方で積分を定義している。極限という概念は別途定めている。ところで、右辺の$\mu\left(E_j\right)$とは集合の測度のことで、区間の幅を一般化した概念であるが、測度差のことではない。さらに、ここでは$\mu\left(E_j\right)\to 0$という極限値の考え方はない。

2.9.2 大学で学ぶ積分の考察

定積分の定義の中の$\int_a^b\left(f(x)\times dx\right)$同様、大学で学ぶさまざまな積分の定義においても$(\ )$や「×」を含むと考えられる。

ところで、dxを「微小差」と説明した。ライプニッツが differentia（差）の頭文字dを採用したことからもわかる。同様に、重積分$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$・線積分$\int_C f dx_i$・複素積分

$\int_C f(z)dz$ ・ベクトル関数の積分 $\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt$ において、d ~を「区間の微小差」と解釈できる。しかし、重積分 $I=\int_K f(P)\,d\omega$ の $d\omega$・面積分 $\int_S f\,dS$ の dS は「微小領域の面積（体積）」を表すもので、「微小差」ではない。「微小領域の長さ・面積（体積）を表す『記号』」と解釈すべきである。

高校で学ぶ積分、そして大学で学ぶ積分の重積分〜ベクトル関数の積分は、すべてリーマン積分である。ルベーグ積分の定義は、リーマン積分の定義と違うので、下記のように別解釈が必要である。

（ルベーグ積分の表記方法の提案）

ルベーグ積分における基本的関数、$f(x)\geq 0$ で単関数の場合の定義とは、有限の区分求積法である。定義の式 $\sum_{J=1}^{n}\alpha_j\mu\left(E_j\right)$ の $\alpha_j\mu\left(E_j\right)$ とは $\alpha_j\times\mu\left(E_j\right)$ のことなので、

$$\sum_{J=1}^{n}\alpha_j\mu\left(E_j\right)=\int_E\left(f\times d\mu\right)=\int_E f\,d\mu$$

と表記するのが妥当である。

2.10 積分の計算方法の調査及び考察

2.10.1 高校で学ぶ積分の計算方法の調査

高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）において、積分法の指導方法は、「高校の数学の授業において、積分の基本的性質・計算方法・応用を指導する」としている。そして現代の高校で学ぶ積分の指導方法には、２つの方法がある。

① 微分の逆演算

二澤善紀(2012,P.69) に「微分の逆演算とし積分（不定積分）を定義する方法で説明するようになり、現在に至っている」と記載がある。この逆演算という方法により、積分の基本的性質・計算方法・応用を指導している。

② 区分求積法

二澤善紀(2012, P.70)に「現行の学習指導要領では区分求積法は数列の和の極限を求め　る計算問題扱いとなっている傾向にある」と記載がある。つまり、具体的関数に区分求積法を適用し、数列の和の極限値を計算し、その値が正しい面積値になることを生徒に確認させている。

2.10.2 高校で学ぶ積分の計算方法の考察

「2.4.1 d と $\int$ の使い方の推移」の「1675 年 10 月求積解析③」で、「この箇所で $\int$ と d の逆関係が数学史上初めて明確に述べられた。」により、「微分の逆演算」は、歴史的な事実と一致している。

William Dunham（2009,PP.95-114）より、$\lim_{\delta\to 0}\sum f\left(\xi_i\right)\delta_i=\int_a^b f(x)\,dx$ の右辺の積分が存在するかどうかの必要十分条件を説明するために左辺の式を作った。左辺のことを区分求積法と言うのは周知の事実である。ただし、「この方法で積分を計算しなさい」とは記載されていない。区分求積法で計算する方法は、数列・極限の勉強のためにはいいだろうが、歴史的には要求されていない方法である。

2.10.3 大学で学ぶ積分の計算方法について

大学で学ぶ積分の中で、定義がリーマン積分となる場合、具体的な関数の積分の計算方法は、変数を置き換え（置換積分）し微分の逆演算をする方法である。特に複素関数の場合、微分の逆演算の方法を省略し、留数による計算方法もある（詳細は、注釈８を参照）。

