複素微分

$Z_0 = z_{R0} + z_{i0}i + z_{j0}j + z_{ij0}ij, Z_0 \notin \mathbf{O}_Z$
$Z = z_R + z_i i + z_j j + z_{ij}ij, Z \notin \mathbf{O}_Z$ として、$F(Z)$がある1点Z_0の近傍$|Z - Z_0| < r$で定義されているとする。

$$\lim_{Z \to Z_0} \frac{F(Z) - F(Z_0)}{Z - Z_0}$$

が有限な値ならば、これを$F(Z_0)$の微分係数と呼ぶことにする。極限値

$$\lim_{Z \to Z_0} \frac{F(Z) - F(Z_0)}{Z - Z_0}$$

が存在し、$F'(Z_0)$がZ_0の近傍でなめらかであれば、$F'(Z_0)$をZ_0の近傍で定義できる。

微分の性質、

$$(F(Z) \pm G(Z))' = F'(Z) \pm G'(Z)$$
$$(F(Z) \cdot G(Z))' = F'(Z) \cdot G(Z) + F(Z) \cdot G'(Z)$$
$$\left(\frac{F(Z)}{G(Z)}\right)' = \frac{F'(Z) \cdot G(Z) - F(Z) \cdot G'(Z)}{(G(Z))^2}$$

が成り立つ。
合成関数の微分の性質、

$$W = f(Z), Z = G(U) \Rightarrow \frac{dW}{dU} = \frac{dW}{dZ}\frac{dZ}{dU}$$

も成り立つ。

Cauchy-Riemann の関係式

$Z = z_R + z_i i + z_j j + z_{ij}ij$が、関数$F$により$W = w_R + w_i i + w_j j + w_{ij}ij$に対応するとき、$W = F(Z)$とする。点$W$の各要素$(w_R, w_i, w_j, w_{ij})$が$z_R, z_i, z_j, z_{ij}$の関数$f_R, f_i, f_j, f_{ij}$で表現できるとする。つまり、

$$w_R = f_R(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$w_i = f_i(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$w_j = f_j(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$w_{ij} = f_{ij}(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$

とする。

$$\frac{F(Z+h) - F(Z)}{H} = F'(Z) + \mathrm{E}$$

とおく、$H \to 0$ならば$\mathrm{E} \to 0$となる。

$$F(Z+h) - F(Z) = H(F'(Z) + \mathrm{E})$$
$$Z = z_R + z_i i + z_j j + z_{ij}ij$$
$$F(Z) = f_R(Z) + f_i(Z)i + f_j(Z)j + f_{ij}(Z)ij$$
$$f_R(Z) = f_R(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$f_i(Z) = f_i(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$f_j(Z) = f_j(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$f_{ij}(Z) = f_{ij}(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$
$$F'(Z) = f_R' + f_i' i + f_j' j + f_{ij}' ij$$
$$H = h_R + h_i i + h_j j + h_{ij}ij$$

$\mathrm{E} = \varepsilon_R + \varepsilon_i i + \varepsilon_j j + \varepsilon_{ij}ij$とおく。

$$\begin{aligned}
&F(Z+h) - F(Z) \\
&\quad = \big(f_R(z_R + h_R, z_i + h_i, z_j + h_j, z_{ij} + h_{ij}) \\
&\qquad\qquad - f_R(z_R, z_i, z_j, z_{ij})\big) \\
&\quad + \big(f_i(z_R + h_R, z_i + h_i, z_j + h_j, z_{ij} + h_{ij}) \\
&\qquad\qquad - f_i(z_R, z_i, z_j, z_{ij})\big)i \\
&\quad + \big(f_j(z_R + h_R, z_i + h_i, z_j + h_j, z_{ij} + h_{ij}) \\
&\qquad\qquad - f_j(z_R, z_i, z_j, z_{ij})\big)j \\
&\quad + \big(f_{ij}(z_R + h_R, z_i + h_i, z_j + h_j, z_{ij} + h_{ij}) \\
&\qquad\qquad - f_{ij}(z_R, z_i, z_j, z_{ij})\big)ij
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&H(F'(Z) + E) \\
&\quad = (h_R + h_i i + h_j j + h_{ij}ij) \\
&\qquad \times\Big(\big(f_R' + \varepsilon_R\big) + \big(f_i' + \varepsilon_i\big)i \\
&\qquad\qquad + \big(f_j' + \varepsilon_j\big)j + \big(f_{ij}' + \varepsilon_{ij}\big)ij\Big)
\end{aligned}$$

実数項、i項、j項、ij項それぞれ比較すると、

$$\begin{aligned}
&f_R(z_R + h_R, z_i + h_i, z_j + h_j, z_{ij} + h_{ij}) \\
&\qquad\qquad - f_R(z_R, z_i, z_j, z_{ij}) \\
&\quad = h_R\big(f_R' + \varepsilon_R\big) - h_i\big(f_i' + \varepsilon_i\big) \\
&\qquad\qquad - h_j\big(f_j' + \varepsilon_j\big) + h_{ij}\big(f_{ij}' + \varepsilon_{ij}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_i(z_R + h_R, z_i + h_i, z_j + h_j, z_{ij} + h_{ij}) \\
&\qquad\qquad - f_i(z_R, z_i, z_j, z_{ij}) \\
&\quad = h_R\big(f_i' + \varepsilon_i\big) + h_i\big(f_R' + \varepsilon_R\big)
\end{aligned}$$

$$-h_j\left(f_{ij}'+\varepsilon_{ij}\right)-h_{ij}\left(f_j'+\varepsilon_j\right)$$

$$f_j\left(z_R+h_R,z_i+h_i,z_j+h_j,z_{ij}+h_{ij}\right)-f_j\left(z_R,z_i,z_j,z_{ij}\right)$$
$$=h_R\left(f_j'+\varepsilon_j\right)-h_i\left(f_{ij}'+\varepsilon_{ij}\right)+h_j\left(f_R'+\varepsilon_R\right)-h_{ij}\left(f_i'+\varepsilon_i\right)$$

$$f_{ij}\left(z_R+h_R,z_i+h_i,z_j+h_j,z_{ij}+h_{ij}\right)-f_{ij}\left(z_R,z_i,z_j,z_{ij}\right)$$
$$=h_R\left(f_{ij}'+\varepsilon_{ij}\right)+h_i\left(f_j'+\varepsilon_j\right)+h_j\left(f_i'+\varepsilon_i\right)+h_{ij}\left(f_R'+\varepsilon_R\right)$$

上記４式で、

z_Rでの偏微分を $h_i=h_j=h_{ij}=0,h_R\to 0$

z_iでの偏微分を $h_R=h_j=h_{ij}=0,h_i\to 0$

z_jでの偏微分を $h_R=h_i=h_{ij}=0,h_j\to 0$

z_{ij}での偏微分を $h_R=h_i=h_j=0,h_{ij}\to 0$

として計算すると、

$$\begin{cases}
f_R'=\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\\
f_i'=-\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}=-\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\\
f_j'=-\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}=-\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\\
f_{ij}'=\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}=-\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}=-\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}
\end{cases}$$

が成り立つ。Cauchy-Riemann の関係式の拡張になる。再度、この関係を使うと

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}+i\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}+j\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}+ij\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\\
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}-i\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}+j\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}-ij\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\\
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}+i\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}-j\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}-ij\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\\
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}-i\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}-j\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}+ij\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}-i\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}-j\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}+ij\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\\
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}+i\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}-j\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}-ij\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\\
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}-i\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}+j\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}-ij\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\\
\dfrac{\partial F}{\partial Z}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}+i\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}+j\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}+ij\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}
\end{cases}$$

ヤコビアン

複素空間 **Z** の微小領域 $\mathbf{A}_Z$ が、$W=F(Z)$により複素空間 **W** の微小領域 $\mathbf{A}_W$ に写されるとする。関数 f_R,f_i,f_j,f_{ij} が z_R,z_i,z_j,z_{ij} で偏微分可能ならば、

