４次元複素空間の考察

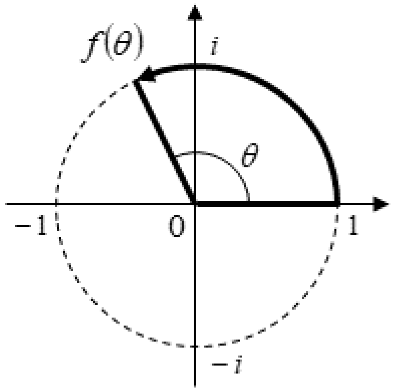
鈴木　啓一

$e^{i\pi}=-1$の可視化

複素平面上で、原点を中心とする単位円を考える。

$f(\theta)=$｛偏角がθとなる単位円上の点の座標｝

と定義する。



$f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$

という式となる。微分すると、

$$
\begin{aligned}
f'(\theta)&=-\sin\theta+i\cos\theta\\
&=i\times(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&=i\times f(\theta)
\end{aligned}
$$

という性質を持っている。ところで、aを実数として、e^{ax}を微分すると、$\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}$となる。$a$を複素数に拡張し、

$f(\theta)=e^{i\theta}$ と表記することにする。

$e^{i\theta}$は、あくまでも関数表記であって、記号のようなものと解釈できる。$e=2.7\cdots$という定数ではないと思う。また、単位円上の円周曲線は、実数の指数関数とは似てはいないが、同じ性質があるようである。

そして、$\theta=\pi$とおくと$e^{i\pi}=-1$ を満たす。「$e^{i\pi}=-1$とは、複素平面上の原点を中心とする単位円で、偏角がπとなる点の座標は－１である」と解釈できる。

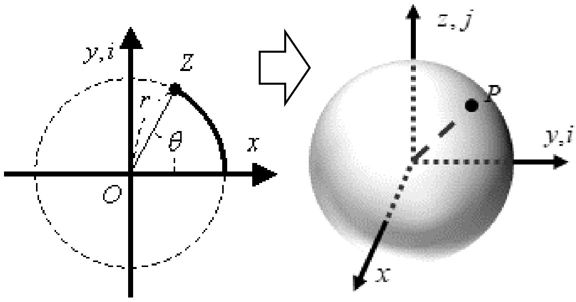
ところで、複素数iをかけることにより、「$1\to i\to -1\to -i\to 1$」と変化する。この変化は、「偏角$\dfrac{\pi}{2}$を加える」という行為と一致するため、「回転群」と解釈もできる。

２つの複素数による複素空間の考察

基本方針

「ハミルトンの４元数」は、「四則演算は成り立つが、交換法則・結合法則・配分法則すべてが成り立つことはない」という性質がある。$ij=k$を回転群で考えると、iによる回転群（縦回転）とjによる回転群（横回転）の合成が、kによる回転群と解釈できる。kによる回転群は、縦回転と横回転の合成なので、単純な回転群ではないようである。

複素平面の性質を基本に、複素空間を定義する。複素平面上での極座標表示が下記のように関数表示できることを、複素空間にも適用できるように考える。



仮に、$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$を$Z=re^{i\theta+j\varphi}$に拡張したとすると、$r,\theta,\varphi$という３変数なので３次空間の関数に見えるが、

$$
\begin{aligned}
Z&=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+j\sin\varphi)\\
&=r(\cos\theta\cos\varphi+i\sin\theta\cos\varphi\\
&\qquad+j\cos\theta\sin\varphi+ij\sin\theta\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

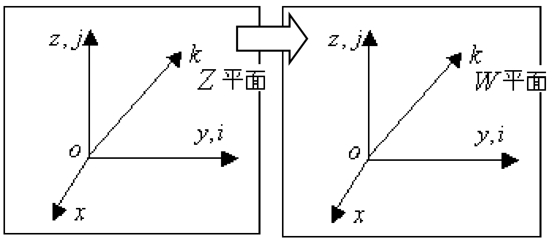
と展開すると４次元の関数になる。なおijとするかkとするかは後で検討する。

$Z=re^{i\theta+j\varphi}$で計算できるなら、計算後３次元に射影することにより使いやすいことがあるかもしれない。そのためには、４次元の複素空間の性質を調べなくてはならない。数の基本性質をすべて満たす体系を作り、微積分・級数展開・留数定理・・などができるように考える。そして、物理・工学で応用できるようになることを目標とする。

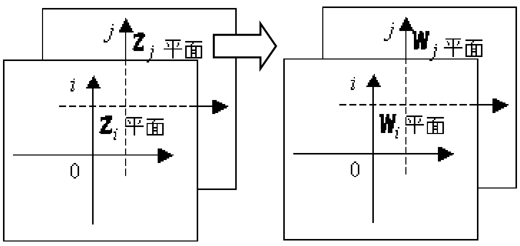
複素数の次元を$j,k,\cdots$と単純に増やすのではなく、意味を持たせて増やしたい。

i回転群と j回転群の合成は、新たな回転群になるのではなく、群の合成はあくまでも合成であるということにする。

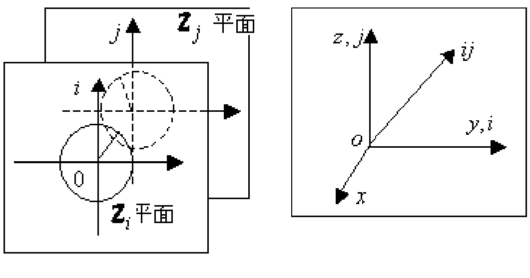
ハミルトンは複素数の次元を増やし、その集合での演算を定義し、４元数間の関数を考えた。



