極座標表示

$$
\begin{aligned}
Z &= a+bi+cj+dij \\
&= \sqrt{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}\sqrt{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2} \\
&\times \frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}}\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij}{\sqrt{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\|Z\| = \sqrt{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}\sqrt{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2}
$$

とおけるので、

$$
Z = \|Z\|\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}}\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij}{\sqrt{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2}}
$$

となる。$\|Z\|=r$ と表記すると、r が 4 次元球の半径と誤解されるので、この後、$\|Z\|$ とそのまま表記する。

定理（極座標）

$a=d, b=-c$ または $a=-d, b=c$ が成り立たなければ、つまり Z が零元でなければ、

$$
\begin{aligned}
Z = \|Z\| &\left(\cos\theta_i + i\sin\theta_i\right)\left(\cos\theta_j + j\sin\theta_j\right) \\
&\times\left(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$$
0 \le \theta_i \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta_j \le \frac{\pi}{2}, -\infty < \theta_{ij} < \infty
$$

を満たす $\theta_i, \theta_j, \theta_{ij}$ が存在する。そして、

$$
Z = \|Z\| e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}
$$

と表記できる。

（証明）

$$
\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}} = \cos\theta_i + i\sin\theta_i
$$

$$
\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}} = \cos\theta_j + j\sin\theta_j
$$

$$
\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij}{\sqrt{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2}} = \cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}
$$

となる $\theta_i, \theta_j, \theta_{ij}$ が存在することは明らか。

条件については、$0 \le \theta_i \le 2\pi$, $-\infty < \theta_{ij} < \infty$ となることは明らか。$\alpha_j \ge 0$ より $-\frac{\pi}{2} \le \theta_j \le \frac{\pi}{2}$ となる。

θ_i, θ_j について

$$
\left(\cos\theta_i + i\sin\theta_i\right)\left(\cos\theta_j + j\sin\theta_j\right) = e^{i\theta_i + j\theta_j}
$$

と表記できることも明らかである。

双曲線関数の積、及び微分について考察する。

$$
\begin{aligned}
&\left(\cosh\theta_{ij1} + ij\sinh\theta_{ij1}\right)\left(\cosh\theta_{ij2} + ij\sinh\theta_{ij2}\right) \\
&= \cosh\theta_{ij1}\cosh\theta_{ij2} \\
&\qquad + ij\cosh\theta_{ij1}\sinh\theta_{ij2} \\
&\qquad + ij\sinh\theta_{ij1}\cosh\theta_{ij2} \\
&\qquad + \sinh\theta_{ij1}\sinh\theta_{ij2} \\
&= \cosh\theta_{ij1}\cosh\theta_{ij2} + \sinh\theta_{ij1}\sinh\theta_{ij2} \\
&\qquad + ij\left(\cosh\theta_{ij1}\sinh\theta_{ij2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sinh\theta_{ij1}\cosh\theta_{ij2}\right) \\
&= \cosh\left(\theta_{ij1} + \theta_{ij2}\right) + ij\sinh\left(\theta_{ij1} + \theta_{ij2}\right)
\end{aligned}
$$

つまり双曲線関数の乗法は、θ_{ij} の加法である。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta_{ij}}\left(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}\right) \\
&= \sinh\theta_{ij} + ij\cosh\theta_{ij} \\
&= \frac{1}{ij}\left(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}\right) \\
&= \frac{ij}{(ij)^2}\left(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}\right) \\
&= ij\left(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

この性質により、

$$
\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij} = e^{ij\theta_{ij}}
$$

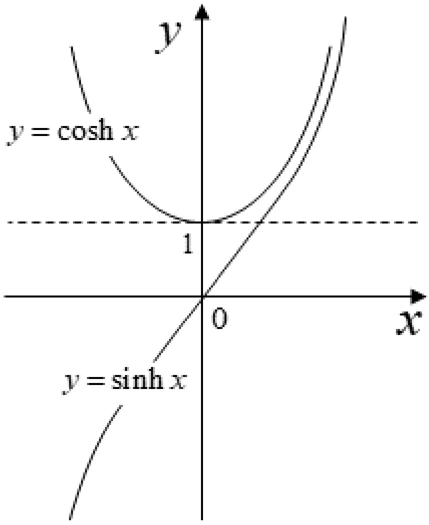
と表記できる。したがって、

$$
Z = \|Z\| e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}
$$

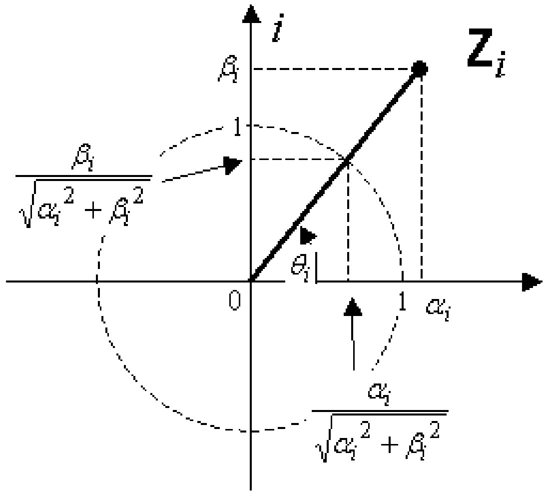
と表記できる。

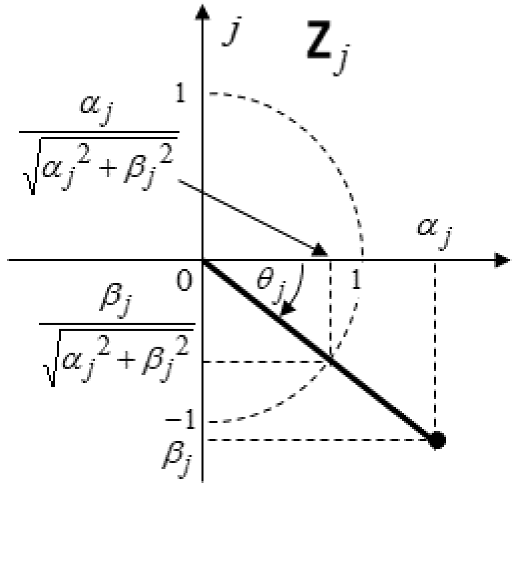
（証明完）

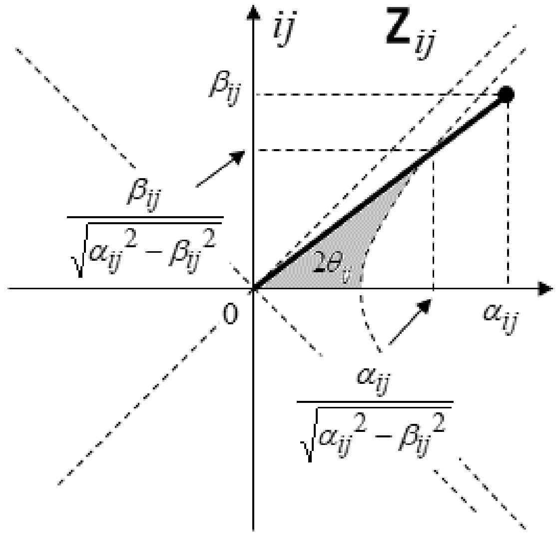
Z は $\|Z\|$ と偏角 $\theta_i, \theta_j, \theta_{ij}$ による極座標表現が可能になった。$\cosh\theta_{ij}, \sinh\theta_{ij}$ の条件は、$\cosh\theta_{ij} \ge 1, \cosh^2\theta_{ij} > \sinh^2\theta_{ij}$ となる。



θ_{ij} の存在により、$\mathbf{Z}_{ij}$ 平面が存在することになる。







$\mathbf{Z}_i$ 平面・$\mathbf{Z}_j$ 平面については、複素数平面（ガウス平面）と同じなので、それぞれの平面上の点の性質は明らかである。

$\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_j,\mathbf{Z}_{ij}$ 平面上の絶対値

$Z_i=\alpha_i+i\beta_i, Z_j=\alpha_j+i\beta_j, Z_{ij}=\alpha_{ij}+ij\beta_{ij}$

として、それぞれの絶対値を求める。

$$\|Z_i\|=\sqrt[4]{\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)}$$
$$=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}$$

$$\|Z_j\|=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}$$

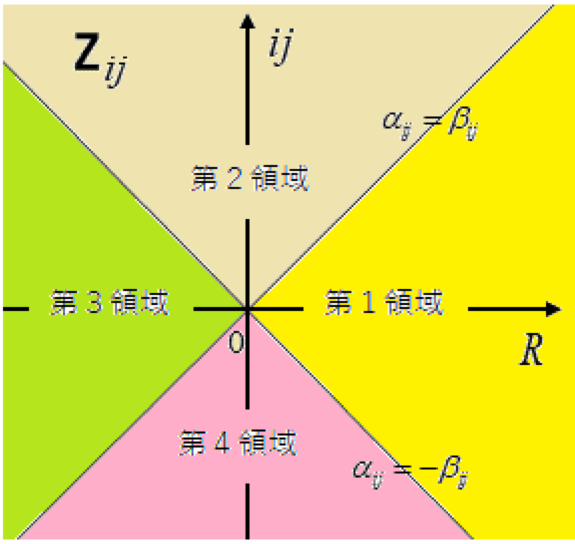
$\alpha_{ij}>\beta_{ij}$ なので、

$$\|Z_{ij}\|=\sqrt[4]{\left(\alpha_{ij}-\beta_{ij}\right)^2\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}$$

$\mathbf{Z}_{ij}$ 平面について

そこで $\mathbf{Z}_{ij}$ 平面上の点の性質を考察する。なお、R 軸を x 軸、ij 軸を y 軸として表記する。

$Z_{ij}=\alpha_{ij}+ij\beta_{ij}$ として、$\mathbf{Z}_{ij}$ 平面を直線 $x=y, x=-y$ で分割し、下図のように第１～４領域とする。



第１・３領域では、$|\alpha_{ij}|\geq|\beta_{ij}|$

第２・４領域では、$|\alpha_{ij}|\leq|\beta_{ij}|$

を満たす。絶対値について、

第１・３領域では、$\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}$

第２・４領域では、$\sqrt{\beta_{ij}{}^2-\alpha_{ij}{}^2}$

とするのが妥当である。

第１領域の点は、次のように極座標で表現できる、

$$Z_{ij}=\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}\,\frac{\alpha_{ij}+ij\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}$$
$$=\|Z_{ij}\|\left(\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\right)$$
$$=\|Z_{ij}\|e^{ij\theta_{ij}}$$

第２領域の点 Z_{ij2} は、Z_{ij} を直線 $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ を基準に対象となる点になる。

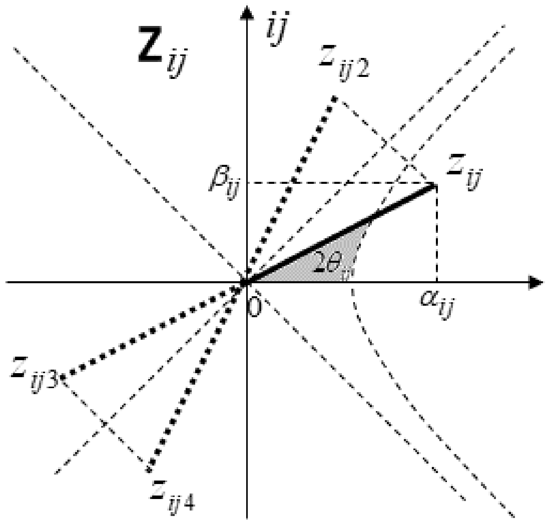
$$Z_{ij2}=\beta_{ij}+ij\alpha_{ij}$$
$$=\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}\,\frac{\beta_{ij}+ij\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}$$
$$=\|Z_{ij}\|\left(\sinh\theta_{ij}+ij\cosh\theta_{ij}\right)$$
$$=ij\|Z_{ij}\|\left(\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\right)$$
$$=ij\|Z_{ij}\|e^{ij\theta_{ij}}$$

第３領域の点 Z_{ij3} は、O を基準に z_{ij} の対象点である。

$$Z_{ij3}=-\alpha_{ij}-ij\beta_{ij}$$
$$=-\|Z_{ij}\|\left(\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\right)$$
$$=-\|Z_{ij}\|e^{ij\theta_{ij}}$$