$\lim\dfrac{\mathbf{A}_W}{\mathbf{A}_Z}=\dfrac{\partial\left(f_R,f_i,f_j,f_{ij}\right)}{\partial\left(z_R,z_i,z_j,z_{ij}\right)}$が成り立つ。なお、簡便化するため、$\lim\dfrac{\mathbf{A}_W}{\mathbf{A}_Z}=J$と表記する。

$$J=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_R}{\partial z_i} & \dfrac{\partial f_R}{\partial z_j} & \dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\\
\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_i}{\partial z_i} & \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} & \dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}\\
\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_j}{\partial z_i} & \dfrac{\partial f_j}{\partial z_j} & \dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}\\
\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i} & \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j} & \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}
\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R} & -\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R} & -\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\\
\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_R}{\partial z_R} & -\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & -\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}\\
\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R} & -\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_R}{\partial z_R} & -\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}\\
\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_j}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_i}{\partial z_R} & \dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}
\end{vmatrix}$$

簡略化するため

$$\frac{\partial f_R}{\partial z_R}=\eta_R,\frac{\partial f_i}{\partial z_R}=\eta_i,\frac{\partial f_j}{\partial z_R}=\eta_j,\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}=\eta_{ij}$$

とおく。

$$J=\begin{vmatrix}\eta_R & -\eta_i & -\mu_j & \eta_{ij}\\ \eta_i & \eta_R & -\eta_{ij} & -\eta_j\\ \eta_j & -\eta_{ij} & \eta_R & -\eta_i\\ \eta_{ij} & \eta_j & \eta_i & \eta_R\end{vmatrix}$$

第１列に第４列を加える

$$=\begin{vmatrix}\eta_R+\eta_{ij} & -\eta_i & -\eta_j & \eta_{ij}\\ \eta_i-\eta_j & \eta_R & -\eta_{ij} & -\eta_j\\ -\eta_i+\eta_j & -\eta_{ij} & \eta_R & -\eta_i\\ \eta_R+\eta_{ij} & \eta_j & \eta_i & \eta_R\end{vmatrix}$$

第３行に第２行を加える
第４行から第１行を引く

$$=\begin{vmatrix}\eta_R+\eta_{ij} & -\eta_i & -\eta_j & \eta_{ij}\\ \eta_i-\eta_j & \eta_R & -\eta_{ij} & -\eta_j\\ 0 & \eta_R-\eta_{ij} & \eta_R-\eta_{ij} & -\mu_i-\eta_j\\ 0 & \eta_i+\eta_j & \eta_i+\eta_j & \eta_R-\eta_{ij}\end{vmatrix}$$

第２列から第３列を引く

$$=\begin{vmatrix}\eta_R+\eta_{ij} & -\eta_i+\eta_j & -\eta_j & \eta_{ij}\\ \eta_i-\eta_j & \eta_R+\eta_{ij} & -\eta_{ij} & -\eta_j\\ 0 & 0 & \eta_R-\eta_{ij} & -\eta_i-\eta_j\\ 0 & 0 & \eta_i+\eta_j & \eta_R-\eta_{ij}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\eta_R+\eta_{ij} & -\eta_i+\eta_j\\ \eta_i-\eta_j & \eta_R+\eta_{ij}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\eta_R-\eta_{ij} & -\eta_i-\eta_j\\ \eta_i+\eta_j & \eta_R-\eta_{ij}\end{vmatrix}$$

$$=\left((\eta_R+\eta_{ij})^2+(\eta_i-\eta_j)^2\right)\times\left((\eta_R-\eta_{ij})^2+(\eta_i+\eta_j)^2\right)$$

Cauchy-Riemann の関係式の拡張、

$$\frac{\partial F}{\partial Z}=\frac{\partial f_R}{\partial z_R}+i\frac{\partial f_i}{\partial z_R}+j\frac{\partial f_j}{\partial z_R}+ij\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}$$

より、

$$J=\left((\eta_R+\eta_{ij})^2+(\eta_i-\eta_j)^2\right)\times\left((\eta_R-\eta_{ij})^2+(\eta_i+\eta_j)^2\right)$$

$$=\left(\left(\frac{\partial f_R}{\partial z_R}+\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\right)^2+\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_R}-\frac{\partial f_j}{\partial z_R}\right)^2\right)$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial f_R}{\partial z_R}-\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\right)^2+\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_R}+\frac{\partial f_j}{\partial z_R}\right)^2\right)$$

$$=\left\|F'(Z)\right\|^4$$

となり、ヤコビアン J は微分の絶対値となる。 $J=0$ となるのは、点 Z_0 で、$\eta_R=-\eta_{ij},\eta_i=\eta_j$ または $\eta_R=\eta_{ij},\eta_i=-\eta_j$ のときである。この関係は、最初の除法が成り立たない条件と一致する。

定理

点 Z_0 で $W_0=F(Z_0), F'(Z_0)\neq 0$ とすれば、つまり $F'(Z_0)\notin \mathbf{O}_Z$ ならば、$J>0$ になる。
Z_0 の近傍と W_0 の近傍が１対１対応し、逆関数が存在し、その逆関数は微分可能である。
（証明）

$$\begin{aligned}Z&=F^{-1}(W)\\&=\Omega(W)\\&=\omega_R(w_R,w_i,w_j,w_{ij})\\&\quad+\omega_i(w_R,w_i,w_j,w_{ij})i\\&\quad+\omega_j(w_R,w_i,w_j,w_{ij})j\\&\quad+\omega_{ij}(w_R,w_i,w_j,w_{ij})ij\end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{cases}w_R=f_R(z_R,z_i,z_j,z_{ij})\\ w_i=f_i(z_R,z_i,z_j,z_{ij})\\ w_j=f_j(z_R,z_i,z_j,z_{ij})\\ w_{ij}=f_{ij}(z_R,z_i,z_j,z_{ij})\end{cases}$$

$$\begin{cases}z_R=\omega_R(w_R,w_i,w_j,w_{ij})\\ z_i=\omega_i(w_R,w_i,w_j,w_{ij})\\ z_j=\omega_j(w_R,w_i,w_j,w_{ij})\\ z_{ij}=\omega_{ij}(w_R,w_i,w_j,w_{ij})\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
dw_R = \dfrac{\partial f_R}{\partial z_R} dz_R + \dfrac{\partial f_R}{\partial z_i} dz_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial f_R}{\partial z_j} dz_j + \dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}} dz_{ij} \\
dw_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial z_R} dz_R + \dfrac{\partial f_i}{\partial z_i} dz_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j + \dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}} dz_{ij} \\
dw_j = \dfrac{\partial f_j}{\partial z_R} dz_R + \dfrac{\partial f_j}{\partial z_i} dz_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial f_j}{\partial z_j} dz_j + \dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}} dz_{ij} \\
dw_{ij} = \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} dz_R + \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i} dz_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j} dz_j + \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}} dz_{ij}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
dz_R = \dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_R} dw_R + \dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_i} dw_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_j} dw_j + \dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \\
dz_i = \dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_R} dw_R + \dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_i} dw_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_j} dw_j + \dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \\
dz_j = \dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_R} dw_R + \dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_i} dw_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j} dw_j + \dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \\
dz_{ij} = \dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R} dw_R + \dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i} dw_i \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j} dw_j + \dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} dw_{ij}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
dw_R = {} & \frac{\partial f_R}{\partial z_R}\left(\frac{\partial \omega_R}{\partial w_R} dw_R + \frac{\partial \omega_R}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial \omega_R}{\partial w_j} dw_j + \frac{\partial \omega_R}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \right) \\
& + \frac{\partial f_R}{\partial z_i}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial w_R} dw_R + \frac{\partial \omega_i}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial \omega_i}{\partial w_j} dw_j + \frac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \right) \\
& + \frac{\partial f_R}{\partial z_j}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial w_R} dw_R + \frac{\partial \omega_j}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial \omega_j}{\partial w_j} dw_j + \frac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \right) \\
& + \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R} dw_R + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j} dw_j + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} dw_{ij} \right) \\
= {} & dw_R\left(\frac{\partial f_R}{\partial z_R}\frac{\partial \omega_R}{\partial w_R} + \frac{\partial f_R}{\partial z_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial w_R} + \frac{\partial f_R}{\partial z_j}\frac{\partial \omega_j}{\partial w_R} + \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R} \right) \\
& + dw_i\left(\frac{\partial f_R}{\partial z_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial w_i} + \frac{\partial f_R}{\partial z_R}\frac{\partial \omega_R}{\partial w_i} + \frac{\partial f_R}{\partial z_j}\frac{\partial \omega_j}{\partial w_i} + \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i} \right) \\
& + dw_j\left(\frac{\partial f_R}{\partial z_j}\frac{\partial \omega_j}{\partial w_j} + \frac{\partial f_R}{\partial z_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial w_j} + \frac{\partial f_R}{\partial z_j}\frac{\partial \omega_j}{\partial w_j} + \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j} \right) \\
& + dw_{ij}\left(\frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} + \frac{\partial f_R}{\partial z_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}} + \frac{\partial f_R}{\partial z_j}\frac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}} + \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} \right)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R}=1\\ \dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i}=0\\ \dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j}=0\\ \dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}=0\end{cases}$$

