C【高等学校部会】、分科会４数学Ⅱ

積分の定義のわかりやすい説明

山形県高畠町　鈴木啓一

1　研究のねらい（はじめに）

積分の定義は、区間$\left[a,b\right]$を分割し、

$a=x_0,x_1,\because,x_n=b$とし、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

となっている。しかし、よく見ると左辺と右辺の表現方法にギャップを感じる。なぜ「＝」とすることができるか、納得のゆく説明ができない。

2　研究の内容

ライプニッツの功績を調査し、微積分の由来を調べることにした。

（１）ライプニッツの功績　　　　　［引用１］

時期	概要
1666	学位論文「結合法の理論」・「歴史と起源」を発表。 記号dと$\int$を作る。
1673	固有三角形を発見。 関数の接線と、接線から定義できる面積関数の存在を示した。
1684	微分算の論文を発表。 題名「極大・極小および接線の新方法、分数あるいは無理量によって妨げられない…」
1686	積分算の論文を発表。 題名「深奥な数学…不可分量あるいは無限小量の解析について」

学位論文「結合法の理論」・「歴史と起源」を紹介する。

ライプニッツは、図１の算術三角形を発見した。２つの数を→の規則に従って加算することによって構成されている。

（注：独自に発見したと思ったようだが、これは、パスカルの三角形である）

（図１）

	①	②	③		
1	1	1	1	1	・・
0	1	2	3	4	・・
0	0	1	3	6	・・
0	0	0	1	4	・・
0	0	0	0	1	・・

次にライプニッツは、自然数の減少数列$\left\{a,b,c,\cdots\right\}$を考えた。

$$\begin{array}{ccccccc} a, & b, & c, & \cdots & \cdots & z, & 0 \\ da, & db, & dc, & \cdots & & dz & \\ d^2a, & d^2b, & d^2c, & & d^2z & & \\ d^3a, & d^3b, & \cdots & d^3z & & & \end{array}$$

（注：この当時、$a_1,a_2,a_3,\cdots$のような数列の表記法がなかったようである。なお上記の数列は、現代風に言うとn階 まである階差数列のことである。）

たとえば

$da=a-b$，$db=b-c$，$d^2a=da-db$

（注：dとは*difference*（差）の頭文字）

$a=da+db+dc+\cdots$

とおける。

$db=da-d^2a$

この式の係数が図１の①と一致する。

（注：下記の式でもわかるように、偶数番目の項の係数が「－」である）

$dc=db-d^2b=da-2d^2a+d^3a$

この式の係数が図１の②と一致する。

$$\begin{aligned} de&=dc-d^2c \\ &=\left(da-2d^2a+d^3a\right)-\left(d^2b-d^3b\right) \\ &=da-3d^2a+3d^3a-d^4a \end{aligned}$$

この式の係数が図１の③と一致する。

さらに一般化する。数列$a,b,\because,z$までの項の数をχとする。

（注：項の数といえば普通mやnを使うが、ライプニッツはχを使った。）

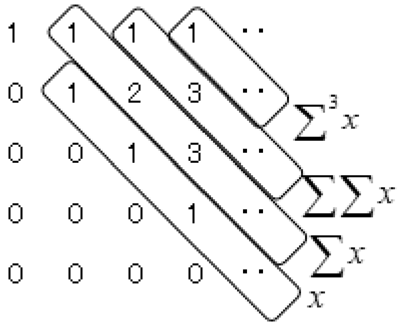
$1+1+\cdots+1=x$

$1+2+3+\cdots=\sum x$

$1+1+2+1+2+3+\cdots=\sum\sum x$

とおく。この変換式を算術三角形で見た場合、図２のように斜めに加算した式になる。

（図２）



$a=da+db+dc+\cdots$に代入すると、

$$a=x\cdot da-\sum x\cdot d^2a+\sum\sum x\cdot d^3a$$
$$-\sum{}^3 x\cdot d^4a+etc \qquad \cdots（式１）$$

となる。

「歴史と起源」では、$\sum$ を$\int$ に直し、

$$a=x\cdot da-\int x\cdot d^2a+\int\int x\cdot d^3a$$
$$-\int{}^3 x\cdot d^4a+etc \qquad \cdots（式２）$$

と表現方法を変えた。（注：$\int$ という記号について、積分ではなくて和という意味である。微積分の概念はまだない。読み方もインテグラルではなくて、ｓｕｍのドイツ語読みだった。）

