Note

定積分の定義の研究

－定積分の定義に論理的な解釈を加え、理解しやすくするための提案－

The Study of the definition of the definite integral

－A suggestion for the definition of the definite integral to use a logical interpretation for easier understanding－

鈴木　啓一*

概要：高校の数学の授業において、積分の基本的性質・計算方法・応用を学習する。しかしながら、積分の記号の成り立ちまでは学ばないため、定積分の記号の意味を十分理解できなかったり、誤解してしまうケースがある。本論文では、ライプニッツの積分の考え方を元にした定積分の定義の考え方を提案する。この考え方に基づくと、定積分の記号の意味が理解しやすくなり、大学で習うさまざまな積分の記号の意味が理解できる。

検索語：定積分の定義、記号の意味、ライプニッツ、インテグラル

Abstract: In high school math classes, students learn the basic properties, calculation methods, and applications of integrals. However, since they do not learn the origin of integral symbols, there are cases that the meaning of the symbol of the definite integral is not fully understood or is misunderstood. This paper proposes an approach of Leibniz's concept to the definition of the definite integral. By using this idea, the meaning of the symbols of the definite integral becomes easier to understand, and the meaning of the symbols of the various integrals learned in college can be understood.

Keywords: The definition of the definite integral, The meaning of signs, Leibniz, Integrals

1　研究のねらい

区分求積法による定積分の定義は、高校の数Ⅲでは岡部恒治(2021)によると、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

ただし、$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}, x_k=a+k\Delta x$

とされている。高等学校学習指導要領(平成 30 年)において、積分法の指導方法は、「高校の数学の授業において、積分の基本的性質・計算方法・応用を指導する」としている。しかし、積分の記号の意味・由来を教えることは必須となっておらず、実際に授業で取り扱わないことが多い。

ところで、定積分の定義をよく見ると、左辺と右辺の表現方法にギャップがあることがわかる。「=」を定義という意味で解釈することも可能だが、方程式の「=」という意味で解釈するならば、「左辺=右辺」となる演算規則に相当する規則が説明できない。つまり、

「$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x$ がある規則により $\int_a^b f\left(x\right)dx$ となる」という説明ができない。

右辺の $\int_a^b f\left(x\right)dx$ という表現は、ライプニッツのより作られた。詳しくは、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,PP.165-166)によると「1675 年、数学史上初めて求積に記号 $\int$ が導入された」という記載がある。ただし、積分区間の含んだ記号 $\int_a^b$ ではなく $\int$ という記号である。この記号は、不定積分ではなく、積分区

＊ Keiichi SUZUKI
山形県高畠町

間が$\left[0,x\right]$のみの定積分である。

左辺の$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x$という式は、William Dunham (2009)のリーマン和、

$$S=\delta_1 f\left(a+\varepsilon_1\delta_1\right)+\delta_2 f\left(x_1+\varepsilon_2\delta_2\right)+\cdots$$
$$+\delta_n f\left(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n\right)$$

を簡略化したものである。そこで、両辺の間の演算規則に相当する規則を見出すため、ライプニッツの功績を調査し、積分の記号の由来を調べることにした。本研究では、ラプニッツの功績を説明しつつ、そこから示唆される定積分の定義についての考え方を提案する。

さらに、大学ではさまざまな積分を学ぶ。その中で、福田安蔵(1976)では、Dが有界で$f\left(x,y\right)$が連続のとき、

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy=\int_c^d\left\{\int_a^b f\left(x,y\right)\right\}dy$$
$$=\int_c^d dy\int_a^b f\left(x,y\right)dx$$

、と重積分が紹介されている。

ここで$\int_a^b f\left(x,y\right)dx=F\left(y\right)$とおくと、

$\int_c^d F\left(y\right)dy=\int_c^d dyF\left(y\right)$が成り立つ。この式において、$F\left(y\right)dy$と$dyF\left(y\right)$は同じ意味となるから、$F\left(y\right)$と$dy$の間で交換法則が成り立つことになる。実際に具体的な関数$f\left(x,y\right)$が与えられたとき、$\int_c^d\left\{\int_a^b f\left(x,y\right)\right\}dy$の計算方法と$\int_c^d dy\int_a^b f\left(x,y\right)dx$の計算方法が同じであることからも交換法則が成り立つことになる。そこで本研究では、交換法則が成り立つ根拠も提案する。

2　研究の内容（ライプニッツの功績調査）

2.1 功績の概要

中村幸四郎(1999,PP.209-242)よると、ライプニッツの功績の概要は下記のようになる。

１６６６年

学位論文「結合法の理論」・「歴史と起源」を発表。記号dと$\int$を作る。ただし、差・和の記号であって、微積分の意味はない。

１６７３年

固有三角形による変換定理を発見。関数の接線と、接線から定義できる面積関数の存在を示した。この後、接線・求積のための記号としてdと$\int$を使い始めた。ただ、使い方に試行錯誤があった。

１６８４年

微分算の論文を発表。題名「極大・極小および接線の新方法、分数あるいは無理量によって妨げられない…」

１６８６年

積分算の論文を発表。題名「深奥な数学…不可分量あるいは無限小量の解析について」

2.2 学位論文の紹介、及び考察

2.2.1 学位論文の紹介１

「結合法の理論」・「歴史と起源」の中で、初めて記号dと$\int$が使われた部分について、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,PP.310-315)から紹介する。