同様な計算方法で、

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R}=0\\ \dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i}=1\\ \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j}=0\\ \dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R}=0\\ \dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i}=0\\ \dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j}=1\\ \dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_R}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R}=0\\ \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\dfrac{\partial \omega_R}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_i}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i}=0\\ \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_j}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j}=0\\ \dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\dfrac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\dfrac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}}+\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\dfrac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}}=1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial z_R} & \frac{\partial f_R}{\partial z_i} & \frac{\partial f_R}{\partial z_j} & \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_i}{\partial z_R} & \frac{\partial f_i}{\partial z_i} & \frac{\partial f_i}{\partial z_j} & \frac{\partial f_i}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_j}{\partial z_R} & \frac{\partial f_j}{\partial z_i} & \frac{\partial f_j}{\partial z_j} & \frac{\partial f_j}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_i} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_j} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_R}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_j}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$J > 0$より、左側は正則行列だから

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial z_R} & \frac{\partial f_R}{\partial z_i} & \frac{\partial f_R}{\partial z_j} & \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_i}{\partial z_R} & \frac{\partial f_i}{\partial z_i} & \frac{\partial f_i}{\partial z_j} & \frac{\partial f_i}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_j}{\partial z_R} & \frac{\partial f_j}{\partial z_i} & \frac{\partial f_j}{\partial z_j} & \frac{\partial f_j}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_i} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_j} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_R}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_j}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} \end{pmatrix}$$

の関係がある。

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_R}{\partial z_R} & \frac{\partial f_R}{\partial z_i} & \frac{\partial f_R}{\partial z_j} & \frac{\partial f_R}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_i}{\partial z_R} & \frac{\partial f_i}{\partial z_i} & \frac{\partial f_i}{\partial z_j} & \frac{\partial f_i}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_j}{\partial z_R} & \frac{\partial f_j}{\partial z_i} & \frac{\partial f_j}{\partial z_j} & \frac{\partial f_j}{\partial z_{ij}} \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_R} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_i} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_j} & \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_R}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_R}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_i}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_j}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_j}{\partial w_{ij}} \\ \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_R} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_i} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_j} & \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial w_{ij}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\frac{\partial(f_R, f_i, f_j, f_{ij})}{\partial(z_R, z_i, z_j, z_{ij})} \frac{\partial(\omega_R, \omega_i, \omega_j, \omega_{ij})}{\partial(w_R, w_i, w_j, w_{ij})} = 1$$

したがって、逆関数が存在し、その逆関数は微分可能である。

（証明完）

定理

$$Z = z_R + z_i i + z_j j + z_{ij} ij$$
$$= \|Z\| (\cos\theta_i + i \sin\theta_i)(\cos\theta_j + j \sin\theta_j) \times (\cosh\theta_{ij} + ij \sinh\theta_{ij})$$
$$= \|Z\| e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}$$

のとき、ヤコビアン

$$\frac{\partial Z}{\partial(\|Z\|, \theta_i, \theta_j, \theta_{ij})} = \|Z\|^3$$

（証明）

$$\begin{cases} z_R = \|Z\|\cos\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \|Z\|\sin\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} \\ z_i = \|Z\|\sin\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \|Z\|\cos\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} \\ z_j = \|Z\|\cos\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \|Z\|\sin\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} \\ z_{ij} = \|Z\|\sin\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \|Z\|\cos\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial \|Z\|} = \cos\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \sin\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} = \dfrac{z_R}{\|Z\|} \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial \|Z\|} = \sin\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \cos\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} = \dfrac{z_i}{\|Z\|} \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial \|Z\|} = \cos\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \sin\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} = \dfrac{z_j}{\|Z\|} \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \|Z\|} = \sin\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \cos\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} = \dfrac{z_{ij}}{\|Z\|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial \theta_i} = -\|Z\|\sin\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \|Z\|\cos\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} = -z_i \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial \theta_i} = \|Z\|\cos\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \|Z\|\sin\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} = z_R \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial \theta_i} = -\|Z\|\sin\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \|Z\|\cos\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} = -z_{ij} \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \theta_i} = \|Z\|\cos\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \|Z\|\sin\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} = z_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial \theta_j} = -\|Z\|\cos\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \|Z\|\sin\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} = -z_j \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial \theta_j} = -\|Z\|\sin\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \|Z\|\cos\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} = -z_{ij} \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial \theta_j} = \|Z\|\cos\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad + \|Z\|\sin\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} = z_R \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \theta_j} = \|Z\|\sin\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} \\ \qquad - \|Z\|\cos\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} = z_i \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z_R}{\partial \theta_{ij}} = \|Z\| \cos\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} \\
\qquad\qquad + \|Z\| \sin\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} = z_{ij} \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \theta_{ij}} = \|Z\| \sin\theta_i \cos\theta_j \sinh\theta_{ij} \\
\qquad\qquad - \|Z\| \cos\theta_i \sin\theta_j \cosh\theta_{ij} = -z_j \\
\dfrac{\partial z_j}{\partial \theta_{ij}} = \|Z\| \cos\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} \\
\qquad\qquad - \|Z\| \sin\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} = -z_i \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \theta_{ij}} = \|Z\| \sin\theta_i \sin\theta_j \sinh\theta_{ij} \\
\qquad\qquad + \|Z\| \cos\theta_i \cos\theta_j \cosh\theta_{ij} = z_R
\end{cases}
$$

$$
J = \frac{\partial(z_R, z_i, z_j, z_{ij})}{\partial(r, \theta_i, \theta_j, \theta_{ij})}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial z_R}{\partial \|Z\|} & \dfrac{\partial z_R}{\partial \theta_i} & \dfrac{\partial z_R}{\partial \theta_j} & \dfrac{\partial z_R}{\partial \theta_{ij}} \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \|Z\|} & \dfrac{\partial z_i}{\partial \theta_i} & \dfrac{\partial z_i}{\partial \theta_j} & \dfrac{\partial z_i}{\partial \theta_{ij}} \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \|Z\|} & \dfrac{\partial z_j}{\partial \theta_i} & \dfrac{\partial z_j}{\partial \theta_j} & \dfrac{\partial z_j}{\partial \theta_{ij}} \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \|Z\|} & \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \theta_i} & \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \theta_j} & \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \theta_{ij}}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\dfrac{z_R}{\|Z\|} & -z_i & -z_j & z_{ij} \\
\dfrac{z_i}{\|Z\|} & z_R & -z_{ij} & -z_j \\
\dfrac{z_j}{\|Z\|} & -z_{ij} & z_R & -z_i \\
\dfrac{z_{ij}}{\|Z\|} & z_j & z_i & z_R
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\|Z\|} \begin{vmatrix}
z_R & -z_i & -z_j & z_{ij} \\
z_i & z_R & -z_{ij} & -z_j \\
z_j & -z_{ij} & z_R & -z_i \\
z_{ij} & z_j & z_i & z_R
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\|Z\|} \left(\left(z_R + z_{ij} \right)^2 + \left(z_i - z_j \right)^2 \right)
$$

$$
\times \left(\left(z_R - z_{ij} \right)^2 + \left(z_i + z_j \right)^2 \right)
$$

$$
= \|Z\|^3
$$

（証明完）

ヤコビアン No.2

定理

$$\begin{aligned}Z &= z_R + z_i i + z_j j + z_{ij} ij \\ &= |Z|\left(\cos\varphi_i + i\sin\varphi_i\right)\left(\cos\varphi_j + j\sin\varphi_j\right) \\ &\qquad \times\left(\cos\varphi_{ij} + ij\sin\varphi_{ij}\right) \\ &= |Z| e^{i\varphi_i + j\varphi_j}\left(\cos\varphi_{ij} + ij\sin\varphi_{ij}\right)\end{aligned}$$