複素数の次元を増やすよりも、そもそも複素平面の数を増やすことから考えるべきである。つまり、２つの複素平面から、２つの複素平面への関数があり、その関数が複素数の次元を増やすような表現になればいいのである。そして、写像の表現方法を定義すればよい。



関数の表現方法も再定義する。



２つの複素平面を扱うといのは、２次元の多変数関数論と同じようなものである。しかし、多変数関数論では、２つの変数で同じ複素数 i を使って計算している。ここでは、２つの回転群による演算を考慮に入れる。複素平面上の２点

$$Z_i = \alpha_i + \beta_i i, Z_j = \alpha_j + \beta_j j$$

$$(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j \in R)$$

とおいて、２点の演算たとえば $Z_i Z_j$ や $Z_i Z_j + Z_i + Z_j + 2$ における複素数 i, j の振る舞いを考慮に入れて、２変数関数というものを議論したい。

複素空間の定義

２変数の複素数から２変数の複素数への写像を考える。
$Z=(Z_i,Z_j), W=(W_i,W_j)$として、
$W=F(Z)$が成り立つ。
Z_i,Z_jそれぞれ複素表示

$$Z_i=\alpha_i+\beta_i i, Z_j=\alpha_j+\beta_j j$$
$$(\alpha_i,\beta_i,\alpha_j,\beta_j\in R)$$

が可能とする。
複素数i,jは、$i^2=j^2=-1$を満たす。
注：複素空間・複素平面およびその領域を極太大文字$\mathbf{W},\mathbf{Z},\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_j$、複素空間・複素平面上の写像・点を大文字$W,Z,Z_i,Z_j$とし、それ以外の要素間の写像･実数値を小文字で表現する。

$\mathbf{Z}_i$空間上の元$Z_{i1}=\alpha_{i1}+\beta_{i1}i$, $Z_{i2}=\alpha_{i2}+\beta_{i2}i$に対し四則演算を定義する。この定義により、演算の基本の３法則（交換・結合・分配法則）が成り立つ。

・ $Z_{i1}\pm Z_{i2}=(\alpha_{i1}\pm\alpha_{i2})+(\beta_{i1}\pm\beta_{i2})i$

・ $Z_{i1}Z_{i2}=(\alpha_{i1}\alpha_{i2}-\beta_{i1}\beta_{i2})+(\alpha_{i1}\beta_{i2}+\alpha_{i2}\beta_{i1})i$

・ $\dfrac{Z_{i1}}{Z_{i2}}=\dfrac{\alpha_{i1}\alpha_{i2}+\beta_{i1}\beta_{i2}}{\alpha_{i2}{}^2+\beta_{i2}{}^2}+\dfrac{-\alpha_{i1}\beta_{i2}+\alpha_{i2}\beta_{i1}}{\alpha_{i2}{}^2+\beta_{i2}{}^2}i$

同様な方法で、$\mathbf{Z}_j$空間上の元$Z_{j1}=\alpha_{j1}+\beta_{j1}j$, $Z_{j2}=\alpha_{j2}+\beta_{j2}j$に対して四則演算を定義する。演算の基本の３法則も成り立つ。

・ $Z_{j1}\pm Z_{j2}=(\alpha_{j1}\pm\alpha_{j2})+(\beta_{j1}\pm\beta_{j2})j$

・ $Z_{j1}Z_{j2}=(\alpha_{j1}\alpha_{j2}-\beta_{j1}\beta_{j2})+(\alpha_{j1}\beta_{j2}+\alpha_{j2}\beta_{j1})j$

・ $\dfrac{Z_{j1}}{Z_{j2}}=\dfrac{\alpha_{j1}\alpha_{j2}+\beta_{j1}\beta_{j2}}{\alpha_{j2}{}^2+\beta_{j2}{}^2}+\dfrac{-\alpha_{j1}\beta_{j2}+\alpha_{j2}\beta_{j1}}{\alpha_{j2}{}^2+\beta_{j2}{}^2}j$

また、極座標表示
$Z_i=r_ie^{i\theta_i}, Z_j=r_je^{j\theta_j}\ (r_i,\theta_i,r_j,\theta_j\in R)$
も可能とする。

$\mathbf{Z}_i$平面上の点から$\mathbf{Z}_i$上の点への写像のみを考えた場合、$\mathbf{Z}_i$は体になる。同様に$\mathbf{Z}_j$についても同様である。積空間$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_i\times\mathbf{Z}_j$の場合、$\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_j$が別次元であれば体になるが、$i,j$を使った演算を考慮にいれた空間$\mathbf{Z}$で考えた場合、演算の再構築が必要である。

$W=F(Z_i,Z_j)$により、FがZ_i,Z_jの演算になるので、i,jを使った演算を定義する。

・ $Z_i\pm Z_j=(\alpha_i\pm\alpha_j)+\beta_i i\pm\beta_j j$

・ $\alpha Z_i=\alpha\alpha_i+\alpha\beta_i i, \alpha Z_j=\alpha\alpha_j+\alpha\beta_j j\quad(\alpha\in R)$

・ $iZ_i=-\beta_i+\alpha_i i, jZ_j=-\beta_j+\alpha_j j$
  $jZ_i=j\alpha_i+\beta_i ij, iZ_j=i\alpha_j+\beta_j ij$

・ $Z_iZ_j=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)=\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\beta_i i+\alpha_i\beta_j j+\beta_i\beta_j ij$