無限の減少数列$\left\{a,b,c,d,e,\cdots\right\}$最終項を$\omega$とする。各項と階差を下記表１のようにする。

表１　各項と階差

項	a	b	c	d	e	$\cdots$	ω
第1の差	f	g	h	i		$\cdots$	
第2の差	l	m	n	o		$\cdots$	
第3の差	q	r	s			$\cdots$	
第4の差	β	γ	δ			$\cdots$	
第5の差	λ	μ				$\cdots$	

$a-\omega=1f+1g+1h+1i+\cdots$　　　…式①

となる。なお、この数列を現代風に言うと階差数列のことで、第１の差は第１階差数列、第２の差は第２階差数列、・・・、のことである。

次に、$g,h,i,\cdots$を$f,l,q,\beta,\cdots$で置き換える。

$1g=1f-1l$

$1h=1f-2l+1q$

$1i=1f-3l+3q-1\beta$

$\cdots\cdots$

となる。式①に代入すると、

$$
\left.\begin{aligned}
a-\omega=1f&\\
&+1f-1l\\
&+1f-2l+1q\\
&+1f-3l+3q-1\beta\\
&+1f-4l+6q-4\beta+1\lambda\\
&+\cdots
\end{aligned}\right\}\text{式②}
$$

となる。次に、$a=y$、第１の差をdyつまり$f=dy$、第２の差を$l=ddy$、第３の差を$q=d^3y$、$\cdots$、数列の項の数をx、項の和を$\int x$、和の和つまり第２の和を$\iint x$、第３の和を$\int^3 x$、$\cdots$とおく。

$$x=1+1+1+1+\cdots$$
$$\int x=1+2+3+4+\cdots$$
$$\iint x=1+3+6+10+\cdots$$
$$\int^3 x=1+4+10+20+\cdots$$
$$\cdots\cdot$$

となる。式②に代入すると、

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

が成り立つ。

2.2.2 学位論文の紹介２

中村幸四郎(1999,P.210)において、「微分算の歴史と起源が未発表であったため Historia et origo calculi differentialis を参照した」と記載されている。この「Historia et origo calculi differentialis」とは、C.I.Gerhardt(1846)のことである。C.I.Gerhardt(1846,P.6)に、

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\int x$$
$$+d^3y\iint x-d^4y\int^3 x+etc$$

と記載されている。

2.2.3 学位論文の紹介３

中村幸四郎(1999,P.212)より紹介する。2.2.1・2.2.2 と大きく違う点は、最初に$\sum$を使って記述していることである。

$$1+1+\cdots+1=x$$
$$1+2+3+\cdots=\sum x$$
$$1+1+2+1+2+3+\cdots=\sum\sum x$$

とおけば、

$$a=x\cdot da-\sum x\cdot d^2a$$
$$+\sum\sum x\cdot d^3a-\sum{}^3 x\cdot d^4a$$

そして、$\sum$を$\int$に置き換えて

$$a-\omega=x\cdot da-\int x\cdot d^2a$$
$$+\iint x\cdot d^3a-\int^3 x\cdot d^4a+etc$$

とした。

2.2.4 学位論文の考察

2.2.1 で、

$$\int x=1+2+3+4+\cdots$$
$$\iint x=1+3+6+10+\cdots$$
$$\int^3 x=1+4+10+20+\cdots$$

と使われているので、$\int$が積分ではなく和の意味であることがわかる。

2.2.1 における式

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

2.2.2 における式

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\int x$$
$$+d^3y\iint x-d^4y\int^3 x+etc$$

2.2.3 における式

$$a-\omega=x\cdot da-\int x\cdot d^2a$$
$$+\iint x\cdot d^3a-\int^3 x\cdot d^4a+etc$$

において、注目すべきは式の中の「･」の存在である。

2.3 dと$\int$の使い方の推移、及び考察

ライプニッツは、学位論文で、記号dを差、記号$\int$を和として扱った。固有三角形･変換定理の発見以降、接線問題･求積問題に取り組み、その手法として、記号化と計算方法の確立に取り組んだ。微小差(微分)の記号にd、面積を求める記号に$\int$を使い始める。そして使い方に試行錯誤があった。

2.3.1 dと$\int$の使い方の推移１

１６７５年１０月　求積解析①

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.150)より紹介する。

求積問題にてカヴァリエリ(1598-1647)が考案した記号「omn.」を使う。

（例）

・$\text{omn.}\overline{yx\ \text{ad}\ x} \sqcap \frac{b^2c}{2} - \text{omn.}\overline{\frac{x^2}{2}\ \text{ad}\ y}$

「omn.」はラテン語の「omnes」の略で不可分法（注釈１を参照）の「すべての線」の意味、「$\overline{xy}$」は「(xy)」の意味、「$ad\ x$」は「xに関係づけられた」という意味、「⊓」は「=」の意味である。

１６７５年１０月　求積解析②

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.165)より紹介する。

「omn.のかわりに$\int$ と記すと便利であろう」と記載されている。数学史上初めて記号$\int$（注釈２を参照）が導入された。

（例）

・$\frac{\overline{\int l^2}}{2} \sqcap \int \overline{\int \bar{l} \frac{1}{a}}$

・$\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$

１６７５年１０月　求積解析③

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.167)より紹介する。

「$\int 1 \sqcap ya$ならば私たちは$1 \sqcap \frac{ya}{d}$とおくであろう。すなわち$\int$ が次元を増やすようにdは次元を減ずるであろう」、同ページの解説に「dxと$\frac{x}{d}$とは同じであり、二つの近似するxの差である」、「この箇所で$\int$ とdの逆関係が数学史上初めて明確に述べられた。」と記載されている。