第４領域の点 Z_{ij4} は、Z_{ij3} を直線 $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ を基準に対象となる点になる。

$$z_{ij4}=-ij\|Z_{ij}\|e^{ij\theta_{ij}}$$



特別な場合

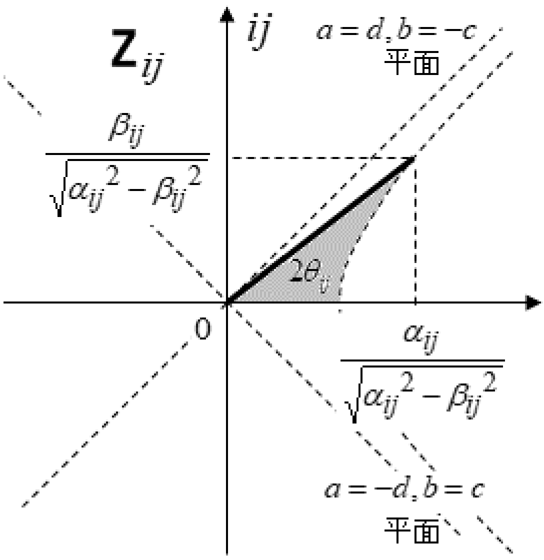
- $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ ならば、$\theta_{ij}=\infty$

  $\alpha_{ij}=-\beta_{ij}$ ならば、$\theta_{ij}=-\infty$

  $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ ならば、$a=d, b=-c$

  $\alpha_{ij}=-\beta_{ij}$ ならば、$a=-d, b=c$

  なので、$a=d, b=-c$ となる平面と、$a=-d, b=c$ となる平面を基準に θ_{ij} は図のような関係が成り立つ。



・ $a=0, b=0$ ならば、

$$Z=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\left(\cos\theta_i+i\sin\theta_i\right)j$$
$$=\|Z\|e^{i\theta_i+\pi j/2}$$

・ $a=0, c=0$ ならば、

$$Z=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\left(\cos\theta_j+j\sin\theta_j\right)i$$
$$=\|Z\|e^{\pi i/2+j\theta_j}$$

・ $d=0, b=0$ ならば、

$$Z=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\left(\cos\theta_j+j\sin\theta_j\right)$$
$$=\|Z\|e^{j\theta_j}$$

・ $d=0, c=0$ ならば、

$$Z=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\left(\cos\theta_i+i\sin\theta_i\right)$$
$$=\|Z\|e^{i\theta_i}$$

・ $ad=bc$ ならば $Z=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j}$

・ $ac=-bd$ ならば $Z=\|Z\|e^{i\theta_i+ij\theta_{ij}}$

・ $ab=-cd$ ならば $Z=\|Z\|e^{j\theta_j+ij\theta_{ij}}$

・ $\alpha_{ij}=\pm\beta_{ij}$ ならば、 $\|Z\|=0$
極座標による表示はできない。
例： $\alpha_{ij}=\beta_{ij}\Rightarrow Z=(a+bi)(1+ij)$
$\alpha_{ij}=-\beta_{ij}\Rightarrow Z=(a+bi)(1-ij)$
において、$1+ij, 1-ij$ が極座標で表示できない。

$\mathbf{Z}_{ij}$ 平面での四則演算を図で表示する

$$Z_{ij}=\alpha_{ij}+ij\beta_{ij}$$
$$Z_{ij1}=\alpha_{ij1}+ij\beta_{ij1}$$
$$Z_{ij2}=\alpha_{ij2}+ij\beta_{ij2}$$

とする。
$|\alpha_{ij}|\geq|\beta_{ij}|$ と仮定して、
と極座標で表現できる。同様に、

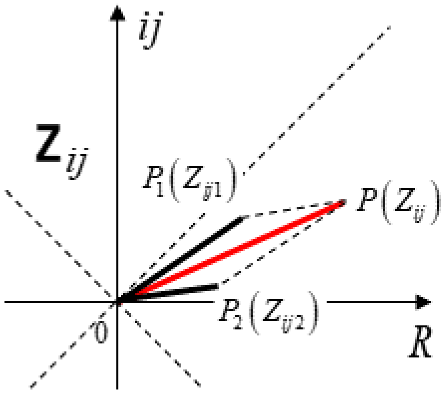
$$Z_{ij1}=\|Z_{ij1}\|\left(\cosh\theta_{ij1}+ij\sinh\theta_{ij1}\right)$$
$$=\|Z_{ij1}\|e^{ij\theta_{ij1}}$$
$$Z_{ij2}=\|Z_{ij2}\|\left(\cosh\theta_{ij2}+ij\sinh\theta_{ij2}\right)$$
$$=\|Z_{ij2}\|e^{ij\theta_{ij2}}$$

と表現する。
座標 Z_{ij}, Z_{ij1}, Z_{ij2} の点を P, P_1, P_2 とする。

和について

$$Z_{ij}=Z_{ij1}+Z_{ij2}$$
$$=\left(\alpha_{ij1}+\alpha_{ij2}\right)+ij\left(\beta_{ij1}+\beta_{ij2}\right)$$

点 $P(Z_{ij})$ は OP_1, OP_2 を 2 辺とする平行 4 辺形での、第 4 の点である。



差について

$Z_{ij}=Z_{ij1}-Z_{ij2}$ において、

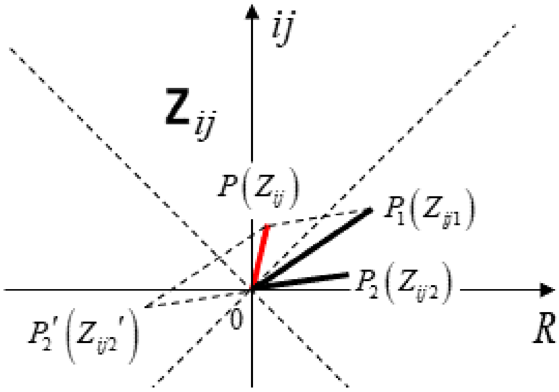
$$Z_{ij2}'=-\alpha_{ij2}-ij\beta_{ij2}$$
$$=\alpha_{ij2}'+ij\beta_{ij2}'$$

とおく。

$$Z_{ij}=Z_{ij1}-Z_{ij2}$$
$$=Z_{ij1}+Z_{ij2}'$$
$$=\left(\alpha_{ij1}+\alpha_{ij2}'\right)+ij\left(\beta_{ij1}+\beta_{ij2}'\right)$$

点 $P_2'(Z_{ij2}')$ は、O を基準に P_2 の対象点で

あり、点 $P\left(Z_{ij}\right)$ は OP_1, OP_2' を２辺とする平行４辺形での、第４の点である。



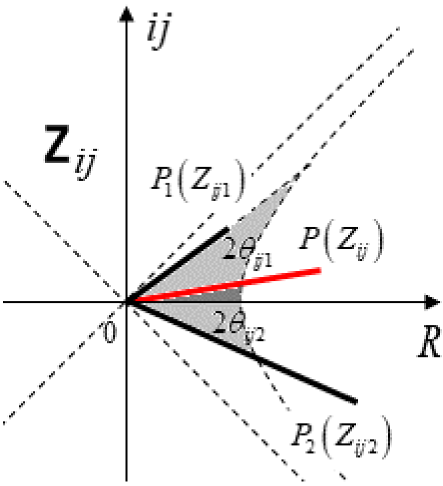
特に点 P_1, P_2 が第１領域にある場合、点 P は第２又は第４領域にある。

積について

$Z_{ij} = Z_{ij1} Z_{ij2}$

$$Z_{ij1} Z_{ij2} = \left\| Z_{ij1} \right\| e^{ij\theta_{ij1}} \left\| Z_{ij2} \right\| e^{ij\theta_{ij2}}$$
$$= \left\| Z_{ij1} Z_{ij2} \right\| e^{ij\left(\theta_{ij1}+\theta_{ij2}\right)}$$

点 $P\left(Z_{ij}\right)$ は、絶対値 $\left\|Z_{ij1}\right\| \left\|Z_{ij2}\right\| = \left\|Z_{ij1} Z_{ij2}\right\|$ 偏角 $\left(\theta_{ij1}+\theta_{ij2}\right)$ となる点である。



商について

積の場合同様に、極座標に変換して、絶対値・偏角の演算による表現が可能である。

定理（$e^{ij\theta_{ij}}$ についての性質）

$$e^{ij\theta_{ij}} = \left(e^{i\theta_{ij}}\right)^j = \cos\left(i\theta_{ij}\right) + j\sin\left(i\theta_{ij}\right)$$

$$e^{ij\theta_{ij}} = \left(e^{j\theta_{ij}}\right)^i = \cos\left(j\theta_{ij}\right) + i\sin\left(j\theta_{ij}\right)$$

$$e^{ij\theta_{ij}} = \left(e^{ij}\right)^{\theta_{ij}}$$

$$e^{ij\theta_{ij}} = \left(\left(e^i\right)^j\right)^{\theta_{ij}} = \left(\left(e^j\right)^i\right)^{\theta_{ij}}$$

$$e^{ij\theta_{ij}} = \left(e^i\right)^{j\theta_{ij}} = \left(e^j\right)^{i\theta_{ij}}$$

（証明）

一般的に、z を複素数として、

$z^j = e^{j(\log z + 2n\pi)}$ なので、

$z^j = \cos(\log z) + j\sin(\log z)$ が成り立つ。

$z = e^{i\theta_{ij}}$ で置き換えると、$\log z = i\theta_{ij}$ となるので、

$$\left(e^{i\theta_{ij}}\right)^j = \cos\left(i\theta_{ij}\right) + j\sin\left(i\theta_{ij}\right)$$

が成り立つ。また、

$\cosh z = \cos(iz), \sinh z = -i\sin(iz)$

なので、

$$\cos\left(i\theta_{ij}\right) + j\sin\left(i\theta_{ij}\right)$$
$$= \cosh\theta_{ij} - \frac{j}{i}\sinh\theta_{ij}$$
$$= \cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij}$$
$$= e^{ij\theta_{ij}}$$

となる。したがって、$e^{ij\theta_{ij}} = \left(e^{i\theta_{ij}}\right)^j$ とおける。同様に、

$$e^{ij\theta_{ij}} = \left(e^{j\theta_{ij}}\right)^i = \cos\left(j\theta_{ij}\right) + i\sin\left(j\theta_{ij}\right)$$

が成り立つ。

$$\left(\cosh\theta_1 + ij\sinh\theta_1\right)\left(\cosh\theta_2 + ij\sinh\theta_2\right)$$
$$= \cosh\left(\theta_1+\theta_2\right) + ij\sinh\left(\theta_1+\theta_2\right)$$

より、

$$\left(\cosh\theta + ij\sinh\theta\right)^2 = \cosh 2\theta + ij\sinh 2\theta$$

が成り立つ。さらに、$m, n(m \neq 0)$ を整数として、

$$\left(\cosh\theta + ij\sinh\theta\right)^{\frac{n}{m}}$$
$$= \cosh\frac{n}{m}\theta + ij\sinh\frac{n}{m}\theta$$

が成り立つ。整数列の極限として実数を

定義できるので、xを実数として、

$$\left(\cosh\theta+ij\sinh\theta\right)^{x}=\cosh x\theta+ij\sinh x\theta$$

が成り立つ。これを応用し、

$$\begin{aligned}\left(e^{ij}\right)^{\theta_{ij}}&=\left(\cosh 1+ij\sinh 1\right)^{\theta_{ij}}\\&=\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\\&=e^{ij\theta_{ij}}\end{aligned}$$

が成り立つ。

$z=e^{i}$として、$\left(e^{i}\right)^{j}=\cos(i)+j\sin(i)$

$$\begin{aligned}\cos(i)+j\sin(i)&=\cosh 1-\frac{j}{i}\sinh 1\\&=\cosh 1+ij\sinh 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\left(e^{i}\right)^{j}\right)^{\theta_{ij}}&=\left(\cosh 1+ij\sinh 1\right)^{\theta_{ij}}\\&=\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\\&=e^{ij\theta_{ij}}\end{aligned}$$

同様に$\left(\left(e^{j}\right)^{i}\right)^{\theta_{ij}}=e^{ij\theta_{ij}}$も成り立つ。

$$\begin{aligned}\left(e^{j}\right)^{i\theta_{ij}}&=\left(\cos 1+j\sin 1\right)^{i\theta_{ij}}\\&=\cos i\theta_{ij}+j\sin i\theta_{ij}\\&=\cosh\theta_{ij}+ij\sinh\theta_{ij}\\&=e^{ij\theta_{ij}}\end{aligned}$$