のとき、ヤコビアン

$$\frac{\partial Z}{\partial\left(|Z|, \varphi_i, \varphi_j, \varphi_{ij}\right)} = |Z|^3 \cos 2\varphi_{ij}$$

（証明）

$$\begin{cases} z_R = |Z|\left(\cos\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\ z_i = |Z|\left(\sin\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \cos\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\ z_j = |Z|\left(\cos\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \sin\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\ z_{ij} = |Z|\left(\cos\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial |Z|} = \cos\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij} \\ \qquad\qquad + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial |Z|} = \sin\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij} \\ \qquad\qquad - \cos\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial |Z|} = \cos\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij} \\ \qquad\qquad - \sin\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial |Z|} = \cos\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\ \qquad\qquad + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij} \end{cases}$$

したがって、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial |Z|} = \dfrac{z_R}{|Z|} \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial |Z|} = \dfrac{z_i}{|Z|} \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial |Z|} = \dfrac{z_j}{|Z|} \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial |Z|} = \dfrac{z_{ij}}{|Z|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_i} = |Z|\left(-\sin\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \cos\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_i} = |Z|\left(\cos\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_i} = |Z|\left(-\sin\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \cos\varphi_i \cos\varphi_j \sin\theta_{ij}\right) \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_i} = |Z|\left(-\sin\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \cos\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right) \end{cases}$$

したがって、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_i} = -z_i \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_i} = z_R \\ \dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_i} = -z_{ij} \\ \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_i} = z_j \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_j} = |Z|\left(-\cos\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_j} = |Z|\left(-\sin\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. - \cos\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\
\dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_j} = |Z|\left(\cos\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right) \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_j} = |Z|\left(-\cos\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right)
\end{cases}
$$

したがって

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_j} = -z_j \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_j} = -z_{ij} \\
\dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_j} = z_R \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_j} = z_i
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_{ij}} = |Z|\left(-\cos\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \sin\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right) \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_{ij}} = |Z|\left(-\sin\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. - \cos\varphi_i \sin\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right) \\
\dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_{ij}} = |Z|\left(-\cos\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. - \sin\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij}\right) \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} = |Z|\left(\cos\varphi_i \cos\varphi_j \cos\varphi_{ij} \right. \\
\qquad\qquad \left. - \sin\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}\right)
\end{cases}
$$

したがって

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_{ij}} = z_{ij} - 2|Z|\cos\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_{ij}} = -z_j - 2|Z|\sin\varphi_i \cos\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\
\dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_{ij}} = -z_i - 2|Z|\cos\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij} \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} = z_R - 2|Z|\sin\varphi_i \sin\varphi_j \sin\varphi_{ij}
\end{cases}
$$

簡単にするため、

$$
\begin{cases}
\cos\varphi_i \cos\varphi_j = \omega_R \\
\sin\varphi_i \cos\varphi_j = \omega_i \\
\cos\varphi_i \sin\varphi_j = \omega_j \\
\sin\varphi_i \sin\varphi_j = \omega_{ij}
\end{cases}
$$

とおく。

$$
J = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial z_R}{\partial |Z|} & \dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_i} & \dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_j} & \dfrac{\partial z_R}{\partial \varphi_{ij}} \\
\dfrac{\partial z_i}{\partial |Z|} & \dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_i} & \dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_j} & \dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi_{ij}} \\
\dfrac{\partial z_j}{\partial |Z|} & \dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_i} & \dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_j} & \dfrac{\partial z_j}{\partial \varphi_{ij}} \\
\dfrac{\partial z_{ij}}{\partial |Z|} & \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_i} & \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_j} & \dfrac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_{ij}}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\dfrac{z_R}{|Z|} & -z_i & -z_j & z_{ij} - 2|Z|\omega_R \sin\varphi_{ij} \\
\dfrac{z_i}{|Z|} & z_R & -z_{ij} & -z_j - 2|Z|\omega_i \sin\varphi_{ij} \\
\dfrac{z_j}{|Z|} & -z_{ij} & z_R & -z_i - 2|Z|\omega_j \sin\varphi_{ij} \\
\dfrac{z_{ij}}{|Z|} & z_j & z_i & z_R - 2|Z|\omega_{ij} \sin\varphi_{ij}
\end{vmatrix}
$$

第 4 列を分解する。

$$
=\begin{vmatrix} \frac{z_R}{|Z|} & -z_i & -z_j & z_{ij} \\ \frac{z_i}{|Z|} & z_R & -z_{ij} & -z_j \\ \frac{z_j}{|Z|} & -z_{ij} & z_R & -z_i \\ \frac{z_{ij}}{|Z|} & z_j & z_i & z_R \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} \frac{z_R}{|Z|} & -z_i & -z_j & -2|Z|\omega_R \sin\varphi_{ij} \\ \frac{z_i}{|Z|} & z_R & -z_{ij} & -2|Z|\omega_i \sin\varphi_{ij} \\ \frac{z_j}{|Z|} & -z_{ij} & z_R & -2|Z|\omega_j \sin\varphi_{ij} \\ \frac{z_{ij}}{|Z|} & z_j & z_i & -2|Z|\omega_{ij} \sin\varphi_{ij} \end{vmatrix}
$$

第 1 行列の第 1 列の $\frac{1}{|Z|}$ をくくり出す。

第 2 行列の第 1 列の $\frac{1}{|Z|}$ 、第 4 列の $-2|Z|\sin\varphi_{ij}$ をくくり出す。

$$
=\frac{1}{|Z|}\begin{vmatrix} z_R & -z_i & -z_j & z_{ij} \\ z_i & z_R & -z_{ij} & -z_j \\ z_j & -z_{ij} & z_R & -z_i \\ z_{ij} & z_j & z_i & z_R \end{vmatrix}
$$

$$
-2\begin{vmatrix} z_R & -z_i & -z_j & \omega_R \\ z_i & z_R & -z_{ij} & \omega_i \\ z_j & -z_{ij} & z_R & \omega_j \\ z_{ij} & z_j & z_i & \omega_{ij} \end{vmatrix}\sin\varphi_{ij}
$$

$$
\begin{vmatrix} z_R & -z_i & -z_j & z_{ij} \\ z_i & z_R & -z_{ij} & -z_j \\ z_j & -z_{ij} & z_R & -z_i \\ z_{ij} & z_j & z_i & z_R \end{vmatrix} = J_1
$$

$$
\begin{vmatrix} z_R & -z_i & -z_j & \omega_R \\ z_i & z_R & -z_{ij} & \omega_i \\ z_j & -z_{ij} & z_R & \omega_j \\ z_{ij} & z_j & z_i & \omega_{ij} \end{vmatrix} = J_2
$$

とおくと、

$$
J=\frac{1}{|Z|}J_1-2J_2\sin\varphi_{ij}
$$

$$
\begin{cases} \omega_R+\omega_{ij}=\cos(\varphi_i-\varphi_j) \\ \omega_R-\omega_{ij}=\cos(\varphi_i+\varphi_j) \\ \omega_i-\omega_j=\sin(\varphi_i-\varphi_j) \\ \omega_i+\omega_j=\sin(\varphi_i+\varphi_j) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_R+z_{ij}}{|Z|} &= \cos\varphi_i\cos\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&\quad +\sin\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad +\cos\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad +\sin\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&=\left(\cos\varphi_i\cos\varphi_j+\sin\varphi_i\sin\varphi_j\right) \\
&\quad \times\left(\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}\right) \\
&=\cos(\varphi_i-\varphi_j)\left(\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}\right) \\
&=(\omega_R+\omega_{ij})\left(\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_R-z_{ij}}{|Z|} &= \cos\varphi_i\cos\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&\quad +\sin\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad -\cos\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad -\sin\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&=\left(\cos\varphi_i\cos\varphi_j-\sin\varphi_i\sin\varphi_j\right) \\
&\quad \times\left(\cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}\right) \\
&=\cos(\varphi_i+\varphi_j)\left(\cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}\right) \\
&=(\omega_R-\omega_{ij})\left(\cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_i-z_j}{|Z|} &= \sin\varphi_i\cos\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&\quad -\cos\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad -\cos\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&\quad +\sin\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij}
\end{aligned}
$$

$$=\left(\sin\varphi_i\cos\varphi_j-\cos\varphi_i\sin\varphi_j\right)$$
$$\times\left(\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}\right)$$
$$=\sin\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\left(\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}\right)$$
$$=\left(\omega_i-\omega_j\right)\left(\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$\frac{z_i+z_j}{|Z|}=\sin\varphi_i\cos\varphi_j\cos\varphi_{ij}$$
$$-\cos\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij}$$
$$+\cos\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij}$$
$$-\sin\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij}$$
$$=\left(\sin\varphi_i\cos\varphi_j+\cos\varphi_i\sin\varphi_j\right)$$
$$\times\left(\cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}\right)$$
$$=\sin\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\left(\cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}\right)$$
$$=\left(\omega_i+\omega_j\right)\left(\cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$\begin{cases}\cos\varphi_{ij}+\sin\varphi_{ij}=\Omega_{+ij}\\ \cos\varphi_{ij}-\sin\varphi_{ij}=\Omega_{-ij}\end{cases}$$