１６７５年１０月　求積解析④

Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.174)より紹介する。

1675年10月の$\int$ の導入に対し、翻訳者である原享吉氏の解説が紹介されている。「カヴァリエリは、すべての線は面積を与え、すべての面は体積を与えると唱えたが「和」という語を避けている。ライプニッツは、面積を線分の和で見ることをためらわず、他方で線の無限小の差を考え、こうして記号$\int$,dを導入したとき、それらはすでにオペレーターでもあった。」と記載されている。

１６７６年７月　逆接線法

Gottfried Wilhelm Leibniz（1997,PP.212-213)より紹介する。

デカルトの逆接線法の問題において、

$\frac{t}{y} \sqcap \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}$と初めて微分記号を分母においた。

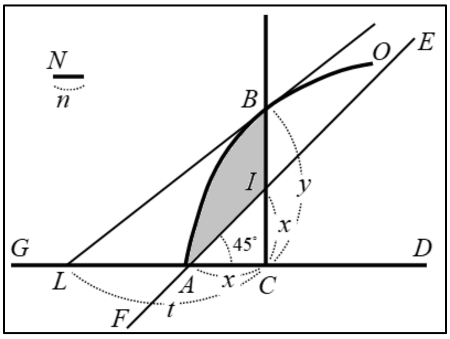

図１　逆接線法

さらに、この式を変換し、

$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \frac{n}{y-x}$

$d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap d\bar{y}n$

$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n\int d\bar{y}$

とし、求積問題に展開し、面積$AIBA = ny$と導き出した。

１６７６年１１月　接線の微分算

Gottfried Wilhelm Leibniz（1997,PP.238-241)より紹介する。

単純べきの微積分の一般規則を導く。

$\frac{dx^e}{dx} \sqcap ex^{e-1}, \int \overline{x^e d\bar{x}} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}$

下記のような複雑な無理式・分数式にも適用する。

$d\overline{\sqrt{a++bz+cz^2}} \sqcap -\frac{b+2cz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}$

１６８４年１０月　微分算の論文

Gottfried Wilhelm Leibniz（1997,PP.296-297)より紹介する。

$dx, dy, \cdots$ を曲線 $X, Y, \cdots$ の接線の有限線分とみなし、有限線分間の演算規則が記載されている。

・ a が定量ならば $da = 0$

・ $d\,\overline{ax} = adx$

・ $d\,\overline{z - y + w + x} = dz - dy + dw + dx$

・ $d\,\overline{xv} = xdv + vdx$

・ $d\,\dfrac{v}{y} = \dfrac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$

上記演算規則で「=」を使ったのは、本論文で簡潔に表現するためであって、文献では「等しいであろう」と記載されている。(除法の $\pm, \mp$ については注釈３を参照)

ライプニッツは、演算規則の説明するために下記の図を使っている。

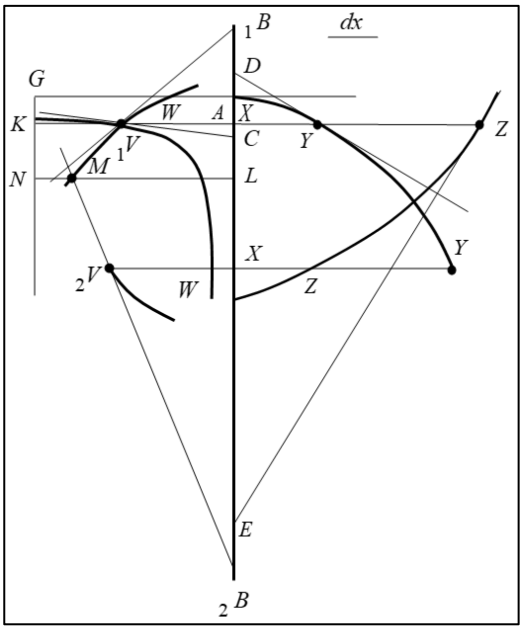

図２　有限線分の説明

ここで、説明を簡略化するため、まず曲線 Y だけで説明する図を下記に記載した。

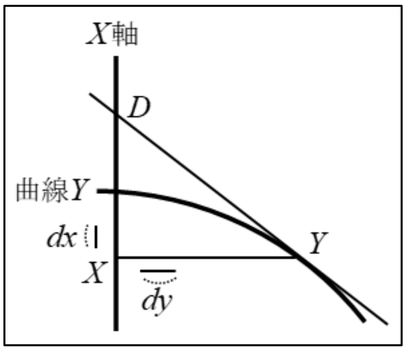

図３　有限線分の説明

縦線 X 軸上の小さな線分を固定し dx とする。$XD : XY = dx : dy$ を満たす線分 dy を定めることができる。dy が曲線 Y の有限線分となる。同様に同じ固定した dx から、曲線 $V, W, \cdots$ の有限線分 $dv, dw, \cdots$ を定めることができる。

なお、P.296 に「dv は有限の線分（差分）であり、微分とは訳せない」と記載されているので、微分の演算規則に似ているが、ライプニッツは「微分」とは考えていなかった。さらに、図を使い演算規則が述べられているが、P.297 に「今日的にいう微分算の四則が述べられているが、証明は略されている。」とあるので、証明の記載はない。つまり、ライプニッツは、図を説明することにより、有限線分間の演算規則を導いている。