同様に、$\left(e^{i}\right)^{j\theta_{ij}}=e^{ij\theta_{ij}}$も成り立つ。

（証明完）

定理（$\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$の一意性）

$Z=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$

と表現すると、当然$\alpha_i,\beta_i,\alpha_j,\beta_j,\alpha_{ij},\beta_{ij}$を一意に定めることはできない。しかし、$a=d,b=-c$または$a=-d,b=c$が成り立たなければ、$a,b,c,d$より、$\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$を一意に定めることができる。

（証明）

h_i,h_jを任意の正の実数とする。

$$Z=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$
$$=\left(h_i\alpha_i+h_i\beta_i i\right)\left(h_j\alpha_j+h_j\beta_j j\right)\left(\frac{\alpha_{ij}}{h_ih_j}+\frac{\beta_{ij}}{h_ih_j}ij\right)$$

とおける。この場合を変換すると、

$$\frac{h_i\alpha_i}{\sqrt{h_i^2\alpha_i^2+h_i^2\beta_i^2}}=\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}=\cos\theta_i$$

したがって、θ_iは正の実数h_iに依存しない。θ_j,θ_{ij}についても同様である。

h_i,h_jが共に負の場合、特に$h_i=h_j=-1$とする。なぜなら、任意の負の数としなくても十分だからである。

$$\frac{-\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}=-\cos\theta_i=\cos\left(\pi+\theta_i\right)$$

$$\frac{-\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}=-\sin\theta_i=\sin\left(\pi+\theta_i\right)$$

同様にj項についても計算すると、

$$Z=\|Z\|e^{i\left(\pi+\theta_i\right)+j\left(\pi+\theta_j\right)+ij\theta_{ij}}$$
$$=\|Z\|e^{i\pi}e^{j\pi}e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$$
$$=\|Z\|(-1)(-1)e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$$
$$=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$$

したがって、θ_iは負の実数h_iに依存しない。θ_j,θ_{ij}についても同様である。

$h_i=-1,h_j=1$の場合、

$$Z=\left(-\alpha_i-\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(-\alpha_{ij}-\beta_{ij}ij\right)$$
$$=\|Z\|(-1)e^{i\theta_i+j\theta_j}(-1)e^{ij\theta_{ij}}$$
$$=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$$

したがって、θ_iは0でない任意の実数h_iに依存しない。θ_j,θ_{ij}についても同様である。

したがって、$\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$を一意に定めることができる。

（証明完）

定理

$Z_i=\alpha_i+\beta_i i,Z_j=\alpha_j+\beta_j j,Z_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij$

m,nを自然数とする。

${Z_i}^m{Z_j}^n$は$ad=bc$

${Z_i}^m{Z_{ij}}^n$は$ac=-bd$

${Z_j}^m{Z_{ij}}^n$は$ab=-cd$

を満たす。

（証明）

$Z_iZ_j=a+bi+cj+dij$と表現すると、$ad=bc$を満たすことは最初に説明した。

$$\frac{Z_j}{Z_i}=\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\alpha_i+\beta_i i}$$
$$=\frac{\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_i-\beta_i i\right)}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$$
$$=\frac{\alpha_i\alpha_j-\beta_i\alpha_j i+\alpha_i\beta_j j-\beta_i\beta_j ij}{\alpha_i^2+\beta_i^2}$$

この場合も、$ad=bc$を満たす。

さらに一般化すれば、m,nをゼロではない整数とすると、${Z_i}^m{Z_j}^n$は$ad=bc$を満たす。

$Z=a+bi+cj+dij$において、$ac=-bd$の場合について考察する。

$$a+bi+cj+dij=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$

ここで、$Z_i=\alpha_i+\beta_i i,Z_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij$とおく。

$${Z_i}^2Z_{ij}=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)^2\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$
$$=\left(\left(\alpha_i^2-\beta_i^2\right)+2\alpha_i\beta_i i\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$

$$Z_i{Z_{ij}}^2=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)^2$$
$$=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\left(\alpha_{ij}^2+\beta_{ij}^2\right)+2\alpha_{ij}\beta_{ij}ij\right)$$

${Z_i}^2 Z_{ij}, Z_i {Z_{ij}}^2$ も、 $ac=-bd$ を満たす。

$$\frac{Z_{ij}}{Z_i}=\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}{\alpha_i+\beta_i i}$$

$$=\frac{(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)(\alpha_i-\beta_i i)}{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}$$

$$=\frac{\alpha_i\alpha_{ij}-\beta_i\alpha_{ij}i+\beta_i\beta_{ij}j+\alpha_i\beta_j ij}{{\alpha_i}^2+{\beta_i}^2}$$

$$\frac{Z_i}{Z_{ij}}=\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}$$

$$=\frac{(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_{ij}-\beta_{ij}ij)}{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2}$$

$$=\frac{\alpha_i\alpha_{ij}+\beta_i\alpha_{ij}i+\beta_i\beta_{ij}j-\alpha_i\beta_j ij}{{\alpha_{ij}}^2-{\beta_{ij}}^2}$$

$\dfrac{Z_{ij}}{Z_i}, \dfrac{Z_j}{Z_{ij}}$ も、 $ac=-bd$ を満たす。

一般化すれば、 m,n をゼロではない整数とすると、 ${Z_i}^m {Z_{ij}}^n$ は $ac=-bd$ を満たす。

同様な計算方法で ${Z_j}^m {Z_{ij}}^n$ は $ab=-cd$ を満たす。

（証明完）

定理
（a,b,c,d から、$\alpha_i,\beta_i,\alpha_j,\beta_j,\alpha_{ij},\beta_{ij}$
$,\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$ を求める）

$$Z=a+bi+cj+dij$$
$$=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$

において、

$$\cos\theta_i=\frac{\alpha_i}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

‥Z１①

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

‥Z２①

$$\sin\theta_i=\frac{\beta_i}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

‥Z１②

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2}$$

‥Z２②

$$\cos\theta_j=\frac{\alpha_j}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

‥Z１③

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2}$$

‥Z２③

$$\sin\theta_j=\frac{\beta_j}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

‥Z１④

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2}$$

‥Z２④

$$\cosh\theta_{ij}=\frac{\alpha_{ij}}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)}$$

‥Z１⑤

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2}$$

‥Z２⑤

$$\sinh\theta_{ij}=\frac{\beta_{ij}}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)}$$

‥Z１⑥

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2}$$

‥Z２⑥

$\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2=1,\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2=1$ ならば、

$$\alpha_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

‥Z３①

$$\beta_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2}$$

‥Z３②

$\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2=1,\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2=1$ ならば、

$$\alpha_j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2}$$

‥Z３③

$$\beta_j=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2}$$

‥Z３④

$\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2=1,\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2=1$ ならば、

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2}$$

‥Z３⑤

$$\beta_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2}$$

‥Z３⑥

$$\theta_{ij}=\frac{1}{2}\log\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(a+d)^2+(b-c)^2}{\|Z\|^2}$$ ‥Z４①

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\|Z\|^2}{(a-d)^2+(b+c)^2}$$ ‥Z４②

$$=\frac{1}{4}\log\frac{(a+d)^2+(b-c)^2}{(a-d)^2+(b+c)^2}$$ ‥Z４③

（証明）

$$Z=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$

において、

$$(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$

$$=\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}}$$
$$\times\left(\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\alpha_{ij}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\beta_{ij}ij\right)$$

と変換する。

$$\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}=\alpha_{i3}+\beta_{i3}i$$
$$\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}}=\alpha_{j3}+\beta_{j3}j$$
$$\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\alpha_{ij}=\alpha_{ij3}$$
$$\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\beta_{ij}=\beta_{ij3}$$

とおくと、

$$Z=(\alpha_{i3}+\beta_{i3}i)(\alpha_{j3}+\beta_{j3}j)(\alpha_{ij3}+\beta_{ij3}ij)$$

となる。明らかに、

$$\sqrt{\alpha_{i3}{}^2+\beta_{i3}{}^2}=1,\sqrt{\alpha_{j3}{}^2+\beta_{j3}{}^2}=1$$

を満たす。積１①を使う。

$$\left(\alpha_{i3}{}^2+\beta_{i3}{}^2\right)\left(\alpha_{j3}{}^2+\beta_{j3}{}^2\right)\left(\alpha_{ij3}{}^2+\beta_{ij3}{}^2\right)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$\left(\alpha_{i3}{}^2+\beta_{i3}{}^2\right)^2\left(\alpha_{j3}{}^2+\beta_{j3}{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij3}{}^2-\beta_{ij3}{}^2\right)^2$$
$$=\left((a-d)^2+(b+c)^2\right)\left((a+d)^2+(b-c)^2\right)$$
$$=\|Z\|^4$$

より、

$$\alpha_{ij3}{}^2+\beta_{ij3}{}^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$\alpha_{ij3}{}^2>\beta_{ij3}{}^2$ なので、

$$\alpha_{ij3}{}^2-\beta_{ij3}{}^2=\|Z\|^2$$
$$\alpha_{ij3}{}^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2\right)$$
$$\beta_{ij3}{}^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2\right)$$
$$\cosh^2\theta_{ij}=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2\right)$$
$$\sinh^2\theta_{ij}=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2\right)$$

が成り立つ。

$$(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$
$$=\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}$$
$$\times\left(\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}\alpha_j\right.$$
$$\left.+\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}\beta_j j\right)$$

と変換する。先ほどと同様に変数変換し、

$$Z=(\alpha_{i2}+\beta_{i2}i)(\alpha_{j2}+\beta_{j2}j)(\alpha_{ij2}+\beta_{ij2}ij)$$

とおく。明らかに、

$$\sqrt{\alpha_{i2}{}^2+\beta_{i2}{}^2}=1,\sqrt{\alpha_{ij2}{}^2-\beta_{ij2}{}^2}=1$$

を満たす。積１②を使う。

$$\left(\alpha_{i2}{}^2+\beta_{i2}{}^2\right)\left(\alpha_{j2}{}^2-\beta_{j2}{}^2\right)\left(\alpha_{ij2}{}^2-\beta_{ij2}{}^2\right)$$
$$=a^2+b^2-c^2-d^2$$

より、

$$\alpha_{j2}{}^2-\beta_{j2}{}^2=a^2+b^2-c^2-d^2$$
$$\alpha_{j2}{}^2+\beta_{j2}{}^2=\|Z\|^2$$
$$\alpha_{j2}{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$
$$\beta_{j2}{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$
$$\cos^2\theta_j=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$
$$\sin^2\theta_j=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$

が成り立つ。

$$(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$
$$=\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}$$
$$\times\left(\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}\alpha_i\right.$$
$$\left.+\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}\beta_i i\right)$$

と変換する。

$$Z=(\alpha_{i1}+\beta_{i1}i)(\alpha_{j1}+\beta_{j1}j)(\alpha_{ij1}+\beta_{ij1}ij)$$

とおく。明らかに、

$$\sqrt{\alpha_{j1}{}^2+\beta_{j1}{}^2}=1,\sqrt{\alpha_{ij1}{}^2-\beta_{ij1}{}^2}=1$$

を満たす。積１③を使う。

$$\left(\alpha_{i1}{}^2-\beta_{i1}{}^2\right)\left(\alpha_{j1}{}^2+\beta_{j1}{}^2\right)\left(\alpha_{ij1}{}^2-\beta_{ij1}{}^2\right)$$

$$=a^2-b^2+c^2-d^2$$

より、

$$\alpha_{i1}{}^2-\beta_{i1}{}^2=a^2+b^2-c^2-d^2$$

$$\alpha_{i1}{}^2+\beta_{i1}{}^2=\|Z\|^2$$

$$\alpha_{i1}{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2\right)$$

$$\beta_{i1}{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2\right)$$

$$\cos^2\theta_i=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2\right)$$

$$\sin^2\theta_i=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2\right)$$

が成り立つ。

以上をまとめ、絶６②～⑦を使うと、

$\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2=1,\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2=1$ならば、

$$\alpha_i{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2\right)$$

$$\beta_i{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2\right)$$

$\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2=1,\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2=1$ならば、

$$\alpha_j{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$

$$\beta_j{}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$

$\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2=1,\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2=1$ならば、

$$\alpha_{ij}{}^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2\right)$$

$$\beta_{ij}{}^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2\right)$$

$$\cos^2\theta_i=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2\right)$$

$$=\frac{\alpha_i^2}{\|Z\|^2}\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$\sin^2\theta_i=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2\right)$$

$$=\frac{\beta_i^2}{\|Z\|^2}\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$\cos^2\theta_j=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$

$$=\frac{\alpha_j{}^2}{\|Z\|^2}\left(\alpha_i{}^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$\sin^2\theta_j=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$

$$=\frac{\beta_j{}^2}{\|Z\|^2}\left(\alpha_i{}^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$\cosh^2\theta_{ij}=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2\right)$$

$$=\frac{\alpha_{ij}{}^2}{\|Z\|^2}\left(\alpha_i{}^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$

$$\sinh^2\theta_{ij}=\frac{1}{2\|Z\|^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2\right)$$

$$=\frac{\beta_{ij}{}^2}{\|Z\|^2}\left(\alpha_i{}^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$