仮に$Z_iZ_j=a+bi+cj+dij(a,b,c,d\in R)$と表現すると、$ad=bc$を満たす。
$d=0$ と仮定すると、$b=0$または$c=0$を満たさなければならない、$c=0$とすると、$Z_iZ_j=a+bi$、$b=0$とすると、$Z_iZ_j=a+cj$となる。次に$a=0$の場合を考え、まとめると、

$$\begin{cases} a=0,b=0\to Z_iZ_j=(c+di)j \\ a=0,c=0\to Z_iZ_j=i(b+dj) \\ d=0,b=0\to Z_iZ_j=a+cj \\ d=0,c=0\to Z_iZ_j=a+bi \end{cases}$$

となる。Z_i,Z_jのどちらかが、1 または複素数項 1 となる。
$a=0,b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0$はありえない。同様に、$b=0$のみ、$c=0$のみ、$d=0$のみはありえない。

（i,jの演算）

$Z_i Z_j = Z_j Z_i$ より、$ij = ji$ を満たす。

$(ij)^2 = i^2 j^2 = 1$

歴史的に $x^2 = -1$ の解を虚数で $x = \pm i$ とした。$x^2 = 1$ の解を $x = \pm 1$、及び虚数の組合せで $x = \pm ij$ も解としても問題はないと思う。

（加法・減法・乗法）

$Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij$

$Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij$

として、

$$\begin{aligned} Z_1 \pm Z_2 &= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i \\ &\quad + (c_1 \pm c_2) j + (d_1 \pm d_2) ij \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 \times Z_2 = &(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ &+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2) j \\ &+ (a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2) ij \end{aligned}$$

したがって、加法・減法・乗法で閉じている。

（乗法の特別な性質）

$Z_1 = i + j, Z_2 = i - j$ の場合、

$Z_1 \times Z_2 = i^2 - j^2 = -1 + 1 = 0$

となる。つまり、$Z_1 \neq 0, Z_2 \neq 0$ だが、$Z_1 \times Z_2 = 0$ となる場合がある。

一般に $Z_1 \times Z_2 = 0$ となる条件を決定しなければならない。

定理（乗法の特別な性質）

$Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij$

$Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij$

において、

条件１、$a_1 = -d_1, b_1 = c_1$

条件２、$a_1 = d_1, b_1 = -c_1$

条件３、$a_2 = -d_2, b_2 = c_2$

条件４、$a_2 = d_2, b_2 = -c_2$

のうち、いずれかの条件を満たせば、$Z_1 \times Z_2 = 0$ となる。

（証明）

$$\begin{cases} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2 = 0 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2 = 0 \\ a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2 = 0 \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2 = 0 \end{cases}$$

を a_1, b_1, c_1, d_1 の連立方程式と考える。

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ 0 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

となる。分母 $\neq 0$ ならば

$$\text{分子} = \begin{vmatrix} 0 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ 0 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

なので、$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ となり最初の仮定に矛盾する。したがって、分母 $= 0$ とならなければならない。

$$\text{分母} = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

第１列に第４列を加える

$$= \begin{vmatrix} a_2 + d_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 - c_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ -b_2 + c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ a_2 + d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

第３行に第２行を加える
第４行から第１行を引く

$$= \begin{vmatrix} a_2 + d_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 - c_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & a_2 - d_2 & a_2 - d_2 & -b_2 - c_2 \\ 0 & b_2 + c_2 & b_2 + c_2 & a_2 - d_2 \end{vmatrix}$$

第２列から第３列を引く

$$=\begin{vmatrix} a_2+d_2 & -b_2+c_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2-c_2 & a_2+d_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & a_2-d_2 & -b_2-c_2 \\ 0 & 0 & b_2+c_2 & a_2-d_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2+d_2 & -b_2+c_2 \\ b_2-c_2 & a_2+d_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2-d_2 & -b_2-c_2 \\ b_2+c_2 & a_2-d_2 \end{vmatrix}$$

$$=\left\{(a_2+d_2)^2+(b_2-c_2)^2\right\} \times \left\{(a_2-d_2)^2+(b_2+c_2)^2\right\}$$

しがかって、$a_2=-d_2, b_2=c_2$ または $a_2=d_2, b_2=-c_2$ とならなければならない。

逆に a_2, b_2, c_2, d_2 の連立方程式と考えると、$a_1=-d_1, b_1=c_1$ または $a_1=d_1, b_1=-c_1$ とならなければならない。

したがって、

$a_1=-d_1, b_1=c_1$ または $a_1=d_1, b_1=-c_1$ または $a_2=-d_2, b_2=c_2$ または $a_2=d_2, b_2=-c_2$ のとき $Z_1 \times Z_2=0$ となる。

（証明完）

定理（乗法の特別な性質２）

$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$ において

$a_1=-d_1, b_1=c_1$ ならば、任意の素数 Z_2 を掛けても、実数項 $=-ij$ 項、i 項 $=j$ 項という性質は保存される。同様に実数項 $=ij$ 項、i 項 $=-j$ 項の場合も保存される。

（証明）

$a_1=-d_1, b_1=c_1, Z_2 \neq 0$ の場合、

$$\begin{aligned} Z_1Z_2 &= (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2) \\ &\quad +(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2)i \\ &\quad +(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2)j \\ &\quad +(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2)ij \\ &= (a_1a_2-b_1b_2-b_1c_2-a_1d_2) \\ &\quad +(a_1b_2+b_1a_2-b_1d_2+a_1c_2)i \\ &\quad +(a_1c_2-b_1d_2+b_1a_2+a_1b_2)j \\ &\quad +(a_1d_2+b_1c_2+b_1b_2-a_1a_2)ij \end{aligned}$$