と略記すると、

$$\begin{cases}\dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|}=\cos\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\Omega_{+ij}\\ \dfrac{z_R-z_{ij}}{|Z|}=\cos\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\Omega_{-ij}\\ \dfrac{z_i-z_j}{|Z|}=\sin\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\Omega_{+ij}\\ \dfrac{z_i+z_j}{|Z|}=\sin\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\Omega_{-ij}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|}=\left(\omega_R+\omega_{ij}\right)\Omega_{+ij}\\ \dfrac{z_R-z_{ij}}{|Z|}=\left(\omega_R-\omega_{ij}\right)\Omega_{-ij}\\ \dfrac{z_i-z_j}{|Z|}=\left(\omega_i-\omega_j\right)\Omega_{+ij}\\ \dfrac{z_i+z_j}{|Z|}=\left(\omega_i+\omega_j\right)\Omega_{-ij}\end{cases}$$

まず、

$$J_1=\left\{\left(z_R+z_{ij}\right)^2+\left(z_i-z_j\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{\left(z_R-z_{ij}\right)^2+\left(z_i+z_j\right)^2\right\}$$

となるのは明らか。

$$J_1=|Z|^4\left\{\left(\frac{z_R+z_{ij}}{|Z|}\right)^2+\left(\frac{z_i-z_j}{|Z|}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{z_R-z_{ij}}{|Z|}\right)^2+\left(\frac{z_i+z_j}{|Z|}\right)^2\right\}$$
$$=|Z|^4\,\Omega_{+ij}{}^2\Omega_{-ij}{}^2$$
$$=|Z|^4\left(\cos^2\varphi_{ij}-\sin^2\varphi_{ij}\right)^2$$

$$J_2=\begin{vmatrix}z_R & -z_i & -z_j & \omega_R\\ z_i & z_R & -z_{ij} & \omega_i\\ z_j & -z_{ij} & z_R & \omega_j\\ z_{ij} & z_j & z_i & \omega_{ij}\end{vmatrix}$$

第 2 列に第 3 列を加える

$$=\begin{vmatrix}z_R & -z_i-z_j & -z_j & \omega_R\\ z_i & z_R-z_{ij} & -z_{ij} & \omega_i\\ z_j & z_R-z_{ij} & z_R & \omega_j\\ z_{ij} & z_i+z_j & z_i & \omega_{ij}\end{vmatrix}$$

第 1 行に第 4 行を加える
第 2 行から第 3 行を引く

$$=\begin{vmatrix}z_R+z_{ij} & 0 & z_i-z_j & \omega_R+\omega_{ij}\\ z_i-z_j & 0 & -z_R-z_{ij} & \omega_i-\omega_j\\ z_j & z_R-z_{ij} & z_R & \omega_j\\ z_{ij} & z_i+z_j & z_i & \omega_{ij}\end{vmatrix}$$

第 1 列から $|Z|$ をくくり出す

第 4 列に Ω_{+ij} をかけて、その分

$\dfrac{1}{\Omega_{+ij}}$ をくくり出す。

$$
=\frac{|Z|}{\Omega_{+ij}}\times\begin{vmatrix} \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} & 0 & z_i-z_j & \left(\omega_R+\omega_{ij}\right)\Omega_{+ij} \\ \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} & 0 & -z_R-z_{ij} & \left(\omega_i-\omega_j\right)\Omega_{+ij} \\ \dfrac{z_j}{|Z|} & z_R-z_{ij} & z_R & \omega_j\Omega_{+ij} \\ \dfrac{z_{ij}}{|Z|} & z_i+z_j & z_i & \omega_{ij}\Omega_{+ij} \end{vmatrix}
$$

第１行４列、第２行４列の式を置き換える。

$$
=\frac{|Z|}{\Omega_{+ij}}\times\begin{vmatrix} \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} & 0 & z_i-z_j & \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} \\ \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} & 0 & -z_R-z_{ij} & \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} \\ \dfrac{z_j}{|Z|} & z_R-z_{ij} & z_R & \omega_j\Omega_{+ij} \\ \dfrac{z_{ij}}{|Z|} & z_i+z_j & z_i & \omega_{ij}\Omega_{+ij} \end{vmatrix}
$$

第１列から第４列を引く。

$$
=\frac{|Z|}{\Omega_{+ij}}\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & z_i-z_j & \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} \\ 0 & 0 & -z_R-z_{ij} & \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} \\ \dfrac{z_j}{|Z|}-\omega_j\Omega_{+ij} & z_R-z_{ij} & z_R & \omega_j\Omega_{+ij} \\ \dfrac{z_{ij}}{|Z|}-\omega_{ij}\Omega_{+ij} & z_i+z_j & z_i & \omega_{ij}\Omega_{+ij} \end{vmatrix}
$$

第１行と第３行を入れかえる
第２行と第４行を入れかえる

$$
=\frac{|Z|}{\Omega_{+ij}}\times\begin{vmatrix} \dfrac{z_j}{|Z|}-\omega_j\Omega_{+ij} & z_R-z_{ij} & z_R & \omega_j\Omega_{+ij} \\ \dfrac{z_{ij}}{|Z|}-\omega_{ij}\Omega_{+ij} & z_i+z_j & z_i & \omega_{ij}\Omega_{+ij} \\ 0 & 0 & z_i-z_j & \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} \\ 0 & 0 & -z_R-z_{ij} & \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{|Z|}{\Omega_{+ij}}\begin{vmatrix} \dfrac{z_j}{|Z|}-\omega_j\Omega_{+ij} & z_R-z_{ij} \\ \dfrac{z_{ij}}{|Z|}-\omega_{ij}\Omega_{+ij} & z_i+z_j \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} z_i-z_j & \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} \\ -z_R-z_{ij} & \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} \end{vmatrix}
$$

第１行列の第２列、第２行列の第１列から、それぞれ$|Z|$をくくり出す

$$
=\frac{|Z|^3}{\Omega_{+ij}}\begin{vmatrix} \dfrac{z_j}{|Z|}-\omega_j\Omega_{+ij} & \dfrac{z_R-z_{ij}}{|Z|} \\ \dfrac{z_{ij}}{|Z|}-\omega_{ij}\Omega_{+ij} & \dfrac{z_i+z_j}{|Z|} \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} & \dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} \\ -\dfrac{z_R+z_{ij}}{|Z|} & \dfrac{z_i-z_j}{|Z|} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_j}{|Z|}-\omega_j\Omega_{+ij} &= \cos\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&\quad -\sin\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad -\cos\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij} \\
&\quad -\cos\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&= -\sin\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&\quad -\cos\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij} \\
&= -\sin\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\sin\varphi_{ij}
\end{aligned}
$$

$$\frac{z_{ij}}{|Z|}-\omega_{ij}\Omega_{+ij}=\cos\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij}$$
$$+\sin\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij}$$
$$-\sin\varphi_i\sin\varphi_j\cos\varphi_{ij}$$
$$-\sin\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij}$$
$$=\cos\varphi_i\cos\varphi_j\sin\varphi_{ij}$$
$$-\sin\varphi_i\sin\varphi_j\sin\varphi_{ij}$$
$$=\cos\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\sin\varphi_{ij}$$

$$J_2=\frac{|Z|^3}{\Omega_{+ij}}$$
$$\times\begin{vmatrix}-\sin\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\sin\varphi_{ij} & \cos\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\Omega_{-ij}\\ \cos\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\sin\varphi_{ij} & \sin\left(\varphi_i+\varphi_j\right)\Omega_{-ij}\end{vmatrix}$$
$$\times\begin{vmatrix}\sin\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\Omega_{+ij} & \cos\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\Omega_{+ij}\\ -\cos\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\Omega_{+ij} & \sin\left(\varphi_i-\varphi_j\right)\Omega_{+ij}\end{vmatrix}$$
$$=-|Z|^3\,\Omega_{+ij}\Omega_{-ij}\sin\varphi_{ij}$$
$$=-|Z|^3\left(\cos^2\varphi_{ij}-\sin^2\varphi_{ij}\right)\sin\varphi_{ij}$$