となる。２乗を取ると、右辺には±が出てくる。たとえば、

$$\cos\theta_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

$$=\pm\frac{\alpha_i}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

となる。

また、$\alpha_j\geq 0,\alpha_{ij}\geq 0,\alpha_{ij}{}^2>\beta_{ij}{}^2$という条件も考慮に入れると、

$$\cos\theta_i=\frac{\alpha_i}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

$$\sin\theta_i=\frac{\beta_i}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2}$$

$$\cos\theta_j=\frac{\alpha_j}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2}$$

$$\sin\theta_j=\frac{\beta_j}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}\right)}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2}$$

$$\cosh\theta_{ij}=\frac{\alpha_{ij}}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2}$$

$$\sinh\theta_{ij}=\frac{\beta_{ij}}{\|Z\|}\sqrt{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2}$$

$\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}=1, \alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}=1$ならば、

$$\alpha_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

$$\beta_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2}$$

$\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}=1, \alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}=1$ならば、

$$\alpha_j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2}$$

$$\beta_j=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2}$$

$\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}=1, \alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}=1$ならば、

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2}$$

$$\beta_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2}$$

となる。

$$\cosh\theta_{ij}=\frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}$$

$$\sinh\theta_{ij}=\frac{\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}$$

を使い計算する。

$$\frac{e^{\theta_{ij}}+e^{-\theta_{ij}}}{2}=\frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}$$

$$\frac{e^{\theta_{ij}}-e^{-\theta_{ij}}}{2}=\frac{\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}$$

$$e^{\theta_{ij}}=\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}$$

$$e^{-\theta_{ij}}=\frac{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}$$

したがって、

$$\theta_{ij}=\log\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}=\log\frac{\sqrt{\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}$$

$$\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}=\frac{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}\right)^2}{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}\right)}$$

$$\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}^{\ 2}+\beta_{ij}^{\ 2}\right)$$

$$+2\alpha_{ij}\beta_{ij}\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)$$

したがって、

$$2\theta_{ij}=\log\frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+2\left(ad-bc\right)}{\|Z\|^2}$$

$$=\log\frac{\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2}{\|Z\|^2}$$

また、

$$\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}}{\alpha_{ij}-\beta_{ij}}=\frac{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}^{\ 2}-\beta_{ij}^{\ 2}\right)}{\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}-\beta_{ij}\right)^2}$$

$$\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}-\beta_{ij}\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)\left(\alpha_{ij}^{\ 2}+\beta_{ij}^{\ 2}\right)$$

$$-2\alpha_{ij}\beta_{ij}\left(\alpha_i^{\ 2}+\beta_i^{\ 2}\right)\left(\alpha_j^{\ 2}+\beta_j^{\ 2}\right)$$

したがって、

$$2\theta_{ij} = \log \frac{\|Z\|^2}{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) - 2\left(ad - bc\right)}$$

$$= \log \frac{\|Z\|^2}{\left(a-d\right)^2 + \left(b+c\right)^2}$$

$$\|Z\|^2 = \sqrt{\left(\left(a-d\right)^2 + \left(b+c\right)^2\right)}$$

$$\times \sqrt{\left(\left(a+d\right)^2 + \left(b-c\right)^2\right)}$$

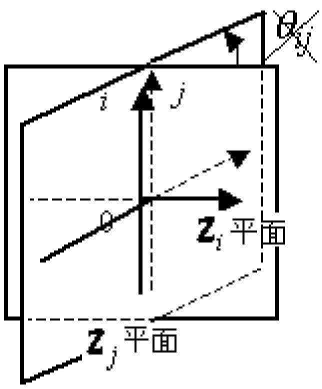
より、

$$2\theta_{ij} = \log \sqrt{\frac{\left(a+d\right)^2 + \left(b-c\right)^2}{\left(a-d\right)^2 + \left(b+c\right)^2}}$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{4} \log \frac{\left(a+d\right)^2 + \left(b-c\right)^2}{\left(a-d\right)^2 + \left(b+c\right)^2}$$

（証明完）

当初、θ_{ij} を $\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j$ 平面の偏角と何らかの関係があると考えていたが、違ったようである。



偏角

$Z = a + bi + cj + dij = \|Z\| e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}$ とおけるとき、$\theta_i, \theta_j, \theta_{ij}$ をそれぞれ平面 $\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_{ij}$ 上の Z の偏角と定義し、$\arg_i Z = \theta_i, \arg_j Z = \theta_j, \arg_{ij} Z = \theta_{ij}$ と表記する。

$\arg_i Z_1 = \theta_{i1}, \arg_j Z_1 = \theta_{j1}, \arg_{ij} Z_1 = \theta_{ij1}$、
$\arg_i Z_2 = \theta_{i2}, \arg_j Z_2 = \theta_{j2}, \arg_{ij} Z_2 = \theta_{ij2}$
とし、$Z_1 Z_2, \dfrac{Z_1}{Z_2}$ の演算が可能ならば、

$$\arg_i Z_1 Z_2 = \arg_i Z_1 + \arg_i Z_2 = \theta_{i2} + \theta_{i2}$$
$$\arg_j Z_1 Z_2 = \arg_j Z_1 + \arg_j Z_2 = \theta_{j2} + \theta_{j2}$$
$$\arg_{ij} Z_1 Z_2 = \arg_{ij} Z_1 + \arg_{ij} Z_2 = \theta_{ij2} + \theta_{ij2}$$
$$\arg_i \frac{Z_1}{Z_2} = \arg_i Z_1 - \arg_i Z_2 = \theta_{i2} - \theta_{i2}$$
$$\arg_j \frac{Z_1}{Z_2} = \arg_j Z_1 - \arg_j Z_2 = \theta_{j2} - \theta_{j2}$$
$$\arg_{ij} \frac{Z_1}{Z_2} = \arg_{ij} Z_1 - \arg_{ij} Z_2 = \theta_{ij2} - \theta_{ij2}$$

が成り立つ。

定理（３次元空間との対応）

$\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j$ 平面が、実数軸を共通とし、かつ直交していると考える。３次元空間の点 $P(a,b,c)$ を、$z_R = a$、$z_i = b$、$z_j = c$ で変数変換し、$z_R z_{ij} = z_i z_j$ という関係から新しい次元 z_{ij} を作ると、複素空間の点 $Z(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$ に対応させることができる。図にすると次図になる。ただしここでは点 Z を便宜上、点 P の延長上に表記した。$\mathbf{Z}_j$ 平面は、裏面から見た図になるので、偏角の向きが時計回りに見える。

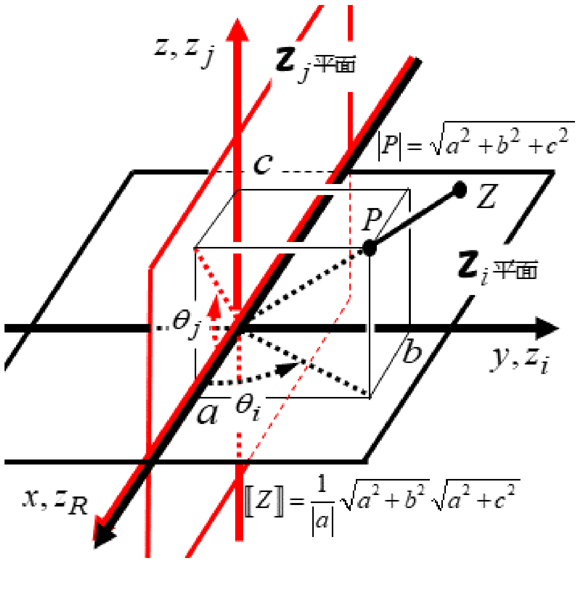
そして、複素空間上の点は、

$$\begin{cases} a = \|Z\| \cos\theta_i \cos\theta_j \\ b = \|Z\| \sin\theta_i \cos\theta_j \\ c = \|Z\| \cos\theta_i \sin\theta_j \\ d = \|Z\| \sin\theta_i \sin\theta_j \end{cases} \cdot\cdot 三1$$

$\theta_{ij} = 0$

$$\cos\theta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \cdot\cdot 三2①$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot\cdot 三3①$$
$$\sin\theta_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \cdot\cdot 三2②$$
$$= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot\cdot 三3②$$
$$\cos\theta_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \cdot\cdot 三2③$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot\cdot 三3③$$
$$\sin\theta_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \cdot\cdot 三2④$$
$$= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot\cdot 三3④$$

が成り立ち、θ_i, θ_j はそれぞれ xy, xz 平面上の偏角となる。



（証明）

$\|Z\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ を代入すると、

$$\cos\theta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}$$
$$= \pm \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

$$\sin\theta_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$
$$\cos\theta_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$
$$\sin\theta_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$
が成り立つ。

$ad = bc$ という条件を入れ、$a \neq 0$ として
$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$
$$= \frac{|a|\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2a^2+a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2}}$$
$$= \frac{|a|\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2a^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$$
$$= \frac{|a|\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$
$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
となる。

同様に計算すると、
$$\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$
$$= \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$
$$= \frac{|a|\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$
$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$
$$\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+a^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$
$$= \frac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$
となる。

以上をまとめると、
$$\cos\theta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\sin\theta_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\theta_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$
$$\sin\theta_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$
となる。この式から、$z_R = a$、$z_i = b$、$z_j = c$ と変数変換した座標系における偏角と扱うことができる。

絶対値 $\|Z\|$ については、
$$\|Z\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
$$= \frac{1}{|a|}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$$
となる。

（証明完）

$\cos\theta_i, \sin\theta_i, \cosh\theta_{ij}, \sinh\theta_{ij}$ について考察する。特に

$$Z = a + bi + cj + dij$$
$$= (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= r(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)(\cosh\theta_{ij} + ij\sin\theta_{ij})$$
$$= \|Z\| e^{i\theta_i + ij\theta_{ij}}$$

となる場合を考察する。

$\|Z\|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ を代入すると、

$$\cos\theta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{a^2 - d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$\sin\theta_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$\cosh\theta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$\sinh\theta_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2}}$$
$$= \pm\frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$

が成り立つ。

$ac = -bd$ という条件を入れると、

$$\|Z\|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2a^2 - b^2d^2}}{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2 - b^2c^2 - b^2d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2a^2 - a^2c^2}}{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2}}$$
$$= \frac{|a|\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}}$$
$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

同様に計算すると、

$$\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2b^2 - b^2c^2}}{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2 - b^2c^2 - b^2d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2b^2 - b^2c^2}}{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2}}$$
$$= \frac{|b|\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}}$$
$$= \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2}}{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2 - b^2c^2 - b^2d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2}}{\sqrt{b^2a^2 + b^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2}}$$
$$= \frac{|b|\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}}$$
$$= \frac{|b|}{\sqrt{b^2 - c^2}}$$

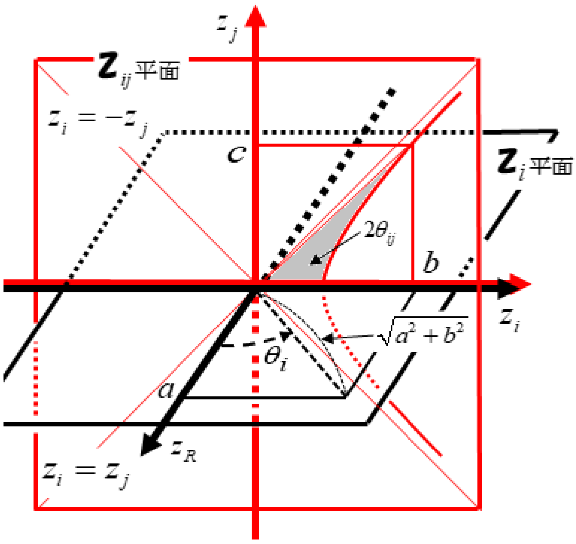
$$\frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{c^2c^2 + c^2d^2}}{\sqrt{c^2a^2 + c^2b^2 - c^2c^2 - c^2d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{c^2c^2 + c^2d^2}}{\sqrt{b^2d^2 + c^2b^2 - c^2c^2 - c^2d^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{c^2c^2 + c^2d^2}}{\sqrt{(c^2 + d^2)(b^2 - c^2)}}$$
$$= \frac{|c|}{\sqrt{b^2 - c^2}}$$