Z_1Z_2 の実数項 $=-ij$ 項、i 項 $=j$ 項、となる。

したがって、条件 $a_1=-d_1, b_1=c_1$ を満たす素数 Z_1 に対し、任意の素数 Z_2 により $Z_1Z_2=a_{12}+b_{12}i+c_{12}j+d_{12}ij$ と掛けても、$a_{12}=-d_{12}, b_{12}=c_{12}$ を満たす。

同様に $a_1=d_1, b_1=-c_1, Z_2 \neq 0$ の場合、Z_1Z_2 の実数項 $=ij$ 項、i 項 $=-j$ 項、となる。

（証明完）

（除法）

$$\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{a_2+b_2i+c_2j+d_2ij}{a_1+b_1i+c_1j+d_1ij}$$

（乗法の特別な性質）

$Z_i=-1+i, Z_j=-1+j$ の場合、

$Z_iZ_j+Z_i+Z_j=-1+ij$

$-1+ij$ の乗法の逆元を計算すると、

$$\frac{1}{-1+ij}=\frac{1+ij}{(-1+ij)(1+ij)}=\frac{1+ij}{0}$$

となり、矛盾する。

一般的に除法が成り立たない条件を決定しなければならない。

定理（除法の特別な性質）

$$\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{a_2+b_2i+c_2j+d_2ij}{a_1+b_1i+c_1j+d_1ij}$$

とおいたとき、$a_1=d_1, b_1=-c_1$ または $a_1=-d_1, b_1=c_1$ ならば、除法は成り立たない。

（証明）

$$\begin{aligned} \frac{Z_2}{Z_1} &= \frac{a_2+b_2i+c_2j+d_2ij}{a_1+b_1i+c_1j+d_1ij} \\ &= \frac{a_2+b_2i+c_2j+d_2ij}{(a_1+c_1j)+(b_1+d_1j)i} \times \frac{(a_1+c_1j)-(b_1+d_1j)i}{(a_1+c_1j)-(b_1+d_1j)i} \\ &= (a_2+b_2i+c_2j+d_2ij) \times \left\{(a_1+c_1j)-(b_1+d_1j)i\right\} \times \frac{1}{(a_1+c_1j)^2+(b_1+d_1j)^2} \end{aligned}$$

以降、分母から複素数 j を除く演算をし、分母＝０となる式を作る。

$$\begin{aligned} 分母 &= (a_1+c_1j)^2+(b_1+d_1j)^2 \\ &= \left(a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2-d_1{}^2\right) \end{aligned}$$

$$+\left(2a_1c_1+2b_1d_1\right)j$$

より、

$$\left\{\left(a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2-d_1{}^2\right)+\left(2a_1c_1+2b_1d_1\right)j\right\}$$
$$\times\left\{\left(a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2-d_1{}^2\right)-\left(2a_1c_1+2b_1d_1\right)j\right\}$$
$$=\left(a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2-d_1{}^2\right)^2+4\left(a_1c_1+b_1d_1\right)^2$$
$$=a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4+d_1{}^4$$
$$+2a_1{}^2b_1{}^2-2a_1{}^2c_1{}^2-2a_1{}^2d_1{}^2$$
$$-2b_1{}^2c_1{}^2-2b_1{}^2d_1{}^2+2c_1{}^2d_1{}^2$$
$$+4a_1{}^2c_1{}^2+8a_1b_1c_1d_1+4b_1{}^2d_1{}^2$$
$$=a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4+d_1{}^4$$
$$+2a_1{}^2b_1{}^2+2a_1{}^2c_1{}^2-2a_1{}^2d_1{}^2$$
$$-2b_1{}^2c_1{}^2+2b_1{}^2d_1{}^2+2c_1{}^2d_1{}^2$$
$$+8a_1b_1c_1d_1$$
$$=\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2\right)^2-4\left(a_1d_1-b_1c_1\right)^2$$
$$=\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2-2a_1d_1+2b_1c_1\right)$$
$$\times\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2+2a_1d_1-2b_1c_1\right)$$
$$=\left(\left(a_1-d_1\right)^2+\left(b_1+c_1\right)^2\right)$$
$$\times\left(\left(a_1+d_1\right)^2+\left(b_1-c_1\right)^2\right)$$

したがって、

$a_1=d_1, b_1=-c_1$ または $a_1=-d_1, b_1=c_1$ ならば、除法は成り立たない。

（証明完）

（その他）

・ $Z=a+ib+jc+ijd$ において $ad=bc$ を満たし、かつ $a=d, b=-c$ となる条件を満たす場合、

$a^2=-b^2$ となり、 $a=b=c=d=0$ つまり $Z=0$ となる。

・実数項や i 項、 j 項、 ij 項のみを表記する方法として、

$a=\mathrm{Re}[Z], b=\mathrm{Im}_i[Z]$

$c=\mathrm{Im}_j[Z], d=\mathrm{Im}_{ij}[Z]$

とする

・座標を表す方法として、 $Z=(a,b,c,d)$ とする。

複素数の四則演算の再定義、及び演算の基本の３法則

$Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij$、
$Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij$、
$Z_3 = a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 ij$ とする。

（加法）

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ &\quad + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)ij \end{aligned}$$

（減法）

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \\ &\quad + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)ij \end{aligned}$$

（乗法）

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2)j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2)ij \end{aligned}$$

（除法）

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij}{a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij}$$

（交換法則）

$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1, Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$

