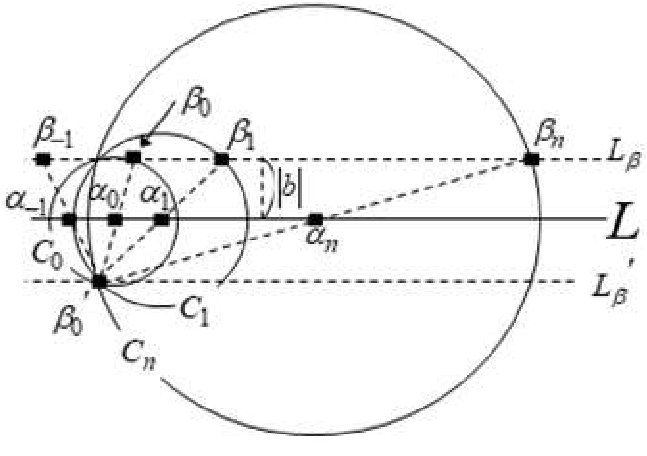
周期関数の性質について

$w=f(z)$ を複素平面上で定義された整関数とする。任意の点 α で、$f(z)$ を $z=\alpha+re^{i\theta}$ により極形式に変換し、$f(z)=g_\alpha(r,\theta)$ とする。$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+\pi)$ となるような点 α が、一直線 L 上に等間隔で無限個（可符番個）存在するとする。複素平面上の任意の点 β 、$w_\beta=f(\beta)$ として、$w_\beta=f(z)$ を満たす点 z は、直線 L に平行な、点 β を通る直線 L_β 上に点列 $\{\alpha_n\}$ の間隔の 2 倍の間隔で無限個（可符番個）存在する。また、直線 L と直線 L_β との距離が等しい反対側にある直線 $L_\beta{}'$ においても、同様に点列 $\{\beta_n\}$ の間隔と同じ間隔で無限個（可符番個）存在する。

（証明）

直線 L が実数軸と同じとし、$g_\alpha(r,\theta)=g_\alpha(r,\theta+\pi)$ を満たす点列を $\{\alpha_n\}(-\infty<n<\infty)$、$\alpha_0=(0,0)$ とする。ここでは、点 β の周期性が問題なので、このような条件でも一般性を失うことはない。$\alpha_1=(a,0)$ とすると、$\alpha_n=(na,0)$ となる。任意の点を $\beta_0=(a',b)$ として、証明を進める。

拡張 1



点 α_0 を中心とし β_0 を通る円を C_0 とする。β_0 と直線 L との距離は $|b|$ となる。C_0 において β_0 を、角度 π で回転させた点を $\beta_0{}'$ とする。$\beta_0{}'$ の座標は $(-a',-b)$、当然直線 L との距離は $|b|$ となる。

点 α_1 を中心とし $\beta_0{}'$ を通る円を C_1 とする。C_1 において $\beta_0{}'$ を、角度 π で回転させた点を $\beta_1(x_1,b)$ とする。

$$\frac{1}{2}(-a'+x_1)=a$$

$$x_1=2a+a'$$

β_1 の座標は $(2a+a',b)$ となる。同様に、点 α_n を中心とし $\beta_0{}'$ を通る円を C_n とする。C_n において $\beta_0{}'$ を、角度 π で回転させた点を $\beta_n(x_n,b)$ とする。