となる。

以上をまとめると、

$$\cos\theta_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\sin\theta_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}}$$
$$= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cosh\theta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}$$
$$= \frac{b}{\sqrt{b^2-c^2}}$$
$$\sinh\theta_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}}$$
$$= \frac{c}{\sqrt{b^2-c^2}}$$
となる。

絶対値$\|Z\|$については、
$$\|Z\| = \sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}$$
$$= \frac{1}{|b|}\sqrt{(a^2+b^2)(b^2-c^2)}$$



$\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_{ij}$平面が、$i$軸を共通とし、かつ直交してと考える。3次元空間の点$P(a,b,c)$を、$z_R = a$、$z_i = b$、$z_j = c$で変数変換し、$z_R z_j = -z_i z_{ij}$という関係から、複素空間の点$Z(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$に対応させることができる。図にすると上図になる。ただしここでは点Zを便宜上、点Pの上に表記した。

そして、複素空間上の点は、
$$\begin{cases} a = \|Z\|\cos\theta_i\cosh\theta_{ij} \\ b = \|Z\|\sin\theta_i\cosh\theta_{ij} \\ c = \|Z\|\cos\theta_i\sinh\theta_{ij} \\ d = \|Z\|\sin\theta_i\sinh\theta_{ij} \end{cases}$$
が成り立つ。

平面への射影

たとえば、実数軸と i 軸のなす平面を $\mathbf{Z}_{R\cdot i}$ と記述する。他に $\mathbf{Z}_{R\cdot j}$, $\mathbf{Z}_{R\cdot ij}$, $\mathbf{Z}_{i\cdot j}$, $\mathbf{Z}_{i\cdot ij}$, $\mathbf{Z}_{j\cdot ij}$ と記述する。

$Z = a + bi + cj + dij$

を各平面に射影する。

各平面に射影した場合の点を、

$Z_{R\cdot i}, Z_{R\cdot j}, Z_{R\cdot ij}, Z_{i\cdot j}, Z_{i\cdot ij}, Z_{j\cdot ij}$

とする。

各点を極座標に変換した場合の偏角を、

$\theta_{R\cdot i}, \theta_{R\cdot j}, \theta_{R\cdot ij}, \theta_{i\cdot j}, \theta_{i\cdot ij}, \theta_{j\cdot ij}$

とする。なお、偏角は双曲線関数の偏角になる場合もある。

平面 $\mathbf{Z}_{R\cdot i}$ への射影

$c = d = 0$

$Z_{R\cdot i} = a + bi$

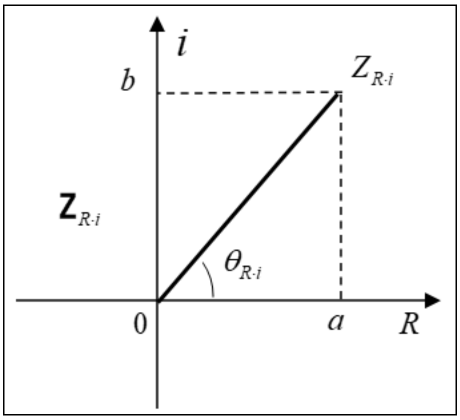
$$\left\|Z_{R\cdot i}\right\| = \sqrt[4]{a^2+b^2} \times \sqrt[4]{a^2+b^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

したがって、

$$Z_{R\cdot i} = \left\|Z_{R\cdot i}\right\|\left(\cos\theta_{R\cdot i} + i\sin\theta_{R\cdot i}\right)$$

とおける。



平面 $\mathbf{Z}_{R\cdot j}$ への射影

$b = d = 0$

$Z_{R\cdot j} = a + cj$

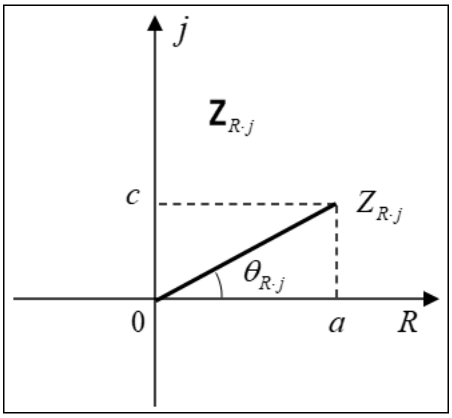
$$\left\|Z_{R\cdot j}\right\| = \sqrt[4]{a^2+c^2} \times \sqrt[4]{a^2+c^2}$$

$$= \sqrt{a^2+c^2}$$

したがって、

$$Z_{R\cdot j} = \left\|Z_{R\cdot j}\right\|\left(\cos\theta_{R\cdot j} + i\sin\theta_{R\cdot j}\right)$$

とおける。



平面 $\mathbf{Z}_{R\cdot ij}$ への射影

$b = c = 0$

$Z_{R\cdot ij} = a + dij$

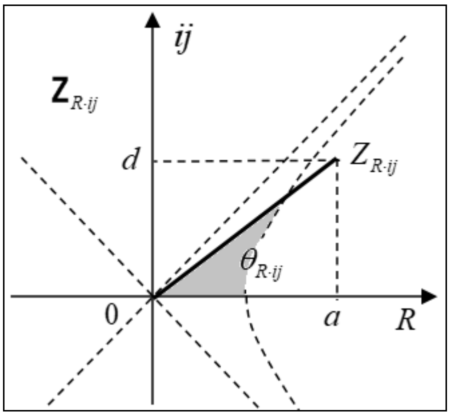
$$\left\|Z_{R\cdot ij}\right\| = \sqrt[4]{(a-d)^2} \times \sqrt[4]{(a+d)^2}$$

$$= \sqrt{a^2-d^2}$$

したがって、

$$Z_{R\cdot ij} = \left\|Z_{R\cdot ij}\right\|\left(\cosh\theta_{R\cdot ij} + ij\sinh\theta_{R\cdot ij}\right)$$

とおける。



平面 $\mathbf{Z}_{i\cdot j}$ への射影

$$a = d = 0$$

$$Z_{i\cdot j} = bi + cj$$

$$= (b - cij)i$$

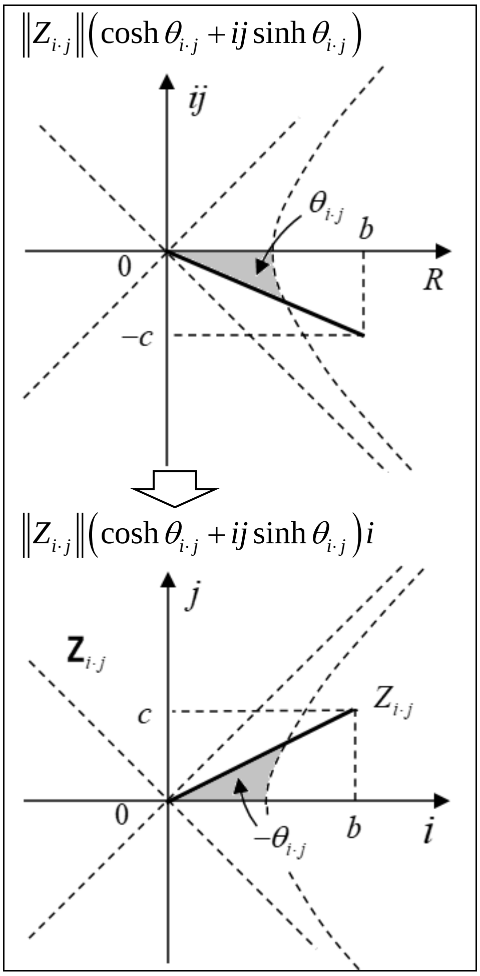
$$\|Z_{i\cdot j}\| = \sqrt[4]{(b+c)^2} \times \sqrt[4]{(b-c)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 - c^2}$$

したがって、

$$Z_{i\cdot j} = \|Z_{i\cdot j}\|\left(\cosh\theta_{i\cdot j} + ij\sinh\theta_{i\cdot j}\right)i$$

とおける。



平面 $\mathbf{Z}_{i\cdot ij}$ への射影

$$a = c = 0$$

$$Z_{i\cdot ij} = bi + dij$$

$$= (b + dj)i$$

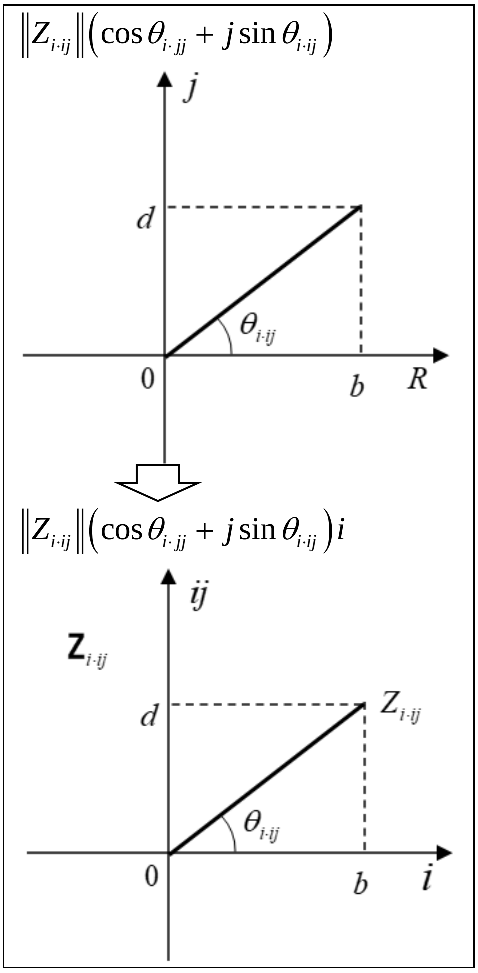
$$\|Z_{i\cdot ij}\| = \sqrt[4]{b^2 + d^2} \times \sqrt[4]{b^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + d^2}$$

したがって、

$$Z_{i\cdot ij} = \|Z_{i\cdot ij}\|\left(\cos\theta_{i\cdot jj} + j\sin\theta_{i\cdot ij}\right)i$$

とおける。



平面 $\mathbf{Z}_{j\cdot ij}$ への射影

$a = b = 0$

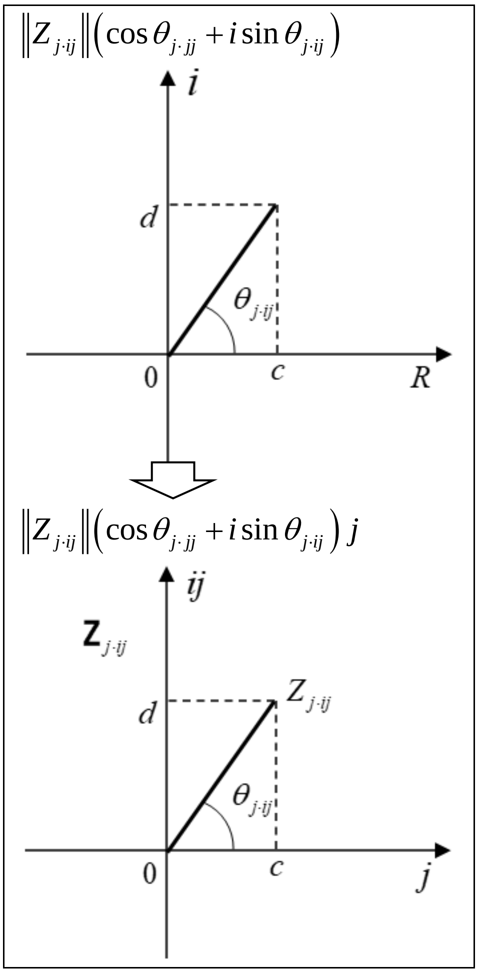
$$Z_{i\cdot ij} = cj + dij$$
$$= \left(c + di\right) j$$

$$\left\| Z_{i\cdot ij} \right\| = \sqrt[4]{c^2 + d^2} \times \sqrt[4]{c^2 + d^2}$$
$$= \sqrt{c^2 + d^2}$$

したがって、

$$Z_{j\cdot ij} = \left\| Z_{j\cdot ij} \right\| \left(\cos\theta_{j\cdot jj} + i \sin\theta_{j\cdot ij} \right) j$$

とおける。



以上、$Z_{R\cdot i}, Z_{R\cdot j}, Z_{i\cdot ij}, Z_{j\cdot ij}$ については、三角関数で表現できるが、$Z_{R\cdot ij}, Z_{i\cdot j}$ については、双曲線関数で表現できる。