したがって

$$J=\frac{1}{|Z|}J_1-2J_2\sin\varphi_{ij}$$
$$=|Z|^3\left(\cos^2\varphi_{ij}-\sin^2\varphi_{ij}\right)^2$$
$$+2|Z|^3\left(\cos^2\varphi_{ij}-\sin^2\varphi_{ij}\right)\sin^2\varphi_{ij}$$
$$=|Z|^3\left(\cos^2\varphi_{ij}-\sin^2\varphi_{ij}\right)$$
$$\times\left(\cos^2\varphi_{ij}+\sin^2\varphi_{ij}\right)$$
$$=|Z|^3\cos 2\varphi_{ij}$$

（証明完）

定理（応用例）

半径 R の 4 次元の球の体積は、

$$V=\frac{1}{2}\pi^2R^4$$

（証明）

$$V=\int_{|Z|\le R}dZ$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{\partial Z}{\partial\left(r,\varphi_i,\varphi_j,\varphi_{ij}\right)}drd\varphi_id\varphi_jd\varphi_{ij}$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\cos 2\varphi_{ij}drd\varphi_id\varphi_jd\varphi_{ij}$$
$$=\frac{R^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi_{ij}d\varphi_id\varphi_jd\varphi_{ij}$$
$$=\frac{\pi R^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi_{ij}d\varphi_jd\varphi_{ij}$$
$$=\frac{\pi^2R^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi_{ij}d\varphi_{ij}$$
$$=\frac{\pi^2R^4}{4}\left[\sin 2\varphi_{ij}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi^2R^4}{2}$$

調和関数

$$F(Z)=f_R(Z)+f_i(Z)i+f_j(Z)j+f_{ij}(Z)ij$$

において、

$$f_R(Z)=f_R(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$$
$$f_i(Z)=f_i(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$$
$$f_j(Z)=f_j(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$$
$$f_{ij}(Z)=f_{ij}(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$$

が領域 **D** でそれぞれ正則とする。つまり、関数 f_R,f_i,f_j,f_{ij} が z_R,z_i,z_j,z_{ij} で偏微分可能とする。

次に、関数 f_R,f_i,f_j,f_{ij} が z_R,z_i,z_j,z_{ij} で２階偏微分可能とする。

Cauchy-Riemann の関係式の拡張式を使う。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\\[2ex] -\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}=-\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\\[2ex] -\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}=-\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\\[2ex] \dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}=-\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}=-\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}\end{cases}$$

関係式を上から順に z_R,z_i,z_j,z_{ij} で偏微分する。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R^2}=\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R\partial z_i}=\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_R\partial z_j}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_R\partial z_{ij}}\\[2ex] -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i^2}=\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R\partial z_i}=-\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_i\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_i\partial z_j}\\[2ex] -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_j^2}=-\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_j\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_R\partial z_j}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_i\partial z_j}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_{ij}^2}=-\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_j\partial z_{ij}}=-\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_i\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_R\partial z_{ij}}\end{cases}$$

この式の中で

$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R^2}=\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R\partial z_i},-\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i^2}=\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R\partial z_i}$ より、

$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R^2}+\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i^2}=0$ が成り立つ。

同様な方法で計算すると、

$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R^2}+\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_j^2}=0$、$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R^2}-\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_{ij}^2}=0$、

$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i^2}-\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_j^2}=0$、$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i^2}+\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_{ij}^2}=0$、

$\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_j^2}+\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_{ij}^2}=0$

が成り立つ。

関係式を上から順に z_i,z_R,z_{ij},z_j で偏微分する。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R\partial z_i}=\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i^2}=\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_i\partial z_j}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_i\partial z_{ij}}\\[2ex] -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R\partial z_i}=\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R^2}=-\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_R\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_R\partial z_j}\\[2ex] -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_j\partial z_{ij}}=-\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_{ij}^2}=\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_R\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_i\partial z_{ij}}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_j\partial z_{ij}}=-\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_j^2}=-\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_i\partial z_j}=\dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_R\partial z_j}\end{cases}$$

より、

$\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R^2}+\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i^2}=0$、$\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R^2}+\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_j^2}=0$、

$\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R^2}-\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_{ij}^2}=0$、$\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i^2}-\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_j^2}=0$、

$\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i^2}+\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_{ij}^2}=0$、$\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_j^2}+\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_{ij}^2}=0$

関係式を上から順に z_j,z_{ij},z_R,z_i で偏微分する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R \partial z_j} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i \partial z_j} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial {z_j}^2} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_j \partial z_{ij}} \\ -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R \partial z_{ij}} = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial {z_{ij}}^2} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_j \partial z_{ij}} \\ -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R \partial z_j} = -\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial {z_R}^2} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_R \partial z_i} \\ \dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i \partial z_{ij}} = -\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i \partial z_j} = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial {z_i}^2} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_R \partial z_i} \end{cases}$$

より、

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_R}^2} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_i}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_R}^2} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_R}^2} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_i}^2} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_i}^2} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_j}^2} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_{ij}}^2} = 0$$

関係式を上から順に z_{ij}, z_j, z_i, z_R で偏微分する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_j \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_{ij}}^2} \\ -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i \partial z_j} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R \partial z_j} = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_j \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_j}^2} \\ -\dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_i \partial z_j} = -\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_i \partial z_{ij}} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_R \partial z_i} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_i}^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_R}{\partial z_R \partial z_{ij}} = -\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial z_R \partial z_j} = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial z_R \partial z_i} = \dfrac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_R}^2} \end{cases}$$

より、

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_R}^2} + \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_i}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_R}^2} + \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_R}^2} - \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_i}^2} - \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_i}^2} + \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_j}^2} + \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_{ij}}^2} = 0$$

以上をまとめると、下記の偏微分の式を除いてすべて調和関数の関係がある。

$$\frac{\partial^2 f_R}{\partial {z_R}^2} - \frac{\partial^2 f_R}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_R}{\partial {z_i}^2} - \frac{\partial^2 f_R}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial {z_R}^2} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial {z_i}^2} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_R}^2} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_i}^2} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial {z_j}^2} = 0、$$

$$\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_R}^2} - \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_{ij}}^2} = 0、\quad \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_i}^2} - \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial {z_j}^2} = 0$$

複素平面上の関数同様、以下の定理が成り立つ。

平均値の定理

実数項、i 項、j 項、ij 項それぞれの領域を $\mathbf{D}_R,\mathbf{D}_i,\mathbf{D}_j,\mathbf{D}_{ij}$ とし、
$\mathbf{D}=\mathbf{D}_R\times\mathbf{D}_i\times\mathbf{D}_j\times\mathbf{D}_{ij}$ とする。$f(Z)$ が領域 $\mathbf{D}$ で正則とし、$\mathbf{D}$ 内の２点 Z_1,Z_2 を結ぶ線分も $\mathbf{D}$ 内にある場合、

$$\frac{f(Z_2)-f(Z_1)}{Z_2-Z_1}$$
$$=\mathrm{Re}[f'(C_R)]+i\,\mathrm{Im}_i[f'(C_i)]$$
$$+j\,\mathrm{Im}_j[f'(C_j)]+ij\,\mathrm{Im}_{ij}[f'(C_{ij})]$$

を満たす点 C_R,C_i,C_j,C_{ij} が存在する。

ベキ級数 $F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(Z-A)^n$ が、範囲 $|Z-A|<Z_0$ で収束すれば、範囲内の各点で微分可能で、
$F'(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(Z-A)^{n-1}$ となる。
p 回微分可能ならば、

$$F^{(p)}(Z)$$
$$=\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdot\cdot(n-p+1)c_n(Z-A)^{n-p}$$