ルベーグ積分については、定義方法が違うので、計算方法の調査の対象にはしない。

2.10.4 ライプニッツの考える積分の計算方法について

「2.4.1 d と $\int$ の使い方の推移」の「１６７６年７月　逆接線法」の中の式

「$\dfrac{d\overline{x}}{d\overline{y}}\sqcap\dfrac{n}{y-x}$

$d\overline{x}y-xd\overline{x}\sqcap d\overline{y}n$

$\int d\overline{x}y-\int\overline{xd\overline{x}}\sqcap n\int d\overline{y}$」

において、式の変換理由の説明はない。当然、積分の記号 $\int$ と d との組み合わせの由来があることも記載されていない。

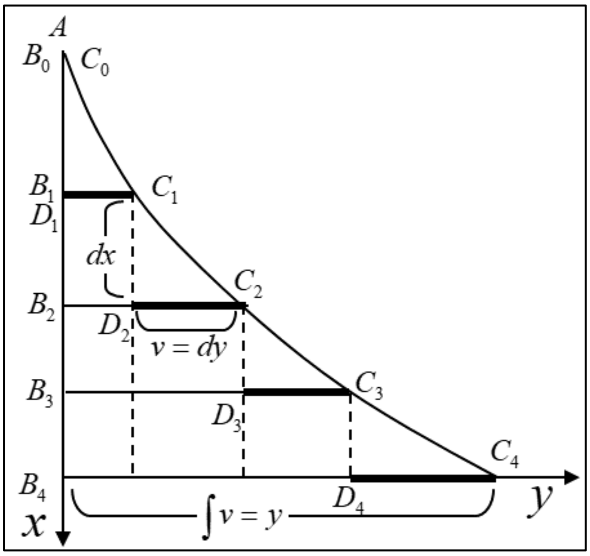
Gottfried Wilhelm Leibniz（1997,PP.37-38）に、ライプニッツは「微分計算と積分計算が逆である」と考えたことが記載されている。このことにより、ライプニッツは積分を定義というよりも「微分の逆演算」という性質で考えた。この考えの理由を簡単に説明すると、

$$B_1C_1+D_2C_2+D_3C_3+D_4C_4=B_4C_4=y$$

微分（微小差）dy の積分（総和）が y となるの

で、$\int dy = y$ が成り立つ。「y の間の微分の積分は端の y 自身に戻る」と記載されている。この式を現代風に表記すると、$\int \frac{dy}{dx} dx = y$ のことである。

図１４　微分と積分との関係



この説明を文献では２ページ使っている。このことから、ライプニッツは一般関数の積分の計算方法が「微分の逆演算」ということを重要視したと考えられる。

ところで、「2.4.3　d と $\int$　の使い方の推移の考察」の「１６７６年７月　逆接線法の考察」で、積分の記号の $d\bar{x}\times y$ の由来は「線分の太さ×線分の長さ」と指摘した。このことから、dx とは線分の太さになるのだが、上記図により、ライプニッツは dx のことを「微小区間の幅」に解釈を変えたと考えられる。

2.10.4 積分の計算方法の考察

「2.10.2　高校で学ぶ積分の計算方法の考察」、「2.10.3 大学で学ぶ積分の計算方法について」、「2.10.4 ライプニッツの考える積分の計算方法について」、より、積分の計算方法は、区分求積法ではなく微分の逆演算と解釈すべきである。

2.11 不定積分の記号の意味の調査及び考察

2.11.1 高等学校学習指導要領おける不定積分の扱いの調査

新海寛(1981)では、「３５年指導要領以降、不定積分は中心概念になった。・・『積分は微分の逆の演算』というところに重点が置かれるようになり、・・」と記載されている。詳しく調べると、高等学校学習指導要領（昭和 33 年 3 月再訂版）数学科編において、タイトルだけを抜粋すると、

表３　昭和 33 年　高等学校学習指導要領

「数学Ⅲ
C 積分
長さ・面積・体積などの量が・・
⑴面積・体積・道のりなどの概念・・
⑵定積分の意味・・
⑶不定積分の意味・・
⑷積分が微分の逆の操作・・」

と掲載されていて、定積分・不定積分の順に学ぶ指導になっている。高等学校学習指導要領（昭和 35 年 10 月施行）数学において、タイトルだけを抜粋すると、

表４　昭和 35 年　高等学校学習指導要領

「数学ⅡA
⑷微分法と積分法
ア導関数とその計算
イ導関数の簡単な応用
ウ不定積分とその計算
エ定積分とその簡単な応用」
「数学ⅡB
⑹積分法
不定積分や定積分の概念を理解させ、・・」