ベクトル

複素空間をユークリッド空間として扱う。R 軸・i 軸・j 軸・ij 軸の単位ベクトルをそれぞれ $\vec{R},\vec{i},\vec{j},\vec{ij}$ とすると、空間上のベクトルは

$$\vec{Z}=z_R\vec{R}+z_i\vec{i}+z_j\vec{j}+z_{ij}\vec{ij}$$

と表すことができる。略して、

$$\vec{Z}=\left(z_R,z_i,z_j,z_{ij}\right)$$

と表記する。

① 絶対値の定義

$$\left|\vec{Z}\right|=\sqrt{z_R{}^2+z_i{}^2+z_j{}^2+z_{ij}{}^2}$$

② 演算及び「一致する」という定義

$$\vec{Z}_1=\left(z_{R1},z_{i1},z_{j_1},z_{ij_1}\right)$$

$$\vec{Z}_2=\left(z_{R2},z_{i2},z_{j_2},z_{ij_2}\right)$$

とすると、

$$\vec{Z}_1=\vec{Z}_2 \Leftrightarrow z_{R1}=z_{R2},z_{i1}=z_{i2},z_{j1}=z_{j2},z_{ij1}=z_{ij2}$$

$$\alpha\vec{Z}_1=\left(\alpha z_{R1},\alpha z_{i1},\alpha z_{j1},\alpha z_{ij1}\right)$$

$$\vec{Z}_1\pm\vec{Z}_2=\left(z_{R1}\pm z_{R2},z_{i1}\pm z_{i2},z_{j1}\pm z_{j2},z_{ij1}\pm z_{ij2}\right)$$

③ 点の座標と成分

２点

$$A\left(z_{R1},z_{i1},z_{j1},z_{ij1}\right)$$

$$B\left(z_{R2},z_{i2},z_{j2},z_{ij2}\right)$$

において、

$$\overrightarrow{OA}=\left(z_{R1},z_{i1},z_{j1},z_{ij1}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(z_{R2},z_{i2},z_{j2},z_{ij2}\right)$$

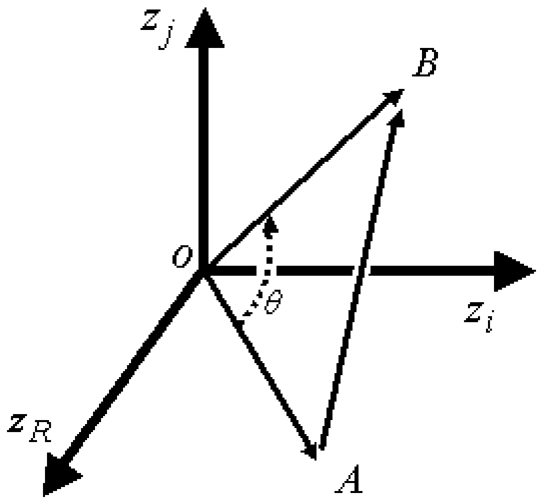
となり、

$$\overrightarrow{AB}=\left(z_{R2}-z_{R1},z_{i2}-z_{i1},z_{j2}-z_{j1},z_{ij2}-z_{ij1}\right)$$

内積

特にθとベクトル成分との関係を考察する。

注：下図において、ij 軸は省略した。



$$\overrightarrow{OA}=\left(z_{R1},z_{i1},z_{j1},z_{ij1}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(z_{R2},z_{i2},z_{j2},z_{ij2}\right)$$

$\angle AOB=\theta$とする。

内積を $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$ と定義すると、

$$|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA||OB|\cos\theta$$

$$=|OA|^2+|OB|^2-2OA\bullet OB$$

が成り立つ。

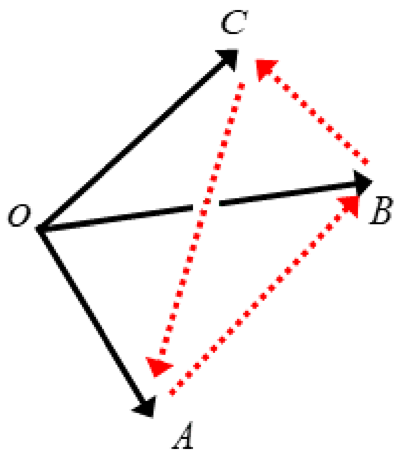
$\angle AOB=90°$ならば、

$$z_{R1}z_{R2}+z_{i1}z_{i2}+z_{j1}z_{j2}+z_{ij1}z_{ij2}=0$$

が成り立つ。

ベクトルの外積

ベクトル$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$があり、点 A,B,C により、平面の四角形を定める。四角形$\triangle ABC$の点に順序を定め、Oの反対側から見たとき $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow A$と反時計回りとき「右手系」、時計回りのとき「左手系」という。

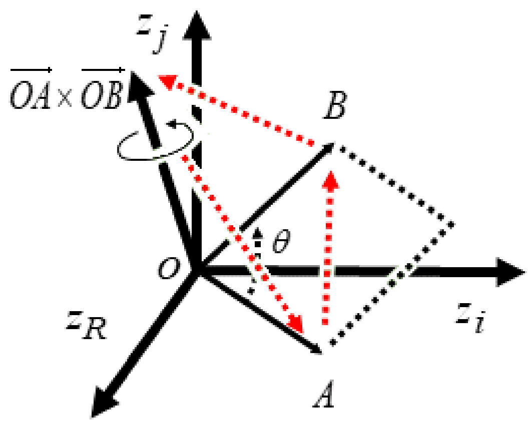


２つのベクトル$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$において、その間の角を$\theta$とする。

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$を２辺とする平行四辺形の面積は、$\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\theta$になる。点$O$から、$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$それぞれに垂直に、そして右手系になるような単位ベクトル$\vec{e}$を考える。外積を

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\theta\right)\vec{e}$$

と定義する。



複素数の行列表示

$Z=a+bi+cj+dij$ において、
$iZ=ai-b+cij-dj$ と変換できる。行列にすると、

$$\begin{pmatrix}-b\\a\\-d\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

となる。

行列の変数表示を $\mathbf{A}_4,\mathbf{B}_4$ のように太文字で表現する。サフィックス4については、4×4の正方行列を意味するものとする。
上記行列を、

$$\mathbf{I}_4=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

とする。同様に、 j,ij について変換行列を作る。

$jZ=aj+bij-c-di$

$$\mathbf{J}_4=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$ijZ=aij-bj-ci+d$

$$\mathbf{K}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

なお、

$$\mathbf{O}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

とする。

$$\mathbf{I}_4{}^2=\mathbf{J}_4{}^2=-\mathbf{E}_4,\mathbf{K}_4{}^2=\mathbf{E}_4$$

$$\mathbf{I}_4\mathbf{J}_4=\mathbf{J}_4\mathbf{I}_4=\mathbf{K}_4,\ \mathbf{I}_4\mathbf{K}_4=\mathbf{K}_4\mathbf{I}_4=-\mathbf{J}_4,$$

$$\mathbf{J}_4\mathbf{K}_4=\mathbf{K}_4\mathbf{J}_4=-\mathbf{I}_4$$

が成り立つ。

$$\mathbf{Z}_4=a\mathbf{E}_4+b\mathbf{I}_4+c\mathbf{J}_4+d\mathbf{K}_4$$

$$=\begin{pmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-b&0&0\\b&0&0&0\\0&0&0&-b\\0&0&b&0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&-c&0\\0&0&0&-c\\c&0&0&0\\0&c&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&d\\0&0&-d&0\\0&-d&0&0\\d&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a&-b&-c&d\\b&a&-d&-c\\c&-d&a&-b\\d&c&b&a\end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{Z}_4|=\begin{vmatrix}a&-b&-c&d\\b&a&-d&-c\\c&-d&a&-b\\d&c&b&a\end{vmatrix}$$

$$=\left\{(a+d)^2+(b-c)^2\right\}\left\{(a-d)^2+(b+c)^2\right\}$$

したがって、 $a=-d,b=c$ 又は

$a=d,b=-c$ ならば、$\mathbf{Z}_4$ は正則ではない。

$ad=bc$ ならば、

$|\mathbf{Z}_4|=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$ なので、正則である。

$$\mathbf{Z}_4=\begin{pmatrix}a&-b&-c&d\\b&a&-d&-c\\c&-d&a&-b\\d&c&b&a\end{pmatrix}$$ において、

$\mathbf{a1}=\begin{pmatrix}a&-b&-c&d\end{pmatrix}$

$\mathbf{a2}=\begin{pmatrix}b&a&-d&-c\end{pmatrix}$

$\mathbf{a3}=\begin{pmatrix}c&-d&a&-b\end{pmatrix}$

$\mathbf{a4}=\begin{pmatrix}d&c&b&a\end{pmatrix}$

とおく、

$$|\mathbf{a1}|^2=|\mathbf{a2}|^2=|\mathbf{a3}|^2=|\mathbf{a4}|^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$(\mathbf{a1},\mathbf{a2})=ab+(-b)a+(-c)(-d)+d(-c)=0$$

同様に計算して、

$$(\mathbf{a1},\mathbf{a3})=(\mathbf{a2},\mathbf{a4})=(\mathbf{a3},\mathbf{a4})=0$$
$$(\mathbf{a1},\mathbf{a4})=2ad-2bc$$
$$(\mathbf{a2},\mathbf{a3})=2bc-2ad$$

したがって、$ad=bc$ならば、$\mathbf{Z}_4$は直交行列である。

関数の定義

$Z=z_R+z_i i+z_j j+z_{ij}ij$ として、除法が関係するためには、$Z\notin \mathbf{O}_Z$ という条件が必要である。

多項式

変数を $Z=z_R+z_i i+z_j j+z_{ij}ij$、定数を $A_k=a_{Rk}+a_{ik}i+a_{jk}j+a_{ijk}ij(0\le k\le n)$ として、

$$W=A_0+A_1Z+A_2Z^2+\cdots+A_nZ^n=P(Z)$$

で定義される関数を、次数 n の多項式 $P(Z)$ という。

有理式

$P(Z),Q(Z)$ を多項式とする。有理式を $W=\dfrac{P(Z)}{Q(Z)}$ で定義する。

指数関数

$$e^Z=1+Z+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}+\cdots$$

で指数関数を定義する。

$$\begin{aligned}e^Z&=e^{z_R+iz_i+jz_j+ijz_{ij}}\\&=e^{z_R}(\cos z_i+i\sin z_i)(\cos z_j+j\sin z_j)\\&\qquad\times(\cosh z_{ij}+ij\sinh z_{ij})\end{aligned}$$

でも表現できる。したがって、$e^{z_R}=\|Z\|$ が成り立つ。

三角関数

$$\sin Z=Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos Z=1-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}-\frac{Z^6}{6!}+\cdots$$

$$\tan Z=\frac{\sin Z}{\cos Z}$$

で三角関数を定義する。

双曲線関数

$$\sinh Z=\frac{1}{2}\left(e^Z-e^{-Z}\right)$$

$$\cosh Z=\frac{1}{2}\left(e^Z+e^{-Z}\right)$$

$$\tanh Z=\frac{\sinh Z}{\cosh Z}$$

で双曲線関数を定義する。
なお、級数で

$$\sinh Z=Z+\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}+\cdots$$

$$\cosh Z=1+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}+\frac{Z^6}{6!}+\cdots$$

という定義でもよい。

対数関数

$Z=e^W$ のとき、逆関数である対数関数を $W=\ln Z$ で定義する。

$$\begin{aligned}Z&=e^W\\&=e^{w_R+iw_i+jw_j+ijw_{ij}}\\&=e^{w_R}(\cos w_i+i\sin w_i)(\cos w_j+j\sin w_j)\\&\qquad\times(\cosh w_{ij}+ij\sinh w_{ij})\end{aligned}$$

において、任意の整数 k_i,k_j に対し、

$$\begin{aligned}&\cos w_i+i\sin w_i\\&\quad=\cos(w_i+2k_i\pi)+i\sin(w_i+2k_i\pi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos w_j+j\sin w_j\\&\quad=\cos(w_j+2k_j\pi)+j\sin(w_j+2k_j\pi)\end{aligned}$$

が成り立つので、$W=\ln Z$ は多価関数になり、

$$\begin{aligned}W&=\ln Z\\&=\ln z_R+(z_i+2k_i\pi)i\\&\qquad+(z_j+2k_j\pi)j+z_{ij}ij\end{aligned}$$