１６８６年７月　積分算の論文

Gottfried Wilhelm Leibniz（1997,PP.326-327)より紹介する。

積分について「 $pdy = xdx$ ならば、この微分方程式を求和方程式に移せば、$\int pdy = \int xdx$ となる」と記載されている。この $pdy = xdx$ とは、曲線に接線と法線を引き、各線分の長さを x, y, t, p 、有限線分を dx, dy としたとき、$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x}{t} = \dfrac{p}{x} \Rightarrow pdy = xdx$ となるということである。

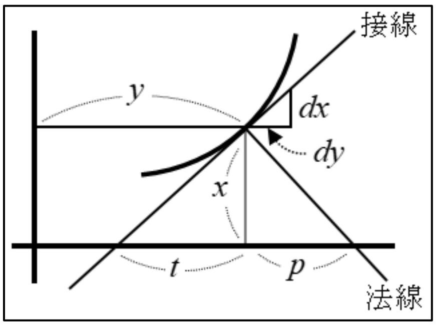

図４　$pdy = xdx$ の説明

この論文により、面積問題が代数式をこえて超越的な式にまで及ぶことを示している（注釈４を参照）。ただし、「1684 年 10 月微分算の論文」の微分算の演算規則に相当する積分算の演算規則は記載されていない。

１７１４年　微分算の歴史と起源

Gottfried Wilhelm Leibniz（1999,PP.310-315)より紹介する。

この項目「1714 年　微分算の歴史と起源」とは、「2. 2. 1 学位論文の紹介１」で紹介した内容とのことで、

$$y-\omega = dy\cdot x - ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x - d^4y\cdot\int^3 x + \cdots、$$

と記載されている。ただし、上線「$\overline{xy}$」・等号「⊓」は使われていない。等号は「=」が使われている。

2. 3. 2　d と $\int$ の使い方の推移２

Joseph H.Hofmann(1974)より紹介する。この文献は、文献名の年代 1672-1676 からわかるように固有三角形・変換定理の時代の歴史書である。文献の中で、P.55 に変換定理が記載されていて、積分の式は、$\int_0^x y.dx = \frac{1}{2}\left(xy + \int_0^x z.dx\right)$ となっている。なお、この文献の中のすべての積分の式の d の左側に「.」が記載されている。

2. 3. 3　d と $\int$ の使い方の推移１と、ライプニッツ協会の文献との比較

「2. 3. 1　d と $\int$ の使い方の推移１」と、ライプニッツ協会(https://leibnizedition.de/)に掲載されている文献とを比較する。ライプニッツ協会の文献を翻訳することはできなかったが、文献のタイトル、文献内の数式の記述方法で比較した。その結果、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997)の下記の年代別項目が史実と一致すると考えられる。

１６７５年１０月　求積解析①

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.150-152)
タイトル：重心論による求積解析１，２
Analysis Tetragonistiva ex Centrobarycis
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5 (2021/11/30), Ⅶ5A.pdf,PP.263-264

１６７５年１０月　求積解析②、③

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.157-170)
タイトル：求積解析第２部
Analyseos Tetragonisticae pars 2da
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5 (2021/11/30), Ⅶ5A.pdf,PP.288-295

１６７６年７月　逆接線法

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.211-216)
タイトル：逆接線法
Methodus tangentium inversa
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5 (2021/11/30), Ⅶ5B.pdf,PP.598-602

１６７６年１１月　接線の微分算

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1997,PP.238-246)
タイトル：接線の微分算
Calculus Tangetium differentialis
協会文献：Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5

(2021/11/30),
Ⅶ5B.pdf,PP.612-618

１６８４年１０月　微分算の論文
　ライプニッツ協会に掲載無

１６８６年７月　積分算の論文
　ライプニッツ協会に掲載無

１７１４年　微分算の歴史と起源
　ライプニッツ協会に掲載無

2.3.4 d と $\int$ の使い方の推移１の考察

１６７５年１０月　求積解析の考察
　「ライプニッツは、面積を線分の和で見ることをためらわず」とあるので、ライプニッツは、$\int$ を「総和を求める記号」として使い始めた。不可分法の線分による比較を、線分の和という解釈にすることは、ライプニッツにとって大きな変化点と考えられる。ただし、「$\int$ が次元を増やすように d は次元を減ずるであろう」と記載されているので、この時点でのライプニッツの考える関数とは、べき乗関数 $y=x^n$ のみと考えられる。

１６７６年７月　逆接線法の考察
$\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \dfrac{n}{y-x}$ を $d\bar{x}y - xd\bar{x} \sqcap d\bar{y}n$ に変換する方法は、$\dfrac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \sqcap \dfrac{n}{y-x}$ の両辺に $d\bar{y}\left(y-x\right)$ を掛けることである。したがって、$d\bar{x}y - xd\bar{x}$ において、たとえば $d\bar{x}y$ の $d\bar{x}$ と y の間に掛算があるので、$d\bar{x}\times y - x\times d\bar{x} \sqcap d\bar{y}\times n$ と解釈できる。$d\bar{x}\times y - x\times d\bar{x} \sqcap d\bar{y}\times n$ とは、$d\bar{x}, d\bar{y}$ を使った差分の演算が等しい、という意味である。そして、差分の式 $\left(d\bar{x}y - xd\bar{x}\right)$ の総和と、差分の式 $\left(d\bar{y}n\right)$ の総和が等しいというのが、式
$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n \int d\bar{y}$ である。
$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} \sqcap n \int d\bar{y}$ において、総和の記号 $\int$ とは、たとえば $\int d\bar{x}y$ において $d\bar{x}$ のみや y のみに対しての作用ではなく、$d\bar{x}\times y$ に対して作用すると解釈するのが妥当である。式にすると、$\int d\bar{x}y = d\overline{x_1}\times y_1 + d\overline{x_2}\times y_2 + \cdots$ となる。したがって、$\int\left(d\bar{x}\times y\right) - \int\left(x\times d\bar{x}\right) \sqcap n\times\int d\bar{y}$ と解釈できる。