（２）（式１）を（式２）に変更したことの考察

ア（疑問点）　なぜ$\sum$ を$\int$ に変えたか？

私の考えだが、$\sum$ は横幅があって、いくつも書くとすぐに横幅を占領する。そこで、ライプニッツは S を縦長にした横幅のない記号に変えたのだと思う。

イ（疑問点）　なぜ$\int$ がインテグラルという呼び名になったか？

当時、ヨーロッパ大陸には学会がなくて、ライプニッツは、ベルヌイとの手紙のやり取りで微積分を作り上げた。ベルヌイは、「$\int$ 求積だ、面積を求めることだ」、ということでインテグラルと命名した。ライプニッツに提案したところ、ライプニッツがこれを承認した。積分の論文の発表後の、１６９０年の出来事である。それで今私たちは、$\int$ をインテグラルと呼んでいる。

ウ（疑問点）　数学の歴史書では、わかりやすくするために現代風の表記をすることがある。引用文献の書き方が、実際の歴史上の記述と一致しているか？

デカルトは、１６３７年哲学の書「方法序説」で、座標軸、定数・変数の記述規則、四則演算・べき乗の記述規則を述べている。特に乗法規則においては、「$a\times b$」を「ab」と記述し、「×」を省略した。［引用２］

したがって、ライプニッツはこの記述規則を踏襲しているはずである。実際の記述と一致しているはずである。ただ、乗法の記述で、ライプニッツは$da,d^2a,d^3a,\cdots$の左側に「・」を使った。なお、固有三角形を発見移行、$\int$ の記述方法に試行錯誤があったようだが、最終的には「・」を省略した。［引用３］

私は、この省略こそがキーポイントだと思った。

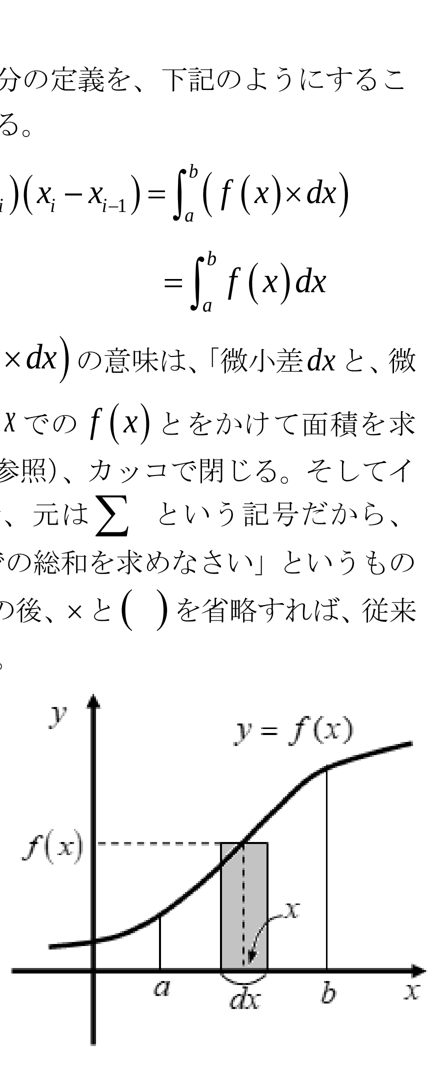
３　研究の成果

私は、積分の定義を、下記のようにすることを提案する。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)$$
$$=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

$\int_a^b\left(f\left(x\right)\times dx\right)$の意味は、「微小差$dx$と、微小区間上の$x$での $f\left(x\right)$とをかけて面積を求め（図３を参照）、カッコで閉じる。そしてインテグラル、元は$\sum$ という記号だから、aからbまでの総和を求めなさい」というものである。この後、×と$(\ )$を省略すれば、従来の式になる。

（図３）



この式の効果は、高校生が、大学、特に理工系に進めば、重積分・面積分・線積分・複素積分・ベクトル上の積分、数学科であればルベーグ積分を学ぶので、積分の意味が簡単に理解できるはずである。

4　研究の新たな発展

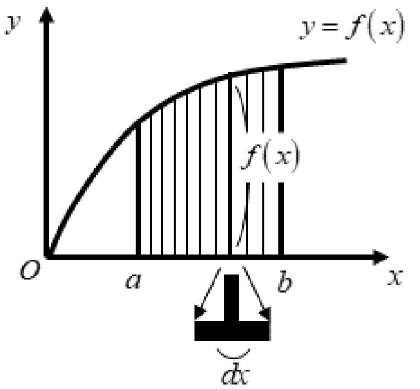
ア（疑問点）　ライプニッツの考えた

$\int_a^b f(x)dx$ の定義とは？

１６８６年ライプニッツは、$\int_a^b f(x)dx$ という記号を導入し積分の計算を定式化した。ただし、文献では定義に関する記述はなかった。その後１００年以上過ぎた１８２２年、リーマンが $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ という定義を導入し積分の定義を厳密にした。