と記載されていて、不定積分・定積分の順に学ぶ指導になっている。

３５年指導要領以降、不定積分の指導が定積分の前にきて、不定積分が積分全般において最初に学ぶ項目になったこと、さらに不定積分の学習が数学ⅢからⅡA・ⅡB に繰り上がったことで重要性が増したことがわかる。

2.11.2 日本及び海外における不定積分の記号の意味の調査

日本の教科書では、不定積分の記号の意味は、岡部恒治(2021, P.202)に記載されているとおりである。

Raymond (2016, P.4)では、「記号 $\int$　を積分記号とよび、関数 $f(x)$ を被積分関数とよぶ。記号 dx は変数 x について微分の逆操作が行われることを示す。」、同書籍の Raymond (2016, P.148)では、「積分 $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx, \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$ の

ことを逐次積分といい、dx と dy の順番が積分の順序を示す。」と記載されている。

Raymond (2016)の原書 Raymond(2015)を調査した。Raymond (2015, P.735)では、「The symbol $\int$ is called an integral sign, and the function $f(x)$ is called the integrand. The symbol dx indicates that the anti-differentiation is performed with respect to the variable x.」Raymond (2015, P.887)では、「The integrals

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx, \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

are referred to as iterated integrals, and the order in which dx and dy are written indicates the order of integration.」と記載されている。

つまり、Raymond (2016)とその原書である Raymond (2015)において、不定積分の記号の意味は同じである。

この他に、高橋哲男(1998)では中国の教科書が和訳されて紹介されており、高橋哲男(1998, P.83)に「$\int$ を積分記号、・・、x を積分変数」と記載されている。S.K.Chung (2014)とは University of Hong Kong の講義で使われた書籍で、S.K.Chung (2014,P.168)に「indefinite integral of f (with respect to x)」と記載されている。

このことは、日本における不定積分の記号の意味は、日本独自の解釈ではなく海外においても同じである。

2.11.3 不定積分の記号の意味の提案

ライプニッツによる積分の記号 $\int f(x)dx$ 、成立ちは、2.4.3 逆接線法の考察における「×」の存在から、$\int(f(x)\times dx)=\int f(x)dx$ となったことがわかる。$\int(f(x)\times dx)$ の示す意味は、区分求積法と同じである。しかし、ライプニッツが積分の計算方法を微分の逆演算として扱ったこと、「2.10 積分の計算方法の調査及び考察」から、ほとんどの積分の計算方法が微分の逆演算ということから、不定積分において、記号 $\int$ を「積分記号」・関数 $f(x)$ を「被積分関数」・記号 dx の変数 x を「積分変数」と呼ぶことについては妥当と考える。

3 研究のまとめ

本研究では、定積分の定義

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

において、左辺の Δx と右辺の dx の間に解釈の違いがあるという問題意識をもとに、ライプニッツの功績を調査した。その結果、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997)・Gottfried Wilhelm Leibniz (1999)による示唆から、定積分の定義に $\int_a^b(f(x)\times dx)$ という式を入れることにより、$\int_a^b f(x)dx$ に区分求積法という積分本来の意味が含まれることが理解できた。

この表記法を拡張すると、下記の展開ができた。

- $f(x)$ と dx との間に演算「×」があるので、交換法則が成立つ。ただし、「×」とは極限値を扱う掛算である。
- ライプニッツの考えた $\dfrac{dy}{dx}$ が理解できた。
- ライプニッツは $\sum$ を使わなかった。
- 記号 $\int$ は積分を表す記号だが、特別に作った記号ではない。
- 大学で学ぶ積分も含めて、「d ～」の解釈が統一できた。
- 積分の計算方法は、微分の逆演算であって区分求積法ではない。
- 不定積分の各記号の呼び名の妥当性が理解できた。