１６８４年１０月　微分算の論文の考察
　有限線分間の演算規則において、文献では「等しいであろう」となっている。なぜ「=」とできなかったかという疑問生じる。
　ライプニッツは定義の基本を不可分法においている。線分とは長さを示すもので幅は０である。ライプニッツは、幅０の演算規則を、有限線分の短い長さで近似して証明しようとしたが、満足のゆく証明ができなかった、と考えられる。
　なお、有限線分間の演算規則とは、現代風に言うと、微分の演算規則で、$\dfrac{df}{dx}, \dfrac{dg}{dx}$ の微小差 dx を固定し、さらに dx を省略した表現である。

１６８６年７月　積分算の論文の考察
$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{p}{x}$ の両辺に xdy を掛けることから、$p\times dy = x\times dx$、さらに $\int\left(p\times dy\right) = \int\left(x\times dx\right)$ と解釈できる。

１７１４年　微分算の歴史と起源の考察
　「2.2.1 学位論文の紹介１」で紹介した式、

$$y-\omega = dy\cdot x - ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x - d^4y\cdot\int^3 x + \cdots$$

は、学位取得時の論文に記載されているものだから、1666 年当時の式である。1675 年 10 月以前、記号 $\int$ は数列の和の意味で、積分の意味でないので問題はないが、「=」は「⊓」で記述されるべきなので、式の書き方に矛盾がある。そこで、改めて参考文献中の学位論文「歴史と起源」の編纂の推移を調査・考察をする。

2.3.5 学位論文「歴史と起源」の編纂の推移の調査、及び式

$$y-\omega = dy\cdot x - ddy\cdot\int x$$

$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

における「=」「⊓」の記述の調査

図における文献名を下記のように簡略化する。

・文献 1714: 1714 末～1716 年にライプニッツが編纂した文献

・Gerhardt 1846: C.I.Gerhardt (1846)

・Gerhardt 1858: C.I.Gerhardt (1858)

・Leibniz 1999: Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,PP.310-350)

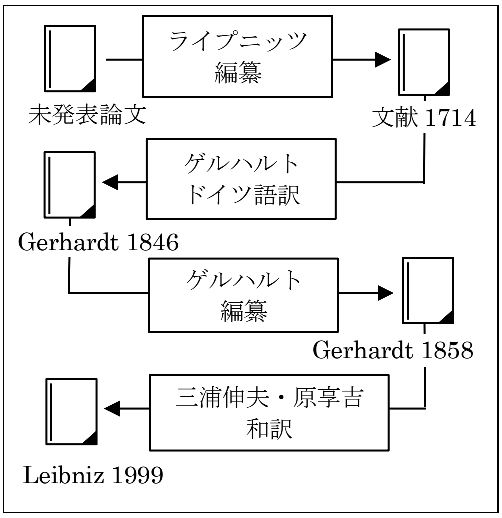

図５　学位論文「歴史と起源」の編纂フロー

未発表論文・文献 1714 の調査

Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.305)に「これは 1714 年の秋ごろから執筆され、ライプニッツの死の直前の 1715-16 年頃に中断された断片」と記載されている。つまり、1714 年以前の「未発表論文」を再執筆したという意味である。その論文の中に、学位論文「歴史と起源」がある。

ここで執筆された文献のことを「文献 1714」略記した。Gottfried Wilhelm Leibniz (1999, P.305)の表題にあるように、この文献名は「Historia et origo caluculi differentialis」、日本名「微分算の歴史と起源」である。中村幸四郎(1999,P.210)において、「微分算の歴史と起源が未発表であったため」とあるように、「文献 1714」も未発表である。

Gerhardt 1846 の調査

「2.2.2 学位論文の紹介２」でも紹介したが、中村幸四郎(1999,P.210)において、「微分算の歴史と起源が未発表であったため Historia et origo calculi differentialis を参照した」と記載されているとおり、「文献 1714」をゲルハルトがドイツ語に翻訳したのが C.I.Gerhardt(1846)である。Gottfried Wilhelm Leibniz(1997, P.213)に「手稿がもっぱら⊓を示しているにもかかわらず、ゲルハルトは＝に置き変えているのを見るとき、本作品についても、低本を離れて等号⊓をとりたい。」と記載されている。C.I.Gerhardt (1846)において、ゲルハルトは元になった文献の「⊓」を「=」に置き換えて C.I.Gerhardt (1846)を編纂したと考えられる。したがって、C.I.Gerhardt (1846)から、元になった文献の「⊓」の利用状況がわからない。

Gerhardt 1858 の調査

文献 C.I.Gerhardt (1846)及びその他文献が C.I.Gerhardt (1858)に掲載されているので、C.I.Gerhardt (1858)は、文献 C.I.Gerhardt (1846)及びその他文献から編纂された文献と考えることができる。この文献名は「Leibnizens Mathematische Schriften」となっている。