ライプニッツの積分の解釈（定義）は、今私たちが知っている解釈（リーマン積分）とは違っていたかもしれない。ライプニッツの「積分法の論文」の題名にもあるように、「不可分法」の考えを踏襲したならば、「面積とは図４のように領域を線分で埋め尽くす」ことなので、dx を線分の微小幅と考えたかもしれない。

（図４）



歴史上の事実を調べると、フェルマー（1601−1665）・ウォリス（1616−1703）によるべき乗（$y = x^n$）の描く面積の算出方法は、リーマンの定義の区分求積法に近い方法であった。もしもライプニッツがこの考えを踏襲していたならば、ただ単純に「積分の定義」を記載しなかっただけかもしれない。

イ（疑問点）　なぜ私たちは、「×」が省略されていたことを忘れてしまったのか？

ライプニッツやリーマンは、「×」を省略したことを知っていたはずである。

私たちは、まず不定積分で計算テクニックを学ぶ。次に定積分の定義、そして定積分の応用を学ぶわけだが、この時点で積分の記号に慣れているので、「なぜこのような記号になったか」はだれも疑問視しなくなったのだと思う。そのため、「×」が省略されていることが忘れさられたのだと思う。

ウ（厳密化）$\int_a^b (f(x)\times dx)$ における「×」の意味ついて。

「微小差の差とはどの程度」という疑問に対し、小数点の後の０の個数を特定できないので、微小差とは哲学的な言葉である。

$$\int_a^b (f(x)\times dx) = \int_\alpha^\beta (f(g(t))\times g'(t)\times dt)$$

となり「×」という掛算と同じ演算が可能であっても、

$$\int_a^b (f(x)\times dx) = \int_a^b (f(x)\times(x\text{の微小差}))$$

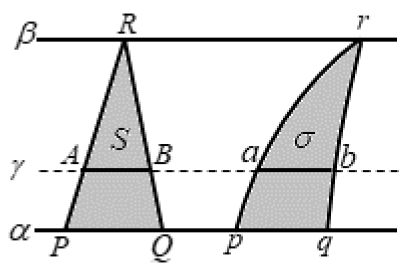
により、厳密には哲学的な意味の掛算になる。

5　「不可分法」の簡単な紹介［引用４］

（１）カバリエリ（1598−1647）

カバリエリは、さまざまな図形の面積や体積を求めるため、「不可分法」という手法を考え出した。不可分法の定義とは、「２つの平行線α，βの間にはさまれた領域でのＳ，σにおいて基準線αに平行にひいた平行線γから、つねに長さの等しい線分ＡＢ，ab が切りとられるならば、Ｓとσの面積は等しい（図５を参照）」というものである。

（図５）



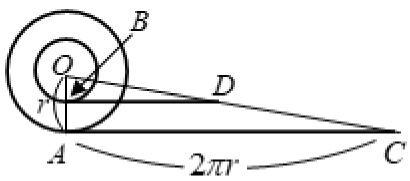
カバリエリは、ケプラーが導入した立体の体積・アルキメデスのらせんと円によって囲まれた面積等を計算した。

不可分法を現代風に言うと「平面の面積とは線分の集合の総和」「立体の体積とは平面の集合の総和」になる。応用方法とは、面積・体積の計算が難しい図形を、計算可能な図形に変換して計算することである。不可分法では、図形ごとに巧妙な変換方法を考えて計算するので、積分の計算のような汎用性はない。

（２）トリチェリ(1608-1647)

トリチェリは、円の面積を求めた。半径OAの円の円周＝AC、半径OBの円の円周＝BD、円と直角三角形が不可分なので、円の面積＝直角三角形の面積＝πr^2

(図６)



６　研究のまとめ

ライプニッツの他に、微積分を中心に歴史上の数学者を調べてみた。私たちが知っている「・・・の定理」の発見者が違う、当時は新しい考え方だったが歴史の中で抹消されたもの、発見の裏に隠れた人間どうしの感情などが見えて、思いもよらないものがあった。

さらに、今回の「積分の定義」の「×」を省略した歴史を見直すことができたことから、数学でもまだまだ改善する余地があると思った。

７　引用・参考文献

（１）近世数学の歴史
第１版第３刷 P209-242
著者　　中村幸四郎
発行者　大石進
発行所　㈱日本評論社

（２）近世数学の歴史
第１版第３刷 P40-49
著者,発行者,発行所　［２]に同じ

（３）The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz
Trns. by C.I.Gerhardt, ed. by J.M.Child

（４）積分の歴史（アルキメデスからコーシー・リーマンまで）
初版 P47-144
著者　V.A.ニキフェロフスキー
訳者　馬場良和
発行所　㈱現代数学社