となる。

定理

$$e^{iZ}=\cos Z+i\sin Z$$

$$e^{jZ}=\cos Z+j\sin Z$$

$$e^{ijZ}=\cosh Z+ij\sinh Z$$

（証明）

$$\begin{aligned}e^{iZ}&=1+(iZ)+\frac{(iZ)^2}{2!}+\frac{(iZ)^3}{3!}+\cdots\\&=1-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}-\cdots\end{aligned}$$

$$+i\left(Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=\cos Z+i\sin Z$$

が成り立つ。同様に、

$$e^{jZ}=\cos Z+j\sin Z$$

も成り立つ。

$$e^{ijZ}=1+(ijZ)+\frac{(ijZ)^2}{2!}+\frac{(ijZ)^3}{3!}+\cdots$$

$$=1+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}-\cdots$$

$$+ij\left(Z+\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$=\cosh Z+ij\sinh Z$$

（証明完）

定理

$$\cos(Z_1+Z_2)=\cos Z_1\cos Z_2-\sin Z_1\sin Z_2$$

$$\sin(Z_1+Z_2)=\sin Z_1\cos Z_2+\cos Z_1\sin Z_2$$

$$\cosh(Z_1+Z_2)=\cosh Z_1\cosh Z_2+\sinh Z_1\sinh Z_2$$

$$\sinh(Z_1+Z_2)=\sinh Z_1\cosh Z_2+\cosh Z_1\sinh Z_2$$

（証明）

$$e^{iZ_1+iZ_2}=e^{i(Z_1+Z_2)}$$

$$=\cos(Z_1+Z_1)+i\sin(Z_1+Z_1)$$

$$e^{iZ_1+iZ_2}=(\cos Z_1+i\sin Z_1)(\cos Z_2+i\sin Z_2)$$

$$=\cos Z_1\cos Z_2-\sin Z_1\sin Z_2$$

$$+i(\sin Z_1\cos Z_2+\cos Z_1\sin Z_2)$$

したがって、

$$\cos(Z_1+Z_2)=\cos Z_1\cos Z_2-\sin Z_1\sin Z_2$$

$$\sin(Z_1+Z_2)=\sin Z_1\cos Z_2+\cos Z_1\sin Z_2$$

$$e^{ijZ_1+ijZ_2}=e^{ij(Z_1+Z_2)}$$

$$=\cos(Z_1+Z_1)+i\sin(Z_1+Z_1)$$

$$e^{ijZ_1+ijZ_2}=(\cosh Z_1+ij\sinh Z_1)\times(\cosh Z_2+ij\sinh Z_2)$$

$$=\cosh Z_1\cosh Z_2+\sinh Z_1\sinh Z_2$$

$$+ij(\sinh Z_1\cosh Z_2+\cosh Z_1\sinh Z_2)$$

したがって、

$$\cosh(Z_1+Z_2)=\cosh Z_1\cosh Z_2+\sinh Z_1\sinh Z_2$$

$$\sinh(Z_1+Z_2)=\sinh Z_1\cosh Z_2+\cosh Z_1\sinh Z_2$$

（証明完）

定理

$$\cos Z=\frac{1}{2}\left(e^{iZ}+e^{-iZ}\right)$$

$$\sin Z=\frac{1}{2i}\left(e^{iZ}-e^{-iZ}\right)$$

$$\cos Z=\frac{1}{2}\left(e^{jZ}+e^{-jZ}\right)$$

$$\sin Z=\frac{1}{2j}\left(e^{jZ}-e^{-jZ}\right)$$

（証明は略）

定理

$$\cos(ijZ)=\cos Z$$

$$\sin(ijZ)=ij\sin Z$$

（証明）

$$\cos Z=1-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}-\frac{Z^6}{6!}+\cdots$$

$$=1-\frac{(ijZ)^2}{2!}+\frac{(ijZ)^4}{4!}-\frac{(ijZ)^6}{6!}+\cdots$$

$$=\cos(ijZ)$$

$$ij\sin Z=ij\left(Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-\frac{Z^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$=ijZ-\frac{(ijZ)^3}{3!}+\frac{(ijZ)^5}{5!}-\frac{(ijZ)^7}{7!}+\cdots$$

$$=\sin(ijZ)$$

（別証明）

$\cos Z=\frac{1}{2}\left(e^{iZ}+e^{-iZ}\right)$ より、

$$\cos(ijZ)=\frac{1}{2}\left(e^{-jZ}+e^{jZ}\right)$$

$$=\cos Z$$

$\sin Z=\frac{1}{2i}\left(e^{iZ}-e^{-iZ}\right)$ より

$$\begin{aligned}\sin(ijZ) &= \frac{1}{2i}\left(e^{-jZ} - e^{jZ}\right) \\ &= -\frac{1}{2i}\left(e^{jZ} - e^{-jZ}\right) \\ &= \frac{1}{ij} \times \frac{1}{2j}\left(e^{jZ} - e^{-jZ}\right) \\ &= ij \sin Z\end{aligned}$$

（証明完）

このことにより、変数が実数の場合の三角関数・双曲線関数の公式は、複素空間**Z**においても成り立つと思う。

関数の極座標による表示

$W=F(Z)$、$Z=z_R+z_i i+z_j j+z_{ij} ij$ において、$Z=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$ を満たす $\left(\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}\right)$ が存在する。したがって、$W=F\left(\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}\right)$ と極座標による表示が可能である。

恒等的に $z_R z_{ij}=z_i z_j$ ならば、$Z=Z_i Z_j=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)$ とおけて、$Z=\ Z\ e^{i\theta_i+j\theta_j}$ を満たす $\left(\theta_i,\theta_j\right)$ が存在する。したがって、$W=F\left(Z_i Z_j\right)=F\left(\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j}\right)$ と極座標による表示が可能である。

恒等的に $z_R z_j=-z_i z_{ij}$ ならば、$Z=Z_i Z_{ij}=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij)$ とおけて、$Z=\|Z\|e^{i\theta_i+ij\theta_{ij}}$ を満たす $\left(\theta_i,\theta_{ij}\right)$ が存在する。したがって、$W=F\left(Z_i Z_{ij}\right)=F\left(\|Z\|e^{i\theta_i+ij\theta_{ij}}\right)$ と極座標による表示が可能である。

同様に、$z_R z_i=-z_j z_{ij}$ ならば、$W=F\left(Z_j Z_{ij}\right)=F\left(\|Z\|e^{j\theta_j+ij\theta_{ij}}\right)$ と極座標による表示が可能である。

３次元空間と複素空間との関係

３次元空間上の点 $P_1(a_1,b_1,c_1), P_2(a_2,b_2,c_2)$ から、新しい次元を作り、$a_1 d_1=b_1 c_1, a_2 d_2=b_2 c_2$ を満たす d_1,d_2 を作ると、$Z_1(a_1,b_1,c_1,d_1), Z_2(a_2,b_2,c_2,d_2)$ に対応させることができる。

Z_1,Z_2 それぞれを極座標に変換し、

$$\|Z_1\|=\sqrt{a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2}+d_1^{\ 2}}$$

$$\|Z_2\|=\sqrt{a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}+c_2^{\ 2}+d_2^{\ 2}}$$

$$Z_1=\left(\alpha_{i1}+\beta_{i1} i\right)\left(\alpha_{j1}+\beta_{j1} j\right)=\|Z_1\|e^{i\theta_{i1}+j\theta_{j1}}$$

$$Z_2=\left(\alpha_{i2}+\beta_{i2} i\right)\left(\alpha_{j2}+\beta_{j2} j\right)=\|Z_2\|e^{i\theta_{i2}+j\theta_{j2}}$$

とする。このとき、

$$Z_1 Z_2=\|Z_1\|\|Z_2\|e^{i(\theta_{i1}+\theta_{i2})+j\left(\theta_{j1}+\theta_{j2}\right)}$$

$$=\|Z_1 Z_2\|e^{i(\theta_{i1}+\theta_{i2})+j\left(\theta_{j1}+\theta_{j2}\right)}$$

が成り立つ。

つまり、複素平面上と同じ考え方、

$$\arg_i Z_1 Z_2=\arg_i Z_1+\arg_i Z_2=\theta_{i2}+\theta_{i2}$$

$$\arg_j Z_1 Z_2=\arg_j Z_1+\arg_j Z_2=\theta_{j2}+\theta_{j2}$$

が成り立つ。

４次元の複素空間で計算し、３次元に射影すれば、つまり ij 項を０にすれば、元の３次元での結果が得られる。

関数の例

直線の方程式

$Z_0(z_{R0},z_{i0},z_{j0},z_{ij0})$を通り、ベクトルが$\vec{V}(v_R,v_i,v_j,v_{ij})$の場合、$t$を媒介変数にして、

$$Z=(z_{R0}+tv_R)+(z_{i0}+tv_i)i+(z_{j0}+tv_j)j+(z_{ij0}+tv_{ij})ij$$

$$\frac{z_R-z_{R0}}{v_R}=\frac{z_i-z_{i0}}{v_i}=\frac{z_j-z_{j0}}{v_j}=\frac{z_{ij}-z_{ij0}}{v_{ij}}=(t)$$

２点

$Z_1(z_{R1},z_{i1},z_{j1},z_{ij1}),Z_2(z_{R2},z_{i2},z_{j2},z_{ij2})$

を通る直線は、

$$\begin{aligned}Z=&(z_{R1}+t(z_{R2}-z_{R1}))\\&+(z_{i1}+t(z_{i2}-z_{i1}))i\\&+(z_{j1}+t(z_{j2}-z_{j1}))j\\&+(z_{ij1}+t(z_{ij2}-z_{ij1}))ij\end{aligned}$$

$$\frac{z_R-z_{R1}}{z_{R2}-z_{R1}}=\frac{z_i-z_{i1}}{z_{i2}-z_{i1}}=\frac{z_j-z_{j1}}{z_{j2}-z_{j1}}=\frac{z_{ij}-z_{ij1}}{z_{ij2}-z_{ij1}}=(t)$$

定理

原点を通り、ベクトルが$\vec{V}(v_R,v_i,v_j,v_{ij})$と一致する直線は、$t$を媒介変数として、

$$Z=t(v_R+v_ii+v_jj+v_{ij}ij)$$

となる。

$v_R=v_{ij},v_i=-v_j$または$v_R=-v_{ij},v_i=v_j$が成り立たない場合、$Z=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$と表記できて、$\|Z\|,\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$は$t$の関数になる。

$v_Rw_{ij}=v_iv_j$という関係があれば、$\|Z\|$はtの関数、θ_i,θ_jは定数、$\theta_{ij}=0$になる。

（証明）

$$Z=t(v_R+v_ii+v_jj+v_{ij}ij)$$

となることは明らか。

v_R,v_i,v_j,v_{ij}が固定なので、

$v_i=t_{i0}v_R$, $v_j=t_{j0}v_R$, $v_{ij}=t_{ij0}v_R$とすると、

$$Z=tv_R(1+t_{i0}i+t_{j0}j+t_{ij0}ij)$$

$$\|Z\|=|tv_R|\sqrt[4]{\left((1-t_{ij0})^2+(t_{i0}+t_{j0})^2\right)}\times\sqrt[4]{\left((1+t_{ij0})^2+(t_{i0}-t_{j0})^2\right)}$$

したがって、$\|Z\|=|tv_R|\times$(定数)となるのでtの関数になる。$\|Z\|=|tv_R|T_0$とおく。

$v_R=v_{ij},v_i=-v_j$または$v_R=-v_{ij},v_i=v_j$が成り立たないので、（Ｚ２①）より、

$$\begin{aligned}\cos\theta_i&=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\|Z\|}\times\sqrt{\|Z\|^2+v_R{}^2-v_i{}^2+v_j{}^2-v_{ij}{}^2}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{2}|t|T_0}\times\sqrt{(|t|T_0)^2+1-t_{i0}{}^2+t_{j0}{}^2-t_{ij0}{}^2}\end{aligned}$$

したがって、右辺にtが残るので、定数とはならない。同様に、θ_j,θ_{ij}についても同じことが言えるので、

$$Z=\|Z\|e^{i\theta_i+j\theta_j+ij\theta_{ij}}$$

と表記した場合に、$\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$は定数にはならない。$\theta_i,\theta_j,\theta_{ij}$は$t$の関数になる。

次に、$v_Rw_{ij}=v_iv_j$という関係があるとする。

$v_R\neq0$として、$v_{ij}=\dfrac{v_iv_j}{v_R}$

$$Z=t(v_R+v_ii+v_jj+v_{ij}ij)=t\left(v_R+v_ii+v_jj+\frac{v_iv_j}{v_R}ij\right)$$

（三３①）より、

$$\cos\theta_i=\frac{v_R}{\sqrt{v_R{}^2+v_i{}^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+t_{i0}{}^2}}$$