4 注釈

4.1 注釈１、定積分の厳密な定義

高木貞治(1975,PP.91-97)より紹介する。

区間 $[a,b]$ において $f(x)$ を有界な実数値関数とする。区間を n 個の区間に分割する。

$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

$1\le i\le n$ として $\delta_i=x_i-x_{i-1}$

$\delta=\max\limits_{1\le i\le n}\delta_i$

ξ_i : 区間 $[x_{i-1},x_i]$ 上の任意の点

$$\Sigma_\Delta=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i$$

とする。

$n \to \infty$ とし、かつ $\delta \to 0$ のとき分割 Δ と ξ_i の選択に無関係に Σ_Δ の極限値が存在するならば、その極限値を区間 $[a,b]$ における $f(x)$ の定積分といい、記号で $\int_a^b f(x)dx$ と表す。したがって、定積分を記号で表記すると、

$\lim_{\delta \to 0} \sum f(\xi_i)\delta_i = \int_a^b f(x)dx$ となる。

4.2 注釈２、リーマン積分の説明

William Dunham (2009,PP.95-114)より紹介する。

振動する弦・発散する熱等の理論の発展に寄与したフーリエ級数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{n\pi x}{a} + b_k \sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

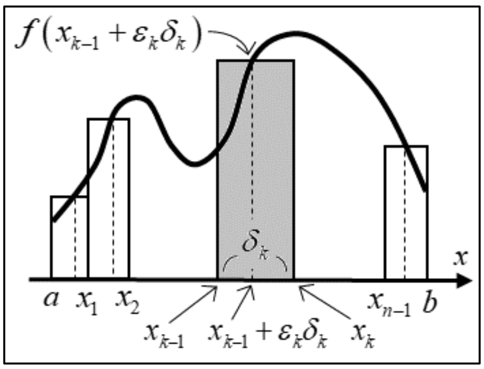
において、どのような $f(x)$ が積分可能であるかの問題があった。リーマンは 1854 年の教授資格請求論文で上記問題を解決した。この解決方法を現代風にいうと区分求積法である。

リーマン積分の定義を紹介する。リーマン和

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

において、δ_k と ε_k をいかように取っても、δ_k が無限に小さくなるとき、この和がある一定の値に近づくなら、この一定の値を $\int_a^b f(x)dx$ と表す。

図１５　区分求積法



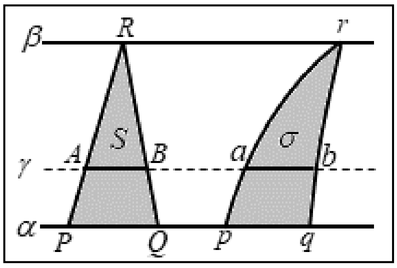
この定義に基づき、積分可能の必要十分条件が証明された。

4.3 注釈 3、不可分法の説明

4.3.1 不可分法の定義

中村幸四郎(1999,P.103)より紹介する。カヴァリエリの原理とも言われる。「二つの平行線 α, β の間にはさまれた面積 S と σ において、基準線 α に平行にひいた平行線からつねに等しい線分 $[AB = ab]$ が切り取られるならば、面積 S と σ とは等しい」という定義である。

図１６　不可分法の定義



この定義は、２つの図形で、ある特定の条件の線分が等しいならば２つの図形の面積は等しい、という意味である。不可分法では、面積の算出が難しい場合、算出できる図形に変換し、面積を算出した。図形ごとに変換方法があり、汎用性がないのは当然である。

4.3.2 不可分法の例

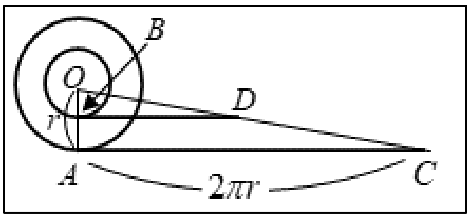
V.A.ニキフェロフスキー(1993,P.60)より紹介する。問題は円の面積を求めることである。発見者は、真空の実験で有名なトリチェリである。