C.I.Gerhardt(1846)と C.I.Gerhardt (1858, P392-410)とを比較すると、内容はほぼ完全に一致している。ただし、C.I.Gerhardt(1846,P.6)に記載されている式

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\int x$$
$$+d^3y\iint x-d^4y\int^3 x+etc$$

は、C.I.Gerhardt (1858,P398)では

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+etc$$

と記載されていて、各項に「･」の記載がある。

Leibniz 1999 の調査

Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.305)に「①LH,XXXV,VⅡ;②LMG,V,392-410」「翻訳は一応②によった上、①を照合して訳文を決定した」と記載されている。②LMG,V,392-410 とは、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.4)に「LMG

Leibniz Mathematishe Schriftrn …」と記載されている。これは C.I.Gerhardt(1858,P392-410)のことである。

したがって、Gottfried Wilhelm Leibniz (1999,P.315)に記載されている式

$$y-\omega=dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

は、ゲルハルトの「⊓」を「=」に置き換えた文献の式を参考にしている。

1714 年「⊓」「=」に関する考察

文献の編纂・翻訳の推移から、「文献 1714」で、「⊓」「=」のどちらを使ったかは不明である。しかし、学位論文は「=」を使い始める前の記述なので、「=」ではなく「⊓」を使い、

$$y-\omega\sqcap dy\cdot x-ddy\cdot\int x$$
$$+d^3y\cdot\iint x-d^4y\cdot\int^3 x+\cdots$$

と記述したと考えられる。

2.3.6 d と $\int$ の使い方の推移２の考察

注目すべきは、1673 年の変換定理の積分の式 $\int_0^x y.dx=\frac{1}{2}\left(xy+\int_0^x z.dx\right)$ の d の左側にある、「.」の存在である。

ところで、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997, P.150)では「⊓は等号として用いられている」と、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997,P.165)では「omn.のかわりに $\int$ と記すと便利であろう」と記載されている。C.I.Gerhardt (1846)においては、$\int_0^x$ のような積分の区間表示はない。

したがって、「=」ではなく「⊓」が使われて、積分の区間表示はなかったはずで、上記式の記述方法は史実と一致しない。Joseph H.Hofmann があえてこのような記述方法したのは、読者に理解しやすくするためと考えられる。

2.3.7 定積分の記述方法において、「•」の記載がないことの考察

ライプニッツは固有三角形・変換定理の発見移行、d と $\int$ で記号化に取り組んだが、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997)では、$\int$ と d の間に「.」の記載はない。「.」を省略したと考えられる。ライプニッツはなぜ「.」を省略したか、という疑問が生じる。

デカルト(1596-1650)は、変数や演算の記号の記述規則を作り、さらにそれらによる新しい代数学を作った。René Descartes(1978,P.4) で、「幾何学における記号の用い方として、$a+b$,$a-b$,ab ,$\frac{a}{b}$, a^2, a^3, $\sqrt{a^2+b^2}$ と書く」と記載されている。乗法においては「.」や「×」の記載はない。ところで、中村幸四郎(1999,P.202)に、ライプニッツは 1691 年の論文で、「ホイヘンスとそれからガリレオとデカルトとから多くのものを学んだ。」と記載がある。つまり、ライプニッツはデカルトの記述規則を踏襲したと考えられる。

３　研究の成果

2.2.4 における記号 d と $\int$ の間の「.」の存在、2.3.4 における「×」の存在、2.3.6 における「.」の存在から、定積分の記述 $\int_a^b f(x)dx$ において $f(x)\times dx$ と考えると、$f(x)\times dx$ は区分求積法の「微小区間における面積」という解釈と一致する。$\int$ については、和（ラテン語 summa）という意味だから「a から b までの総和を求めなさい」と解釈できる。

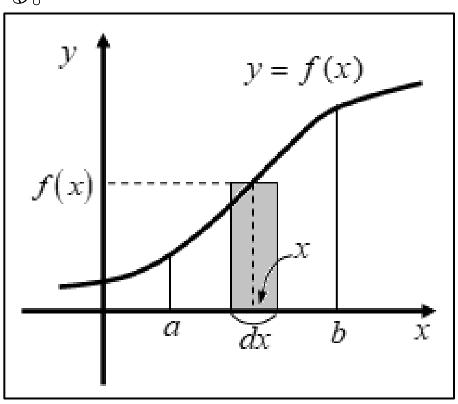

図６　区分求積法

$\int f(x)dx$ とは「$f(x)$ を x で積分する」と

いう意味だから、$\boxed{\int} f(x) \boxed{dx}$のように、$f(x)$を$\int$ とdxでペアで囲むものと解釈される。しかし、$\int$ は「総和」の意味、$f(x)dx$は「微小区間における面積」と解釈すると、「$\int$ とdxがペア」という考え方では不合理がある。さらに、「1　研究のねらい」で説明した「$F(y)$とdyの間の交換法則」を成り立たたせるためには、「$\int$ とdxがペア」という解釈では不合理がある。$\boxed{\int}\boxed{f(x)dx}$のように「$\int$ と$f(x)dx$がペア」と解釈すると矛盾がない。

これらのことから、定積分の定義を下記のように改めることを提案する。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b \left(f(x)\times dx \right)$$
$$= \int_a^b f(x)dx$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x$

$\int_a^b \left(f(x)\times dx \right)$の意味は、微小差$dx$と微小区間上の$x$での$f(x)$をかけて面積を求め、カッコで閉じる。そしてインテグラルの元は和（ラテン語 summa）という意味だから「aからbまでの総和を求めなさい」というものである。この後、×と$(\ \ )$を省略すれば、従来の式になる。