この場合、右辺にtが残らないので、定数となる。

同様に、θ_j,θ_{ij}についても同じことが言えるので、

$Z = \|Z\| e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}$

と表記した場合、θ_i, θ_j は定数、$\theta_{ij} = 0$ となる。

（証明完）

平面の方程式

$Z_0(z_{R0}, z_{i0}, z_{j0}, z_{ij0})$ を通り、ベクトル $\vec{V}(v_R, v_i, v_j, v_{ij})$ に垂直な平面について考察する。

平面の座標を $Z(z_R, z_i, z_j, z_{ij})$ とする。

$\overrightarrow{Z_0 Z}$ と $\vec{V}$ が垂直なので、$\overrightarrow{Z_0 Z} \bullet \vec{V} = 0$ が成り立つ。平面上の点は、

$$v_R(z_R - z_{R0}) + v_i(z_i - z_{i0}) + v_j(z_j - z_{j0}) + v_{ij}(z_{ij} - z_{ij0}) = 0$$

を満たす。

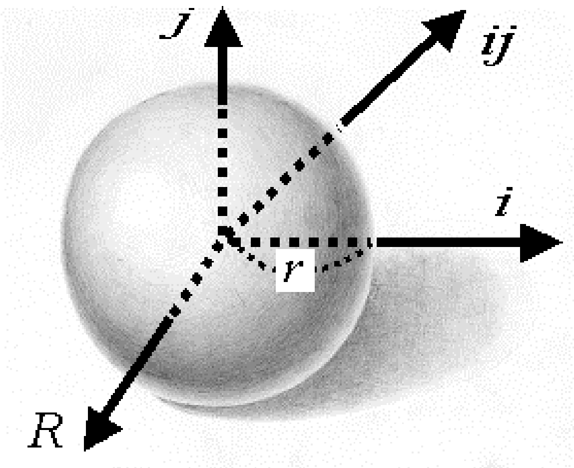
$Z_0(z_{R0}, z_{i0}, z_{j0}, z_{ij0})$ が原点であれば、

$$v_R z_R + v_i z_i + v_j z_j + v_{ij} z_{ij} = 0$$

を満たす。

球の方程式

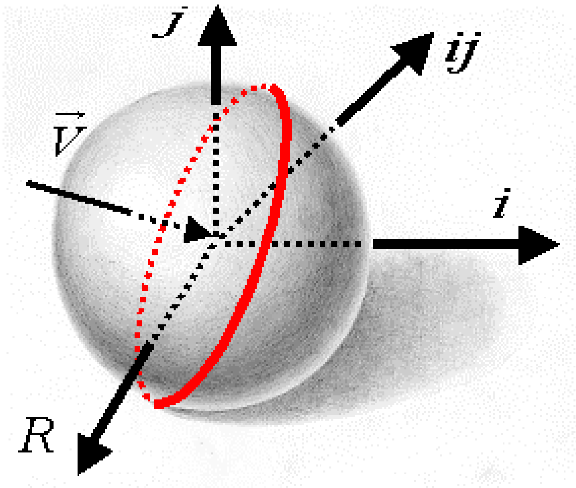
原点 $(0,0,0,0)$、距離（絶対値）が r となる点 $Z = z_R + z_i i + z_j j + z_{ij} ij$ の方程式は、



$r^2 = {z_R}^2 + {z_i}^2 + {z_j}^2 + {z_{ij}}^2$ となる。

円の方程式

原点 $(0,0,0,0)$、距離（絶対値）が r となる円の方程式は、4 次元球 $r^2 = {z_R}^2 + {z_i}^2 + {z_j}^2 + {z_{ij}}^2$ と、原点 $(0,0,0,0)$ を通りベクトル $\vec{V}(v_R, v_i, v_j, v_{ij})$ に垂直な平面 $v_R z_R + v_i z_i + v_j z_j + v_{ij} z_{ij} = 0$ の、連立方程式になる。



複素数の極座標表示 No.2

$Z\neq 0$ ならば、積１①が成り立ち、

$$Z=|Z|\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}{\sqrt{\alpha_{ij}^2+\beta_{ij}^2}}$$

とおける。

定理（極座標）

$Z\neq 0$ ならば、

$$Z=|Z|\left(\cos\varphi_i+i\sin\varphi_i\right)\left(\cos\varphi_j+j\sin\varphi_j\right)\times\left(\cos\varphi_{ij}+ij\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$0\leq\varphi_i<2\pi,-\frac{\pi}{2}\leq\varphi_j<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\leq\varphi_{ij}<\frac{\pi}{4}$$

を満たす $\varphi_i,\varphi_j,\varphi_{ij}$ が存在する。そして、

$$Z=|Z|e^{i\varphi_i+j\varphi_j}\left(\cos\varphi_{ij}+ij\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$=\sqrt{2}|Z|e^{i\varphi_i+j\varphi_j}\cos\left(\varphi_{ij}-\frac{\pi}{4}ij\right)$$

と表記できる。

（証明）

$$Z=|Z|\left(\cos\varphi_i+i\sin\varphi_i\right)\left(\cos\varphi_j+j\sin\varphi_j\right)\times\left(\cos\varphi_{ij}+ij\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$=|Z|e^{i\varphi_i+j\varphi_j}\left(\cos\varphi_{ij}+ij\sin\varphi_{ij}\right)$$

と表記できることは明らか。
さらに、φ_i,φ_j の定義領域が
$0\leq\varphi_i<2\pi,-\frac{\pi}{2}\leq\varphi_j<\frac{\pi}{2}$ となることも明らか。
$\alpha_{ij}\geq 0$ なので、$\cos\varphi_{ij}\geq 0$ となり、φ_{ij} の定義領域は $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi_{ij}<\frac{\pi}{2}$ となる。
さらに、$\alpha_{ij}{}^2\geq\beta_{ij}{}^2$ より $\cos^2\varphi_{ij}\geq\sin^2\varphi_{ij}$
したがって、φ_{ij} の定義領域は
$-\frac{\pi}{4}\leq\varphi_{ij}<\frac{\pi}{4}$ となる。

$$\cos\varphi_{ij}+ij\sin\varphi_{ij}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi_{ij}+ij\sin\frac{\pi}{4}\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}ij\right)\cos\varphi_{ij}+\sin\left(\frac{\pi}{4}ij\right)\sin\varphi_{ij}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\varphi_{ij}-\frac{\pi}{4}ij\right)$$

（証明完）

定理

（a,b,c,d から、$\varphi_i,\varphi_j,\varphi_{ij}$ を求める）

$$Z=a+bi+cj+dij$$

$$=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$

において、

$$\cos\varphi_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

‥Z５①

$$\sin\varphi_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2-a^2+b^2-c^2+d^2}$$

‥Z５②

$$\cos\varphi_j=\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2}$$

‥Z５③

$$\sin\varphi_j=\pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2}$$

‥Z５④

$$\cos\varphi_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2}$$

‥Z５⑤

$$\sin\varphi_{ij}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2}$$

‥Z５⑥

（証明）

$$Z=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$

において、

$$\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$

$$=\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}\times\left(\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\alpha_{ij}+\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\beta_{ij}ij\right)$$

と変換する。

$$\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}=\alpha_{i3}+\beta_{i3}i$$

$$\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}=\alpha_{j3}+\beta_{j3}j$$

$$\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\alpha_{ij}=\alpha_{ij3}$$

$$\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\beta_{ij}=\beta_{ij3}$$

とおくと、

$$Z=(\alpha_{i3}+\beta_{i3}i)(\alpha_{j3}+\beta_{j3}j)(\alpha_{ij3}+\beta_{ij3}ij)$$

となる。明らかに、

$$\sqrt{\alpha_{i3}^2+\beta_{i3}^2}=1,\sqrt{\alpha_{j3}^2+\beta_{j3}^2}=1$$

を満たす。積１①を使う。

$$(\alpha_{i3}^2+\beta_{i3}^2)(\alpha_{j3}^2+\beta_{j3}^2)(\alpha_{ij3}^2+\beta_{ij3}^2)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$(\alpha_{i3}^2+\beta_{i3}^2)^2(\alpha_{j3}^2+\beta_{j3}^2)^2(\alpha_{ij3}^2-\beta_{ij3}^2)^2$$
$$=((a-d)^2+(b+c)^2)((a+d)^2+(b-c)^2)$$
$$=\ Z^{\ 4}$$

より、

$$\alpha_{ij3}^2+\beta_{ij3}^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$\alpha_{ij3}^2>\beta_{ij3}^2$なので、

$$\alpha_{ij3}^2-\beta_{ij3}^2=\|Z\|^2$$

$$\alpha_{ij3}^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2\right)$$

$$\beta_{ij3}^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2\right)$$

$$\cos^2\varphi_{ij}=\frac{1}{2|Z|^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\|Z\|^2\right)$$

$$\sin^2\varphi_{ij}=\frac{1}{2|Z|^2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-\|Z\|^2\right)$$

が成り立つ。

$$(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$
$$=\frac{\alpha_i+\beta_i i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}{\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}}$$
$$\times\left(\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\alpha_j\right.$$
$$\left.+\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\beta_j j\right)$$

と変換する。先ほどと同様に変数変換し、

$$Z=(\alpha_{i2}+\beta_{i2}i)(\alpha_{j2}+\beta_{j2}j)(\alpha_{ij2}+\beta_{ij2}ij)$$

とおく。明らかに、

$$\sqrt{\alpha_{i2}^2+\beta_{i2}^2}=1,\sqrt{\alpha_{ij2}^2-\beta_{ij2}^2}=1$$

を満たす。積１②を使う。

$$(\alpha_{i2}^2+\beta_{i2}^2)(\alpha_{j2}^2-\beta_{j2}^2)(\alpha_{ij2}^2-\beta_{ij2}^2)$$
$$=a^2+b^2-c^2-d^2$$

より、

$$\alpha_{j2}^2-\beta_{j2}^2=a^2+b^2-c^2-d^2$$

$$\alpha_{j2}^2+\beta_{j2}^2=\|Z\|^2$$

$$\alpha_{j2}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$

$$\beta_{j2}^2=\frac{1}{2}\left(\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$

$$\cos^2\varphi_j=\frac{1}{2|Z|^2}\left(\|Z\|^2+a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$

$$\sin^2\varphi_j=\frac{1}{2|Z|^2}\left(\|Z\|^2-a^2-b^2+c^2+d^2\right)$$

が成り立つ。

$$(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$
$$=\frac{\alpha_j+\beta_j j}{\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}}\frac{\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij}{\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}}$$
$$\times\left(\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\alpha_i\right.$$
$$\left.+\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\beta_i i\right)$$

と変換する。

$$Z=(\alpha_{i1}+\beta_{i1}i)(\alpha_{j1}+\beta_{j1}j)(\alpha_{ij1}+\beta_{ij1}ij)$$

とおく。明らかに、

$$\sqrt{\alpha_{j1}^2+\beta_{j1}^2}=1,\sqrt{\alpha_{ij1}^2-\beta_{ij1}^2}=1$$

を満たす。積１③を使う。

$$(\alpha_{i1}^2-\beta_{i1}^2)(\alpha_{j1}^2+\beta_{j1}^2)(\alpha_{ij1}^2-\beta_{ij1}^2)$$
$$=a^2-b^2+c^2-d^2$$

より、

$$\alpha_{i1}^2-\beta_{i1}^2=a^2+b^2-c^2-d^2$$

$$\alpha_{i1}{}^2 + \beta_{i1}{}^2 = \|Z\|^2$$
$$\alpha_{i1}{}^2 = \frac{1}{2}\left(\|Z\|^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)$$
$$\beta_{i1}{}^2 = \frac{1}{2}\left(\|Z\|^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2\right)$$
$$\cos^2\varphi_i = \frac{1}{2|Z|^2}\left(\|Z\|^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)$$
$$\sin^2\varphi_i = \frac{1}{2|Z|^2}\left(\|Z\|^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2\right)$$
が成り立つ。

２乗を取ると、右辺には±が出てくる。たとえば、
$$\cos\varphi_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$$
となる。

また、 $\alpha_j \geq 0, \alpha_{ij} \geq 0, \alpha_{ij}{}^2 > \beta_{ij}{}^2$ という条件も考慮に入れると、
$$\cos\varphi_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$$
$$\sin\varphi_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2 - a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$$
$$\cos\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2 + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$$
$$\sin\varphi_j = \pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{\|Z\|^2 - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}$$
$$\cos\varphi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \|Z\|^2}$$
$$\sin\varphi_{ij} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}|Z|}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \|Z\|^2}$$
となる。

（証明完）