円上の点の接線を $AC = 2\pi r$ まで延長する。直角三角形 OAC を作る。OA 上の任意の点 B において、

点 B における円周の長さ $= BD$

なので、円と直角三角形 OAC は不可分である。円と直角三角形 OAC の面積は等しい。直角三角形の面積は πr^2 なので、円の面積は πr^2 である。

図１７　円と直角三角形



4.4 注釈４、除法の±,∓について、負の数の扱いについて

負の数の扱いを歴史的に述べる場合、さまざまな数学者の貢献があるため、ここですべてを述べることはできない。所持している文献から抜粋する。

当時の作図問題では、長さ・面積・体積は正の数のみを扱うため、たとえば長さ３の線分から１の線分を取ることは$3-1=2$に帰着するが、逆に１の線分から３の線分を取ることができないため、$1-3=?$から計算される値は「無意味なもの」として扱われた。

本論文「2.4.1 d と$\int$ の使い方の推移、1684年10月　微分算の論文」の$d\dfrac{v}{y}=\dfrac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$の$\mp,\pm$について、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.297)に「今日では$d\left(\dfrac{v}{y}\right)=\dfrac{ydv-vdy}{y^2}$とするところであるがここで複合が付けられているのは縦線・横線ともに正の値のみを考えていたからである」と記載されている。これを現代風に言うと、縦線・横線の交差する点（原点）の下側・左側であっても正の数と扱う、ということである。同ページの Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.297)に「$+z$の代わりに$+dz$、$-z$の代わりに$-dz$と書かれるが」と記載されている。つまり、たとえば

$dz=\dfrac{ydv-vdy}{y^2}$において右辺が負の場合、$-dz=\dfrac{-ydv+vdy}{y^2}$と記述するということである。Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.299)に「ここで複合は自乗されると＋を、逆の複合を乗ぜられるとーを示し」と、同ページの注釈に「$(+)\times(+)=(-)\times(-)=(+)$,

$(+)\times(-)=(-)\times(+)=(-)$」

と記載されている。このことにより、ライプニッツは負の数に関する演算規則を獲得していたことになる。さらに、この後の 1690 年、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.54-56)に「減法が通用しないときは負の数が生じる。」、$0<a<b, 0<c$という条件で、「$a-b$があって$a=b-c$と置いたならば、$a-b$が$-c$に等しくなることは明らかである。」と記載されている。これらのことから、ライプニッツは負の数を、その記号として「ー」を使うこと認めたが、変数は正の数のみを表すものとして扱ったと考えられる。

小杉肇(1980,PP.129-130)に、Jean Robert Argand(1768-1822)の虚数・負の数の幾何学的表示に「+1 と-1 とが一点 O から反対の方向に引かれた単位の線分」と記載されている。これが負の数の最初の承認と考えられる。

4.5 注釈 5、代数式・超越的な式について

ライプニッツ以前、$y=x^p$（pは-1 以外の有理数）の描く曲線の下部の面積はすでに複数の数学者により計算されている。カヴァリエリは V.A.ニキフェロフスキー(1993, PP.47-58)に、フェルマーは Car B.Boyer (1998,PP.120-122)に、ウォリスは V.A.ニキフェロフスキー(1993, PP.95-106)に記載されている。これらの数学者は、代数式以外の個別図形の面積も計算しているが、式及び演算の一般化はしていない。

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.332)に、超越的の意味が記載されていて、「円の求積曲線が代数曲線で有りえない」とある。これは、$\sqrt{2x-x^2}$のような根号式を含む式の積分は$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots$という形で表現できない、という意味である。つまり超越的な式とは、$\sqrt{2x-x^2}$のような根号式を含む代数式のことである。三角関数・指数関数等の積分については、ライプニッツ以降の数学者によるものである。

4.6 注釈６、デカルトの功績

René Descartes(1978,P.3)の冒頭に「幾何学のすべての問題は、いくつかの直線の長ささえ知れば作図しうるような諸項へと、容易に分解することができる」とある。デカルトの数学とは、作図問題を数式化することによる幾何学のことである。デカルト(1596-1650)は、変数や演算の記号の記述規則を作り、さらにそれらによる新しい代数学を作った。René Descartes (1978,P.4) で、「幾何学における記号の用い方として、$a+b$, $a-b$, ab, $\dfrac{a}{b}$, a^2, a^3, $\sqrt{a^2+b^2}$と書く」と記載されている。乗法においては「･」や「×」の記載はない。