$$\frac{1}{2}(-a'+x_n)=na$$

$$x_n=2na+a'$$

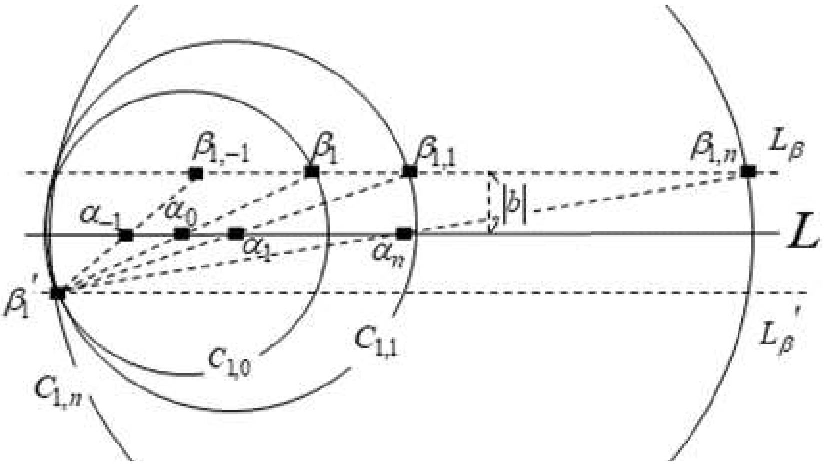
β_n の座標は $(2na+a',b)$ となる。したがって、$\{\beta_n\}(-\infty<n<\infty)$ の間隔は $2a$ になる。かつ、

$$f(\beta_0)=f(\beta_0{}')=f(\beta_n)$$

拡張２

点β_1から始める。

点α_0を中心としβ_1を通る円を$C_{1,0}$とする。$C_{1,0}$においてβ_1を、角度πで回転させた点を$\beta_1{}'$とする。$\beta_1{}'$の座標は$(-2a-a',-b)$となる。



点α_1を中心とし$\beta_1{}'$を通る円を$C_{1,1}$とする。$C_{1,1}$において$\beta_1{}'$を、角度πで回転させた点を$\beta_{1,1}(x_{1,1},b)$とする。

$$\frac{1}{2}(-2a-a'+x_{1,1})=a$$

$$x_{1,1}=4a+a'$$

$\beta_{1,1}$の座標は$(4a+a',b)$となる。同様に、点α_nを中心とし$\beta_1{}'$を通る円を$C_{1,n}$とする。$C_{1,n}$において$\beta_1{}'$を、角度πで回転させた点を$\beta_{1,n}(x_{1,n},b)$とする。

$$\frac{1}{2}(-2a-a'+x_{1,n})=na$$

$$x_{1,n}=2(n+1)a+a'$$

$\beta_{1,n}$の座標は$(2(n+1)a+a',b)$となる。したがって、$\{\beta_{1,n}\}(-\infty<n<\infty)$の間隔は$2a$になる。かつ、$f(\beta_0)=f(\beta_1{}')=f(\beta_{1,n})$

拡張１，２の一般化

点$\beta_m(-\infty<m<\infty)$から始める。点$\alpha_l(-\infty<l<\infty)$を中心とし$\beta_m$を通る円を$C_{l,m,0}$とする。$C_{l,m,0}$において$\beta_m$を、角度$\pi$で回転させた点を$\beta_{l,m}{}'$とする。$\beta_{l,m}{}'$の座標を$(x_{l,m}{}',-b)$とおくと、

$$\frac{1}{2}(x_{l,m}{}'+2ma+a')=la$$

$$x_{l,m}{}'=2(l-m)a-a'$$

$\beta_{l,m}{}'$の座標は$(2(l-m)a-a',-b)$となる。点α_nを中心とし$\beta_{l,m}{}'$を通る円を$C_{l,m,n}$とする。$C_{l,m,n}$において$\beta_{l,m}{}'$を、角度πで回転させた点を$\beta_{l,m,n}(x_{l,m,n},b)$とする。

$$\frac{1}{2}(2(l-m)a-a'+x_{l,m,n})=na$$

$x_{l,m,n} = 2(m+n-l)a + a'$

$\beta_{l,m,n}$ の座標は $(2(m+n-l)a + a', b)$ となる。したがって、$\{\beta_{l,m,n}\}$ において l, m がどのような整数でも、数列 $\{\beta_{l,m,n}\}(-\infty < n < \infty)$ の間隔は $2a$ になる。かつ、点列 $\{\beta_n\}$ と一致する。

証明完