なぜなら、

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ &\quad + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)ij \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i \\ &\quad + (c_2 + c_1)j + (d_2 + d_1)ij \\ &= Z_2 + Z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2)j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2)ij \\ &= (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 + d_2 d_1) \\ &\quad + (a_2 b_1 + b_2 a_1 - c_2 d_1 - d_2 c_1)i \\ &\quad + (a_2 c_1 - b_2 d_1 + c_2 a_1 - d_2 b_1)j \\ &\quad + (a_2 d_1 + b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 a_1)ij \\ &= Z_2 Z_1 \end{aligned}$$

（結合法則）

$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$
$(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$

なぜなら、

$$\begin{aligned} &(Z_1 + Z_2) + Z_3 \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)i \\ &\quad + ((c_1 + c_2) + c_3)j + ((d_1 + d_2) + d_3)ij \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))i \\ &\quad + (c_1 + (c_2 + c_3))j + (d_1 + (d_2 + d_3))ij \\ &= Z_1 + (Z_2 + Z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2)j \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2)ij \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 Z_3 &= (a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 + d_2 d_3) \\ &\quad + (a_2 b_3 + b_2 a_3 - c_2 d_3 - d_2 c_3)i \\ &\quad + (a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 - d_2 b_3)j \\ &\quad + (a_2 d_3 + b_2 c_3 + c_2 b_3 + d_2 a_3)ij \end{aligned}$$

$(Z_1 Z_2) Z_3$ の実数項

$$\begin{aligned} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2)a_3 \\ &\quad - (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)b_3 \\ &\quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2)c_3 \\ &\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2)d_3 \\ &= a_1(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 + d_2 d_3) \\ &\quad - b_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 - c_2 d_3 - d_2 c_3) \\ &\quad - c_1(a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 - d_2 b_3) \\ &\quad + d_1(a_2 d_3 + b_2 c_3 + c_2 b_3 + d_2 a_3) \\ &= Z_1(Z_2 Z_3) \text{の実数項} \end{aligned}$$

$(Z_1 Z_2) Z_3$ の i 項

$$\begin{aligned} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2)b_3 \\ &\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)a_3 \\ &\quad - (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2)d_3 \\ &\quad - (a_1 d_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2)c_3 \\ &= a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 - c_2 d_3 - d_2 c_3) \\ &\quad + b_1(a_2 a_3 - b_2 b_3 - c_2 c_3 + d_2 d_3) \\ &\quad - c_1(a_2 d_3 + b_2 c_3 + c_2 b_3 + d_2 a_3) \\ &\quad - d_1(a_2 c_3 - b_2 d_3 + c_2 a_3 - d_2 b_3) \\ &= Z_1(Z_2 Z_3) \text{の } i \text{ 項} \end{aligned}$$

$(Z_1 Z_2) Z_3$ の j 項

$$\begin{aligned} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + d_1 d_2)c_3 \\ &\quad - (a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 c_2)d_3 \end{aligned}$$

$$+\left(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2\right)a_3$$
$$-\left(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2\right)b_3$$
$$= a_1\left(a_2c_3 - b_2d_3 + c_2a_3 - d_2b_3\right)$$
$$-b_1\left(a_2d_3 + b_2c_3 + c_2b_3 + d_2a_3\right)$$
$$+c_1\left(a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 + d_2d_3\right)$$
$$-d_1\left(a_2b_3 + b_2a_3 - c_2d_3 - d_2c_3\right)$$
$$= Z_1\left(Z_2Z_3\right) \text{の } j \text{ 項}$$

$\left(Z_1Z_2\right)Z_3$ の ij 項

$$= \left(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2\right)d_3$$
$$+\left(a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1c_2\right)c_3$$
$$+\left(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2\right)b_3$$
$$+\left(a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2\right)a_3$$
$$= a_1\left(a_2d_3 + b_2c_3 + c_2b_3 + d_2a_3\right)$$
$$+b_1\left(a_2c_3 - b_2d_3 + c_2a_3 - d_2b_3\right)$$
$$+c_1\left(a_2b_3 + b_2a_3 - c_2d_3 - d_2c_3\right)$$
$$+d_1\left(a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 + d_2d_3\right)$$
$$= Z_1\left(Z_2Z_3\right) \text{の } ij \text{ 項}$$

$$\therefore \left(Z_1Z_2\right)Z_3 = Z_1\left(Z_2Z_3\right)$$

（配分法則）

$$\left(Z_1 + Z_2\right)Z_3 = Z_1Z_3 + Z_2Z_3$$

なぜなら、

$$\left(Z_1 + Z_2\right)Z_3$$
$$= \left(\left(a_1 + a_2\right)a_3 - \left(b_1 + b_2\right)b_3\right.$$
$$\left. - \left(c_1 + c_2\right)c_3 + \left(d_1 + d_2\right)d_3\right)$$
$$+\left(\left(a_1 + a_2\right)b_3 + \left(b_1 + b_2\right)a_3\right.$$
$$\left. - \left(c_1 + c_2\right)d_3 - \left(d_1 + d_2\right)c_3\right)i$$
$$+\left(\left(a_1 + a_2\right)c_3 - \left(b_1 + b_2\right)d_3\right.$$
$$\left. + \left(c_1 + c_2\right)a_3 - \left(d_1 + d_2\right)b_3\right)j$$
$$+\left(\left(a_1 + a_2\right)d_3 + \left(b_1 + b_2\right)c_3\right.$$
$$\left. + \left(c_1 + c_2\right)b_3 + \left(d_1 + d_2\right)a_3\right)ij$$
$$= \left(a_1a_3 - b_1b_3 - c_1c_3 + d_1d_3\right)$$
$$+\left(a_1b_3 + b_1a_3 - c_1d_3 - d_1c_3\right)i$$
$$+\left(a_1c_3 - b_1d_3 + c_1a_3 - d_1b_3\right)j$$
$$+\left(a_1d_3 + b_1c_3 + c_1b_3 + d_1a_3\right)ij$$
$$+\left(a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 + d_2d_3\right)$$
$$+\left(a_2b_3 + b_2a_3 - c_2d_3 - d_2c_3\right)i$$
$$+\left(a_2c_3 - b_2d_3 + c_2a_3 - d_2b_3\right)j$$
$$+\left(a_2d_3 + b_2c_3 + c_2b_3 + d_2a_3\right)ij$$