4　「×」の性質・厳密化

$\int_a^b \left(f(x)\times dx \right)$における「×」の性質について考える。

置換積分は、

$$\int_a^b \left(f(x)\times dx \right) = \int_\alpha^\beta \left(f(g(t))\times \frac{dx}{dt}\times dt \right)$$
$$= \int_\alpha^\beta f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$$

のように記述することができる。したがって、「×」は掛算と同じ性質がある。掛算の交換法則により、

$$\int_a^b \left(f(x)\times dx \right) = \int_a^b \left(dx\times f(x) \right)$$

が成り立つ。

さて、前節で、dxは微小差であると説明したが、「微小差の差とはどの程度か？」という疑問が生じる。これに対し、小数による記述にすれば小数点の後の０の個数は無限個であり、正確な微小差の値を特定することはできない。そのため、微小差とは抽象的な概念である。抽象的な微小差の演算なので、「×」も抽象的な概念の掛算である。

5　定義を理解することによる学習効果

本論文で説明した定積分の定義を高校生の学習過程に取り入れることによる学習効果について説明する。

区分求積法で定積分の定義を学ぶとき、本論文で説明した内容を取り入れることにより、高校生が理工系の大学に進んだ時に学ぶ高度な積分が無理なく理解できることが想定される。重積分・面積分・線積分・複素積分・ベクトル上の積分、数学科であればルベーグ積分の記号の意味が理解できるはずである。また、これまでの指導方法では定積分の定義について十分説明する必要がなかったため、定義部分を正しく理解できていない高校生が存在する可能性がある。このような高校生に対し、本研究で説明した方法を用いることで、定積分の定義を正しく理解できるようになることが期待される。

6　研究のまとめ

本研究では、よく引用される定積分の定義において、左辺と右辺の間にギャップがあるという問題意識をもとにライプニッツの功績を調査した。その結果、Gottfried Wilhelm Leibniz (1997)・Gottfried Wilhelm Leibniz (1999)による示唆から、定積分の定義を改め、図形を数式で表し積分の演算規則に従い計算する考え方を提案した。この手法によると、従来の定義とも無理なく結びつけることができ、また、図形による理解ができるため、高校生にも理解しやすい。この定義を理解しておけば、理工系の大学

で学ぶような高度な数学も無理なく理解できると考えられる。

7　注釈

7.1 注釈１、不可分法の説明

7.1.1 不可分法の定義

中村幸四郎(1999,P.103)より紹介する。カヴァリエリの原理とも言われる。「二つの平行線α, βの間にはさまれた面積Sとσにおいて、基準線αに平行にひいた平行線からつねに等しい線分$\left[AB = ab\right]$が切り取られるならば、面積Sとσとは等しい」という定義である。

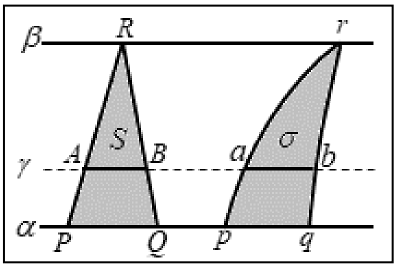

図７

この定義は、２つの図形で、ある特定の条件の線分が等しいならば２つの図形の面積は等しい、という意味である。不可分法では、面積の算出が難しい場合、算出できる図形に変換し、面積を算出した。図形ごとに変換方法があり、汎用性がないのは当然である。

7.1.2 不可分法の例

V.A.ニキフェロフスキー(1993,P.60)より紹介する。問題は円の面積を求めることである。円上の点の接線を$AC = 2\pi r$まで延長する。直角三角形OACを作る。OA上の任意の点Bにおいて、

点Bにおける円周の長さ$= BD$

なので、円と直角三角形OACの面積は等しい。直角三角形の面積はπr^2なので、円の面積はπr^2である。

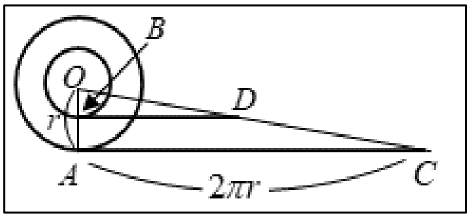

図８

7.2 注釈２、$\int$ と$\sum$ の関係について

本研究とは直接関係ないが、$\int$ と$\sum$ の関係について調査した。

中村幸四郎(1999,P.212)に、「ライプニッツは『歴史と起源』では$\sum$ を和の記号$\int$ で表し、$\sum x, \sum\sum x, \sum{}^3 x$の代わりにそれぞれ、$\int x$, $\int\int x, \int{}^3 x$を使っています。」と記載されている。そして、式

$$a = x \cdot da - \sum x \cdot d^2 a + \sum\sum x \cdot d^3 a - \sum{}^3 x \cdot d^4 a$$

を、

$$a - \omega = x \cdot da - \int x \cdot d^2 a + \iint x \cdot d^3 a - \int{}^3 x \cdot d^4 a + etc$$