4.7 注釈７、Riemann-Stieltjes 積分について

相沢貞一(1975,P.622)により紹介する。

$f(x), \alpha(x):[a,b]$で定義された、実数値の有

界函数

$[a,b]$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ と分割

$\alpha(x)$ に関する Riemann 和、

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)), \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

を作る。$\max(x_{i+1} - x_i) \to 0$ のとき、Riemann 和が一定値に収束すれば、$\int_a^b f(d)\, d\alpha(x)$ で表す。

4.8 注釈８、留数による定積分の計算

相沢貞一(1975,P.579)により紹介する

複素平面上で定義された関数 $f(z)$ の Laurent 展開において、$(z-a)^{-1}$ の係数 c_{-1} を a における $f(z)$ の留数といい、$\mathrm{Res}[f]_a$ または $R(a)$ と表す。

$$R(a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\varsigma - a| = r} f(\varsigma)\, d\varsigma$$

$0 < r < R$ で、積分路は演習を正の向きに 1 周する。式を変換すると、

$$\int_{|\varsigma - a| = r} f(\varsigma)\, d\varsigma = 2\pi i R(a) = 2\pi i c_{-1}$$

となる。

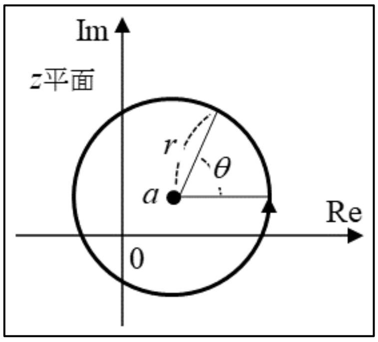
証明の概要を説明する。

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k (z-a)^k$$

$\varsigma = a + e^{i\theta}$ とおく。$\dfrac{d\varsigma}{d\theta} = ie^{i\theta}$

$$\begin{aligned}\int_{|\varsigma - a| = r} f(\varsigma)\, d\varsigma &= \sum_{k \neq -1} \int_{|\varsigma - a| = r} c_k (\varsigma - a)^k\, d\varsigma \\ &\quad + \int_{|\varsigma - a| = r} c_{-1} (\varsigma - a)^{-1}\, d\varsigma \\ &= \sum_{k \neq -1} \int_0^{2\pi} c_k e^{ik\theta} \cdot ie^{i\theta} d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{c_{-1}}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta \\ &= ic_{-1} [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i c_{-1}\end{aligned}$$

図１８　z 平面上の積分路



このことにより、複素関数の閉曲線での積分値は、微分の逆演算式が消え、留数によってのみ定まることがわかる。

引用・参考文献

Annales de chimie et de physique, tome3, 1816
https://iris.univ-lille.fr/bitstream/handle/1908/1420/CP78_03.pdf?sequence=3
閲覧 2023/4/30

Car B.Boyer,
加賀美鐵雄,浦野由有(訳),
数学の歴史３,朝倉書店,1998

C.I.Gerhardt,
Historia et origo calculi differentialis,
https://archive.org/details/historiaetorigo00gerhgoog/page/n68/mode/2up,
1846,閲覧 2021/5/14

C.I.Gerhardt,
Leibnizens Mathematische Schriften,
Wentworth Press,1858

Gottfried Wilhelm Leibniz,
原享吉,佐々木力,三浦伸夫,馬場郁,斎藤憲,安藤正人,倉田隆(訳),
ライプニッツ著作集２数学論・数学,工作舎,
1997

Gottfried Wilhelm Leibniz,
原享吉,横山雅彦,三浦伸夫,馬場郁,倉田隆,長島秀男,西敬尚(訳),
ライプニッツ著作集３数学・自然学,工作舎,
1999

Gottfried Wilhelm Leibniz, Freiherr von ,Frères de Tournes ,
Gothofredi Guillelmi Leibnitii... Opera omnia
1768,
https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/43555/SC_05909.pdf?sequence=1&isAllowed=y
閲覧 2023/04/08

Johannis Bernoulli,
Johannis Bernoulli Opera Omnia tomus primus,
1743
https://uvadoc.uva.es/handle/10324/49380
https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/49380/SC_07280.pdf?sequence=1&isAllowed=y
閲覧 2023/03/26

Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅧ5,
https://www.gwlb.de/fileadmin/Leibniz/
repositorium-des-leibniz-archivs/
LAA-BdVII5-komplett-20211130.zip,
閲覧 2022/02/21
Leonhard Euler,
Introductio in analysin infinitorum, volume 1,
1748,
https://scholarlycommons.pacific.edu/
euler-works/101/,
閲覧 2023/11/30
Pierre de Fermat,
Varia opera mathemativa, Tolosae 1679,
https://dn790006.ca.archive.org/0/items/
variaoperamathe00ferm/
variaoperamathe00ferm.pdf
閲覧 2023/06/19
Raymond A.Barnett, Michael R.Ziegler,
Larl E.Byleen,
College Mathematics(for Business, Economics,
Life Sciences, and Social Sciences),
https://oiipdf.com/college-mathematics,
2015,閲覧 2022/06/22
Raymond A.Barnett, Michael R.Ziegler,
Larl E.Byleen,
柳沼壽(訳),
College Mathematics(for Business, Economics,
Life Sciences, and Social Sciences),
初歩からの数学Ⅴ 微積分〈下〉,
丸善出版, 2016
René Descartes,
Geometria a Renato Des Cartes anno 1637,
（方法序説（幾何学））,
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/
btv1b8601510z/
1637,閲覧 2023/7/25
René Descartes,
三宅徳嘉,小池健男,青木靖三,水野和久,赤木昭三,
原享吉(訳),
デカルト著作集Ⅰ（幾何学）,白水社,1978
S.K.Chung,
Understanding Basic Calculus,
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~richard/
teaching/f2016/BasicCalculus.pdf
2014,閲覧 2022/12/9
（注：出版年は
https://books.google.co.jp/books/about/
Understanding_Basic_Calculus.html?id=
l8rmrQEACAAJ&redir_esc=y
を参照）
V.A.ニキフェロフスキー,
馬場良和(訳)
積分の歴史
(アルキメデスからコーシー、リーマンまで)
現代数学社,1993
William Dunham,
一樂重雄,實川敏明(訳),
微積分名作ギャラリー,日本評論社,2009
相沢貞一 他 348 名,数学辞典 第 2 版,岩波出版,1975
伊藤清三,ルベーグ積分入門,裳華房,1977
岡部恒治,阿原一志,市原一裕,井原俊輔,大矢雅則,落合豊行,戸瀬信之,中村八束,本橋信義,森田純,八木克己,吉田正章,加藤春紀,舘麻由美,西牧守,山本圭子,吉地佳弘, 数研出版編集部,
高等学校数学Ⅲ,数研出版,2021
小川束,上野健爾,岡本哲治郎,河野貴美子,野崎昭浩,藤井將男,藤本トモエ,逸見由紀子,宮永望,吉田宇一
数学文化 No.33,日本評論社,P.63,2020
高等学校学習指導要領（昭和 33 年 3 月再訂版）
数学科編数学Ⅲ,
https://erid.nier.go.jp/files/COFS/s32hm2/
chap5.htm,
閲覧 2022/06/29
高等学校学習指導要領（昭和 35 年 10 月施行）数学,
https://erid.nier.go.jp/files/COFS/s35h/
chap2-3.htm,
閲覧 2022/06/29
高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 理数編,
東京書籍, P.118,2019
小杉肇,数学史（数と方程式）,槇書店,1980
沢木澄男,ベクトル解析,裳華房,1976
新海寛,高等学校の教科書に見られる「積分導入法」の問題について,数学教育学会研究紀要,
Vol.22,No,1-2,P.55,1981
高木貞治,解析概論,岩波書店,1975
高橋哲男, 中国数学教科書「微積分初歩」の検討,
https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/
bitstream/2115/13607/1/15_p71-94.pdf
1998,閲覧 2022/12/8
中村幸四郎,近世数学の歴史,日本評論社,1999
二澤善紀,渡邊伸樹,数学教育学会誌,
Vol.52,No.3･4,
2012
能代清,初等函数論,培風館,1977
林知宏, 無限小解析学をめぐる先取権論争,
https://glim-re.repo.nii.ac.jp/records/1247,
2012,閲覧 2021/9/19
福田安蔵,鈴木七緒,安岡善則,黒崎千代子
微積分演習Ⅱ,共立出版,1976