$$= Z_1Z_3 + Z_2Z_3$$

複素数の零元（零因子）

$a=-d, b=c$ または $a=d, b=-c$ を満たす数 Z は、０のような性質がある。
$s,t \in R$ として、
$a=-d, b=c$ ならば $Z=(1-ij)s+(i+j)t$、
$a=d, b=-c$ ならば $Z=(1+ij)s+(i-j)t$、
と Z は複素空間では平面上に存在する。

$$\mathbf{O}_Z=\{Z: Z=(a,b,c,d) \\ , a=-d, b=c \text{または} a=d, b=-c\}$$
$$\mathbf{O}=(0,0,0,0)$$
$$\mathbf{O}_{Z1}=\{Z: Z=(a,b,c,d), a=-d, b=c, \\ \text{ただし} a=b=0 \text{の場合を除く}\}$$
$$\mathbf{O}_{Z2}=\{Z: Z=(a,b,c,d), a=d, b=-c, \\ \text{ただし} a=b=0 \text{の場合を除く}\}$$
と定義する。明らかに
$$\mathbf{O}_Z=\mathbf{O} \cup \mathbf{O}_{Z1} \cup \mathbf{O}_{Z2}$$

$a=-d, b=c$ または $a=d, b=-c$ を満たす数 Z が関係する場合の演算の性質を整理する。

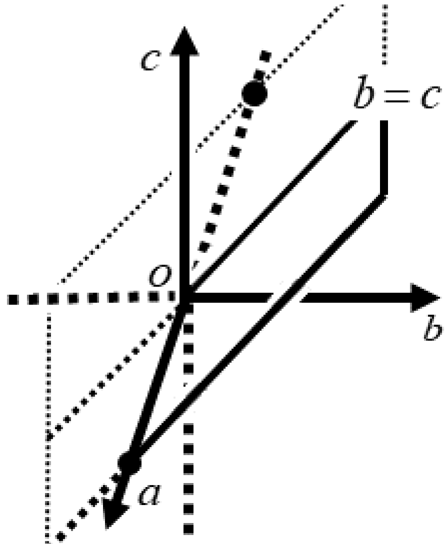
① $Z_1 \in \mathbf{O}_{Z1}, Z_2 \in \mathbf{O}_{Z2} \Rightarrow Z_1 Z_2 = 0$

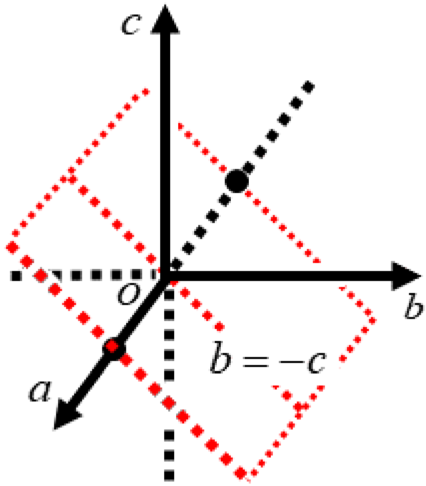
② $Z_1 \in \mathbf{O}_{Z1}, {}^\forall Z_2 \neq 0 \Rightarrow Z_1 Z_2 \in \mathbf{O}_{Z1}$

$Z_2 \in \mathbf{O}_{Z2}, {}^\forall Z_1 \neq 0 \Rightarrow Z_1 Z_2 \in \mathbf{O}_{Z2}$

③ $Z \in \mathbf{O}_Z \Rightarrow Z$ による割算は成り立たない。

Z が $\mathbf{O}_Z$ の元ならば、Z を「零元（零因子)」と呼ぶことにする。本来の「零元」は、$Z_1 \in \mathbf{O}_Z, {}^\forall Z_2 \Rightarrow Z_1 Z_2 = 0$ とならなければならないが、便宜的に「零元」とする。
a,b,c のみでグラフ化すると、

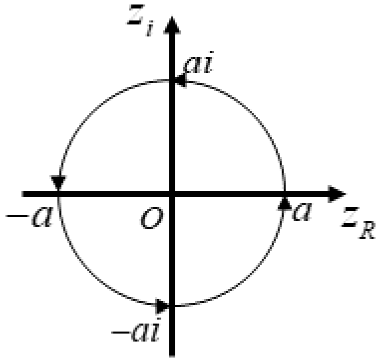


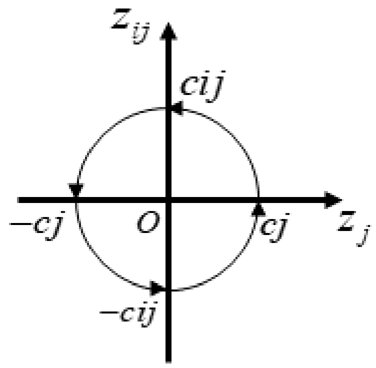


となる。

i, j, ij の積による表現

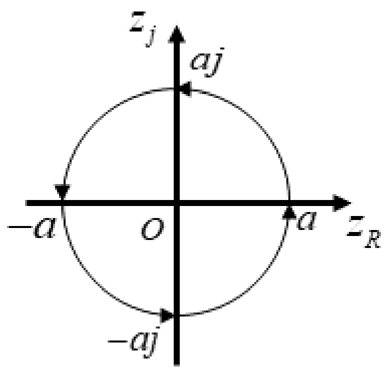
$Z = a$ の場合、
$iZ = ai, i^2 Z = -a, i^3 Z = -ai$
$Z = cj$ の場合、
$iZ = cij, i^2 Z = -cj, i^3 Z = -cij$
図にすると、