となり、その中心 A においては、
$F^{(p)}(A)=p!c_p$ つまり $c_p=\dfrac{F^{(p)}(A)}{p!}$ が成り立つ。

複素積分

はじめに

まず、２変数 Z_i, Z_j による多変数関数として扱う。積空間 $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_i\times\mathbf{Z}_j$ 内の領域 $\mathbf{D}=\mathbf{D}_i\times\mathbf{D}_j$ の点 Z_0 において、関数 F が全微分可能とする。

C_i, C_j を、点 $Z_0=(Z_{i0}, Z_{j0})$ を中心とする閉じた円とし、かつ C_i, C_j は $\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_j$ 内に含まれるとする。

Cauchy の積分公式が拡張された式が成り立つ。

$$F(Z_{i0}, Z_{j0})=\frac{1}{4\pi^2 ij}\times\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{F(\varsigma_i,\varsigma_j)}{(\varsigma_i-Z_{i0})(\varsigma_j-Z_{j0})}d\varsigma_i d\varsigma_j$$

さらに、両辺を偏微分し、

$$\frac{\partial^{k_i+k_j}}{\partial^{k_i}\partial^{k_j}}F(Z_{i0}, Z_{j0})=\frac{k_i!k_j!}{4\pi^2 ij}\times\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{F(\varsigma_i,\varsigma_j)}{(\varsigma_i-Z_{i0})^{k_i+1}(\varsigma_j-Z_{j0})^{k_j+1}}d\varsigma_i d\varsigma_j$$

が成り立つ。

Cauchy の積分公式の拡張式は、C_i, C_j 上の式、

$$\varsigma_i=Z_{i0}+r_i e^{i\theta_i}$$

$$\varsigma_j=Z_{j0}+r_j e^{j\theta_j}$$

で証明ができる。しかし、

$Z=z_R+z_i i+z_j j+z_{ij} ij$ とおいた場合、$Z=|Z|e^{\theta_i i+\theta_j j+\theta_{ij} ij}$ と極表示ができるので、$\varsigma_i=Z_{i0}+r_i e^{i\theta_i}$，$\varsigma_j=Z_{j0}+r_j e^{j\theta_j}$ との整合性を考えると、変数 θ_{ij} がない。なおかつ、変数 θ_{ij} に周期性がないので、何らかの隠された意味があるかもしれない。

ここでは、積空間 $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_i\times\mathbf{Z}_j$ 上の２変数関数の積分ではなく、４次元空間

$$\mathbf{Z}=\{Z : Z=(z_R, z_i, z_j, z_{ij}) = z_R+z_i i+z_j j+z_{ij} ij\}$$

上の積分を考える。１変数の複素数の場合、２次元空間なので、積分は線積分のみであった。今度は２変数の場合なので、４次元空間で積分を扱うことになり、線積分・面積分・立体積分が考えられる。

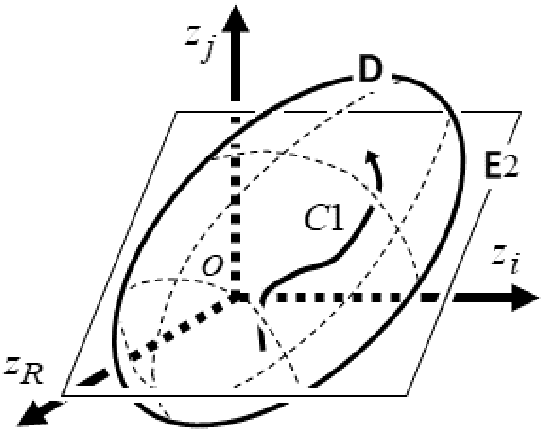
$C1$：線積分の曲線
$C2$：面積分の曲面
$C3$：立体積分の３次元領域
と記述することにする。

線積分

複素空間上のある領域 $\mathbf{D}$ を横切る平面 $\mathbf{E}2$ 上で、長さの有限な一つの経路（連続曲線）が

$$C1=\{Z : Z(t)=z_R(t)+z_i(t)i+z_j(t)j+z_{ij}(t)ij, t_0\le t\le t_1\}$$

で定義されている。関数 $F(Z)$ が $C1$ 上で定義されているとする。なお、下図において ij 軸は省略して記載した。



$$S1=\sum_{\nu=1}^{n}F(Z(\tau_\nu))(Z(t_\nu)-Z(t_{\nu-1}))$$

という式を作る。分割を一様に細かくし、分割のとり方にかかわらず $S1$ が有限な極限値を持つならば、その極限値を関数 $F(Z)$ の $C1$ にわたる（複素）線積分といい、

$$\lim_{n\to\infty}S1=\int_{C1}F(Z)dZ$$

で表す。

$$F(Z)=f_R(Z)+f_i(Z)i+f_j(Z)j+f_{ij}(Z)ij$$

$$f_R(Z)=f_R(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$

$$f_i(Z)=f_i(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$$

$f_j(Z)=f_j(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$
$f_{ij}(Z)=f_{ij}(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$
の場合を考察する。なお、
$Z(\tau_\nu)=(z_R(\tau_\nu),z_i(\tau_\nu),z_j(\tau_\nu),z_{ij}(\tau_\nu))$
に対し、
$f_R(Z(\tau_\nu))=f_R(\tau_\nu)$
$f_i(Z(\tau_\nu))=f_i(\tau_\nu)$
$f_j(Z(\tau_\nu))=f_j(\tau_\nu)$
$f_{ij}(Z(\tau_\nu))=f_{ij}(\tau_\nu)$
と略記する。

$$
\begin{aligned}
S1&=\sum_{\nu=1}^{n}F(Z(\tau_\nu))(Z(t_\nu)-Z(t_{\nu-1}))\\
&=\sum_{\nu=1}^{n}\{f_R(\tau_\nu)(z_R(t_\nu)-z_R(t_{\nu-1}))\\
&\qquad -f_i(\tau_\nu)(z_i(t_\nu)-z_i(t_{\nu-1}))\\
&\qquad -f_j(\tau_\nu)(z_j(t_\nu)-z_j(t_{\nu-1}))\\
&\qquad +f_{ij}(\tau_\nu)(z_{ij}(t_\nu)-z_{ij}(t_{\nu-1}))\}\\
&\quad +i\sum_{\nu=1}^{n}\{f_R(\tau_\nu)(z_i(t_\nu)-z_i(t_{\nu-1}))\\
&\qquad +f_i(\tau_\nu)(z_R(t_\nu)-z_R(t_{\nu-1}))\\
&\qquad -f_j(\tau_\nu)(z_{ij}(t_\nu)-z_{ij}(t_{\nu-1}))\\
&\qquad -f_{ij}(\tau_\nu)(z_j(t_\nu)-z_j(t_{\nu-1}))\}\\
&\quad +j\sum_{\nu=1}^{n}\{f_R(\tau_\nu)(z_j(t_\nu)-z_j(t_{\nu-1}))\\
&\qquad -f_i(\tau_\nu)(z_{ij}(t_\nu)-z_{ij}(t_{\nu-1}))\\
&\qquad +f_j(\tau_\nu)(z_R(t_\nu)-z_R(t_{\nu-1}))\\
&\qquad -f_{ij}(\tau_\nu)(z_i(t_\nu)-z_i(t_{\nu-1}))\}\\
&\quad +ij\sum_{\nu=1}^{n}\{f_R(\tau_\nu)(z_{ij}(t_\nu)-z_{ij}(t_{\nu-1}))\\
&\qquad +f_i(\tau_\nu)(z_j(t_\nu)-z_j(t_{\nu-1}))\\
&\qquad +f_j(\tau_\nu)(z_i(t_\nu)-z_i(t_{\nu-1}))\\
&\qquad +f_{ij}(\tau_\nu)(z_R(t_\nu)-z_R(t_{\nu-1}))\}\\
&=\{\int_{C1}f_R(t)dz_R-\int_{C1}f_i(t)dz_i\\
&\qquad -\int_{C1}f_j(t)dz_j+\int_{C1}f_{ij}(t)dz_{ij}\}\\
&\quad +i\{\int_{C1}f_R(t)dz_i+\int_{C1}f_i(t)dz_R\\
&\qquad -\int_{C1}f_j(t)dz_{ij}-\int_{C1}f_{ij}(t)dz_j\}\\
&\quad +j\{\int_{C1}f_R(t)dz_j-\int_{C1}f_i(t)dz_{ij}\\
&\qquad +\int_{C1}f_j(t)dz_R-\int_{C1}f_{ij}(t)dz_i\}\\
&\quad +ij\{\int_{C1}f_R(t)dz_{ij}+\int_{C1}f_i(t)dz_j\\
&\qquad +\int_{C1}f_j(t)dz_i+\int_{C1}f_{ij}(t)dz_R\}
\end{aligned}
$$