に置き換えている。

このことから、ライプニッツは$\int$ を使う前は$\sum$ を使っていたと解釈できる。しかし、C.I.Gerhardt (1846)・C.I.Gerhardt (1858, PP.392-410)・Gottfried Wilhelm Leibniz (1999, PP.310-350)に$\sum$ の記載はない。ライプニッツ協会の文献 Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5 (2021/11/30)にも$\sum$ の記載はない。さらに、Gottfried Wilhelm Leibniz(1999,P.314)に「記号$d, \int$ は作っても$\Delta, \sum$ に相当する記号を持たず、『微分』『積分』をも differentia,summa と呼び続けようとしたライプニッツの『こだわり』を見るのは、誤りであろうか。」と記載されている。したがって、ライプニッツが$\sum$ を使っていたと解釈するのは間違いと考えられる。なお、中村幸四郎(1999,P.212)に、なぜ$\sum$ が記載されているかについては不明である。

7.3 注釈３、除法の±,∓について、負数の扱いについて

負数の扱いを歴史的に述べる場合、さまざまな数学者の貢献があるため、ここですべてを述べることはできない。所持している文献から抜粋する。

René Descartes(1978,P.3)の冒頭に「幾何学のすべての問題は、いくつかの直線の長ささえ知れば作図しうるような諸項へと、容易に分解することができる」とある。デカルトの数学

とは、作図問題を数式化することによる幾何学のことである。当時の作図問題では、長さ・面積・体積は正数のみを扱うため、たとえば長さ３の線分から１の線分を取ることは$3-1=2$に帰着するが、逆に１の線分から３の線分を取ることができないため、$1-3=?$から計算される値は「無意味なもの」として扱われた。

本論文「2.3.1 d と$\int$ の使い方の推移１、1684 年 10 月　微分算の論文」の$d\frac{v}{y}=\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$の$\mp,\pm$について、Gottfried Wilhelm Leibniz（1997,P.297)に「今日では$d\left(\frac{v}{y}\right)=\frac{ydv-vdy}{y^2}$とするところであるがここで複合が付けられているのは縦線・横線ともに正の値のみを考えていたからである」と記載されている。これを現代風に言うと、縦線・横線の交差する点（原点）の下側・左側であっても正数と扱う、ということである。ライプニッツは負数を認めなかったと考えられる。

小杉肇(1980,PP.129-130)に、Jean Robert Argand(1768-1822)の虚数・負数の幾何学的表示に「+1 と-1 とが一点 O から反対の方向に引かれた単位の線分」と記載されている。これが負数の最初の承認と考えられる。

7.4 注釈４、代数式・超越的な式について

代数式を現代風に表記すると、$y=x^p$（pは-1 以外の有理数)のことである。ライプニッツ以前、代数式の描く下部の面積はすでに複数の数学者により計算されている。カヴァリエリはV.A.ニキフェロフスキー(1993, PP.47-58)に、フェルマーは Car B.Boyer (1998,PP.120-122)に、ウォリスは V.A.ニキフェロフスキー(1993, PP.95-106)に記載されている。これらの数学者は、代数式以外の個別図形の面積も計算しているが、式及び演算の一般化はしていない。ここで言う超越的な式とは、$\sqrt{2x-x^2}$のような代数式の組み合わせた式のことである。三角関数・指数関数等の積分については、ライプニッツ以降の数学者によるものである。

引用・参考文献

Car B.Boyer;
加賀美鐵雄,浦野由有(訳),
数学の歴史３,朝倉書店,1998

C.I.Gerhardt;
Historia et origo calculi differentialis,
https://archive.org/details/historiaetorigo00gerhgoog/page/n68/mode/2up,
1846,閲覧 2021/5/14

C.I.Gerhardt;
Leibnizens Mathematische Schriften,
Wentworth Press,1858

Gottfried Wilhelm Leibniz;
原享吉,佐々木力,三浦伸夫,馬場郁,斎藤憲,安藤正人,倉田隆(訳),
ライプニッツ著作集２数学論・数学,工作舎,
1997

Gottfried Wilhelm Leibniz;
原享吉,横山雅彦,三浦伸夫,馬場郁,倉田隆,長島秀男,西敬尚(訳),
ライプニッツ著作集３数学・自然学,工作舎,
1999

Joseph H.Hofmann;
Leibniz in Paris 1672-1676,
Cambridge University Press, 1974

Leibniz-Gesellschaft,ReiheⅦ5;
https://www.gwlb.de/fileadmin/Leibniz/repositorium-des-leibniz-archivs/LAA-BdVII5-komplett-20211130.zip,
閲覧 2022/02/21

René Descartes;
三宅徳嘉,小池健男,青木靖三,水野和久,赤木昭三,原享吉(訳)
デカルト著作集Ⅰ（幾何学）,白水社,1978

V.A.ニキフェロフスキー;
馬場良和(訳)
積分の歴史
（アルキメデスからコーシー、リーマンまで)
現代数学者,1993

William Dunham;一樂重雄,實川敏明(訳),
微積分名作ギャラリー,日本評論社,

PP. 100-107, 2009
岡部恒治, 阿原一志, 市原一裕, 井原俊輔, 大矢雅則, 落合
豊行, 戸瀬信之, 中村八束, 本橋信義, 森田純, 八木克己,
吉田正章, 加藤春紀, 舘麻由美, 西牧守, 山本圭子, 吉地
佳弘, 数研出版編集部
高等学校数学Ⅲ、数研出版、P. 227, 2021
高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　理数編,
東京書籍，P. 118, 2019
小杉肇, 数学史（数と方程式）槇書店, 1980
中村幸四郎、近世数学の歴史、日本評論社、1999
福田安蔵, 鈴木七緒, 安岡善則, 黒崎千代子
微積分演習Ⅱ, 共立出版, P71，1976