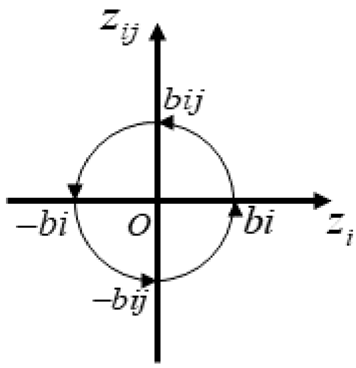




となり、$z_R z_i$ 平面において点 a が、$z_j z_{ij}$ 平面において点 cj が反時計回りに回っている。つまり、4 次元空間全体が同じ方向に回っている。これを i 回転と呼ぶことにする。

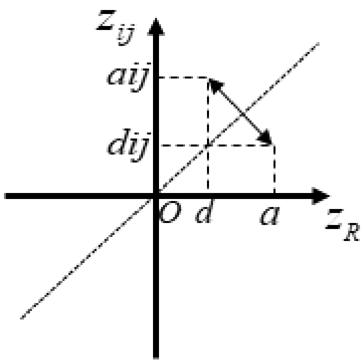
$Z = a$ の場合、
$jZ = aj, j^2 Z = -a, j^3 Z = -aj$
$Z = bi$ の場合、
$jZ = bij, j^2 Z = -bi, j^3 Z = -bij$

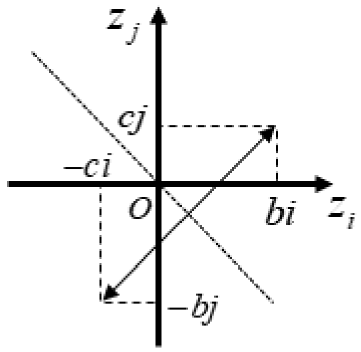




となり、$z_R z_j$ 平面において点 a が、$z_i z_{ij}$ 平面において点 bi が反時計回りに回っているのがわかる。つまり、4 次元空間全体が同じ方向に回っている。これを j 回転と呼ぶことにする。

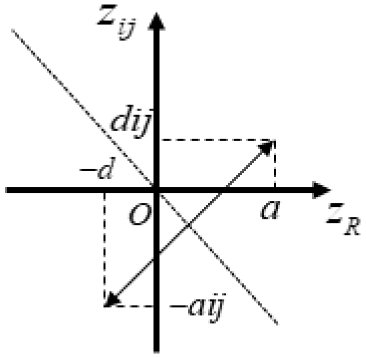
$Z = a + dij$ の場合、
$ijZ = aij + d, (ij)^2 Z = a + dij$
$Z = bi + cj$ の場合、
$ijZ = -bj - ci, (ij)^2 Z = bi + cj$

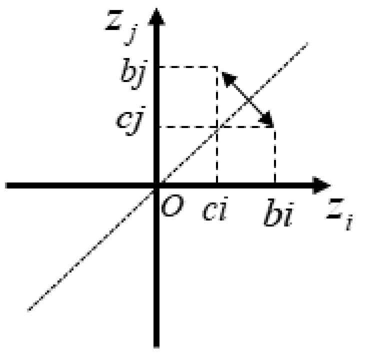




$z_R z_{ij}$ 平面において、 $Z=a+dij$ に ij を掛けることは、i回転・j回転させることである。そしてこれが、直線 $z_R=z_{ij}$ 基準に線対称な点を求めることである。 $z_i z_j$ 平面においては、直線 $z_i=-z_j$ が基準になる。

$Z=a+dij$ の場合、
$-ijZ=-aij-d,(-ij)^2 Z=a+dij$
$Z=bi+cj$ の場合、
$-ijZ=bj+ci,(-ij)^2 Z=bi+cj$





$z_R z_{ij}$ 平面において、$Z=a+dij$ に $-ij$ を掛けることは、$-i$回転・j回転（i回転・$-j$回転でもよい）させることである。そしてこれが、そしてこれが、直線 $z_R=-z_{ij}$ 基準に線対称な点を求めることである。 $z_i z_j$ 平面においては、直線 $z_i=z_j$ が基準になる。

$a=d,b=-c$ ならば、$Z=ijZ$ となるので、$Z=0$ と同じ扱いになり $Z\in\mathbf{O}_{Z2}$
$a=-d,b=c$ ならば、 $Z=-ijZ$ となり $Z\in\mathbf{O}_{Z1}$