$C1$がtで微分可能ならば、

$$
\begin{aligned}
&\int_{C1}F(Z)dZ\\
&=\int_{t_0}^{t_1}(f_R(t)+f_i(t)i+f_j(t)j+f_{ij}(t)ij)\\
&\qquad\times(z_R{}'(t)+z_i{}'(t)i+z_j{}'(t)j+z_{ij}{}'(t)ij)dt\\
&=\int_{t_0}^{t_1}F(Z(t))Z'(t)dt
\end{aligned}
$$

が成り立つ。
積分の定義から、次の性質を導くことができる。

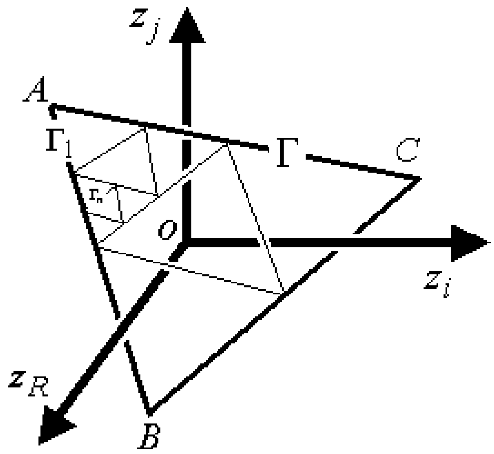
① $\int_{C1}(F(Z)\pm G(Z))dZ$
$$=\int_{C1}F(Z)dZ\pm\int_{C1}G(Z)dZ$$

② kが定数ならば、
$$\int_{C1}kF(Z)dZ=k\int_{C1}F(Z)dZ$$

③ $C1$を$C1_1$と$C1_2$に分けられるとき、
$$\int_{C1}F(Z)dZ=\int_{C1_1}F(Z)dZ+\int_{C1_2}F(Z)dZ$$

④ $C1$の経路$t_0\to t_1$を逆の経路$t_1\to t_0$にした場合を$^{-}C1$とすると、
$$\int_{C1}F(Z)dZ=-\int_{^{-}C1}F(Z)dZ$$

始点をZ_1、終点をZ_2とする。
$$\int_{C1}dZ=Z_2-Z_1$$
$$\int_{C1}ZdZ=\frac{1}{2}(Z_2{}^2-Z_1{}^2)$$
$C1$が閉曲線ならば、始点と終点が一致するので、$\int_{C1}dZ=0$、$\int_{C1}ZdZ=0$が成り立つ。
一般的に、経路$C1$にわたる積分は、$C1$の始点・終点の両端点が一致する屈折線Πにわたる積分と一致する。



ΔABCの外周をΓ、$\left|\int_{\Gamma} F(Z)dZ\right| = M$とおく。$\Gamma$の各辺の中点を結ぶ線分によって４つの合同三角形できる。Γにおける積分は、４つの三角形の周の積分の和に等しい。その中の１つをΓ_1とする。

$$\left|\int_{\Gamma_1} F(Z)dZ\right| \geq \frac{M}{4}$$

が成り立つ。Γの周の長さをlとすると、Γ_1の周の長さは$\frac{l}{2}$になる。次にΓ_1の各辺の中点を結ぶ線分によって三角形Γ_2を作る。同様な操作で続けることにより三角形の列$\{\Gamma_n\}$が作れる。

$\left|\int_{\Gamma_n} F(Z)dZ\right| \geq \frac{M}{4^n}$、$\Gamma_n$の周の長さは$\frac{l}{2^n}$

Γ_nの中の１点Z_0で$F'(Z_0)$が存在するので、任意の$\varepsilon > 0$に対し、ある$\delta > 0$が存在し、$|Z - Z_0| < \delta$ならば、

$$\frac{F(Z) - F(Z_0)}{Z - Z_0} = F'(Z_0) + \rho(Z, Z_0), |\rho(Z, Z_0)| < \frac{\varepsilon}{l^2}$$

が成り立つ。

$U = \{Z : |Z - Z_0| < \delta\}$とする。$\varepsilon > 0$に対し、十分に大きい$n_0$が存在し、$n > n_0$ならば、$\Gamma_n \subset U$が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_n} F(Z)dz \\
&= \int_{\Gamma_n} (F(Z_0) + F'(Z_0)(Z - Z_0) \\
&\qquad + \rho(Z, Z_0)(Z - Z_0))dz \\
&= \int_{\Gamma_n} F(Z_0)dz + \int_{\Gamma_n} F'(Z_0)(Z - Z_0)dz \\
&\qquad + \int_{\Gamma_n} \rho(Z, Z_0)(Z - Z_0)dz \\
&= \int_{\Gamma_n} \rho(Z, Z_0)(Z - Z_0)dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Gamma_n} \rho(Z, Z_0)(Z - Z_0)dz\right| \\
&< \int_{\Gamma_n} |\rho(Z, Z_0)||Z - Z_0|dz \\
&< \frac{\varepsilon}{l^2}\frac{l}{2^n}\int_{\Gamma_n} dz \\
&= \frac{\varepsilon}{l^2}\frac{l}{2^n}\frac{l}{2^n} \\
&= \frac{\varepsilon}{4^n}
\end{aligned}$$

$n > n_0$ならば、$\frac{M}{4^n} < \frac{\varepsilon}{4^n}$つまり$M < \varepsilon$となる。$\varepsilon$は任意だから、$M = 0$とならなければならない。

$F(Z)$が閉じた曲線$C1$上及び内部で正則（微分可能）ならば、$\int_{C1} F(Z)dZ = 0$になる。

次に、複素平面上のコーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$$

の複素空間への拡張を考える。

もしも、$C1$を含む平面**E**1が**Z**$_i$と平行であれば、$\frac{d\varsigma}{d\theta_i} = ire^{i\theta_i}$が成り立つので、

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C1} \frac{F(\varsigma)}{\varsigma - Z}d\varsigma$$

が成り立つ。もしも**Z**$_j$と平行であれば、

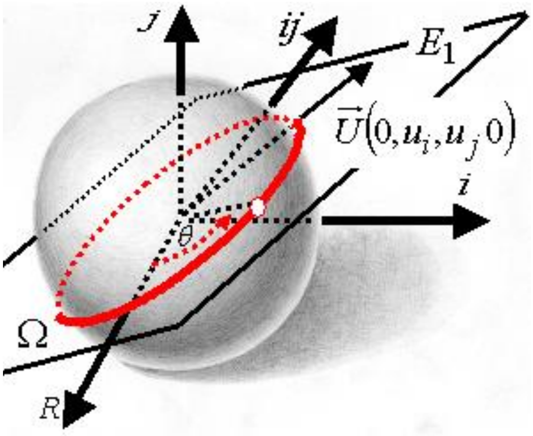
$$F(Z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C1} \frac{F(\varsigma)}{\varsigma - Z}d\varsigma$$

が成り立つ。

E1が**Z**$_i$,**Z**$_j$と平行でない場合を考察する。**E**1を、ベクトル$\vec{U}(0, u_i, u_j, 0)$に対し原点$(0,0,0,0)$を通りベクトル$\vec{U}$に水平な平面とする。原点$(0,0,0,0)$を中心とする

半径 r の円 $C1$ のおいて、z_R 軸からの偏角 θ をしたときの円 $C1$ の関数は、

$Z = r\cos\theta + \dfrac{u_i i + u_j j}{\sqrt{u_i{}^2 + u_j{}^2}} r\sin\theta$ となる。



$$|Z| = r\sqrt[4]{\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{u_i{}^2 + u_j{}^2}(u_i i + u_j j)^2\right)}$$

$$\times\sqrt[4]{\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{u_i{}^2 + u_j{}^2}(u_i i - u_j j)^2\right)}$$

とおいて、 $Z = |Z|e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}$ を満たす $\theta_i, \theta_j, \theta_{ij}$ が存在する。ただし、これでコーシーの積分公式を作ろうとすると、複雑になりそうである。