３次元空間での積

定理

３次元空間上の点、$(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)$

において、

$a_1d_1 = b_1c_1, a_1 \neq 0$, $a_2d_2 = b_2c_2, a_2 \neq 0$

という条件を加えて、

$Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 ij$

$Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 ij$

という４次元の複素空間上の点とする。

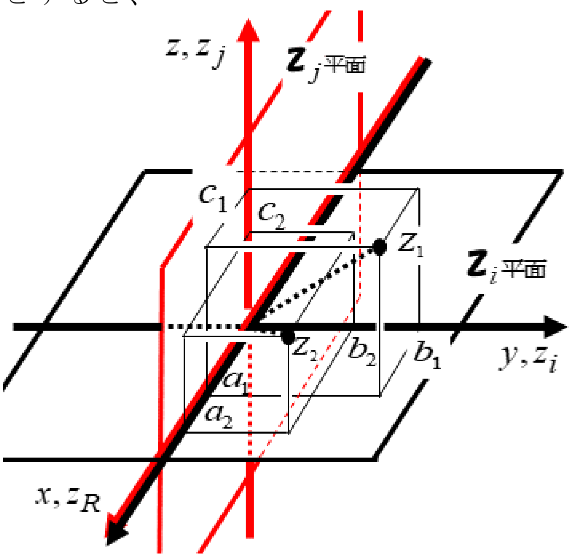
$Z = a + bi + cj + dij$, $Z = Z_1 Z_2$

とする。

$Z_{i1} = a_1 + b_1 i$, $Z_{i2} = a_2 + b_2 i$,

$Z_{j1} = a_1 + c_1 j$, $Z_{j2} = a_2 + c_2 j$

とすると、



$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1a_2 - b_1b_2)(a_1a_2 - c_1c_2) \\ b = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1a_2 - c_1c_2)(a_1b_2 + b_1a_2) \\ c = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1a_2 - b_1b_2)(a_1c_2 + c_1a_2) \\ d = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1b_2 + b_1a_2)(a_1c_2 + c_1a_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a_1a_2}\mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}]\mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}] \\ b = \dfrac{1}{a_1a_2}\mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}]\mathrm{Im}_i[Z_{i1}Z_{i2}] \\ c = \dfrac{1}{a_1a_2}\mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}]\mathrm{Im}_j[Z_{j1}Z_{j2}] \\ d = \dfrac{1}{a_1a_2}\mathrm{Im}_i[Z_{i1}Z_{i2}]\mathrm{Im}_j[Z_{j1}Z_{j2}] \end{cases}$$

（証明）

$$\begin{cases} a = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2 \\ b = a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1c_2 \\ c = a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2 \\ d = a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + \dfrac{b_1c_1b_2c_2}{a_1a_2} \\ b = a_1b_2 + b_1a_2 - c_1\dfrac{b_2c_2}{a_2} - \dfrac{b_1c_1}{a_1}c_2 \\ c = a_1c_2 - b_1\dfrac{b_2c_2}{a_2} + c_1a_2 - \dfrac{b_1c_1}{a_1}b_2 \\ d = a_1\dfrac{b_2c_2}{a_2} + b_1c_2 + c_1b_2 + \dfrac{b_1c_1}{a_1}a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a_1a_2}\left(a_1{}^2a_2{}^2 - a_1a_2b_1b_2 - a_1a_2c_1c_2 + b_1c_1b_2c_2\right) \\ b = \dfrac{1}{a_1a_2}\left(a_1{}^2a_2b_2 + a_1b_1a_2{}^2 - a_1c_1b_2c_2 - b_1c_1a_2c_2\right) \\ c = \dfrac{1}{a_1a_2}\left(a_1{}^2a_2c_2 - a_1b_1b_2c_2 + a_1c_1a_2{}^2 - b_1c_1a_2b_2\right) \\ d = \dfrac{1}{a_1a_2}\left(a_1{}^2b_2c_2 + a_1b_1a_2c_2 + a_1c_1a_2b_2 + b_1c_1a_2{}^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1a_2 - b_1b_2)(a_1a_2 - c_1c_2) \\ b = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1a_2 - c_1c_2)(a_1b_2 + b_1a_2) \\ c = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1a_2 - b_1b_2)(a_1c_2 + c_1a_2) \\ d = \dfrac{1}{a_1a_2}(a_1b_2 + b_1a_2)(a_1c_2 + c_1a_2) \end{cases}$$

$Z_{i1} = a_1 + b_1 i$

$Z_{i2} = a_2 + b_2 i$

とおくと、

$$Z_{i1}Z_{i2} = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

$Z_{j1} = a_1 + c_1 j$

$Z_{j2} = a_2 + c_2 j$

とおくと、

$$Z_{j1}Z_{j2} = (a_1 + c_1 j)(a_2 + c_2 j)$$
$$= (a_1 a_2 - c_1 c_2) + (a_1 c_2 + c_1 a_2) j$$

したがって、

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}] \mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}] \\ b = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}] \mathrm{Im}_i [Z_{i1}Z_{i2}] \\ c = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}] \mathrm{Im}_j [Z_{j1}Z_{j2}] \\ d = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Im}_i [Z_{i1}Z_{i2}] \mathrm{Im}_j [Z_{j1}Z_{j2}] \end{cases}$$

（証明完）

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}] \mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}] \\ b = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}] \mathrm{Im}_i [Z_{i1}Z_{i2}] \\ c = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}] \mathrm{Im}_j [Z_{j1}Z_{j2}] \\ d = \dfrac{1}{a_1 a_2} \mathrm{Im}_i [Z_{i1}Z_{i2}] \mathrm{Im}_j [Z_{j1}Z_{j2}] \end{cases}$$

の意味について考察する。

a とは、$\mathbf{Z}_i$ 平面上の２点 $Z_{i1} = a_1 + b_1 i$, $Z_{i2} = a_2 + b_2 i$ の積の実数部 $\mathrm{Re}[Z_{i1}Z_{i2}]$ と、$\mathbf{Z}_j$ 平面上の２点 $Z_{j1} = a_1 + c_1 j$, $Z_{j2} = a_2 + c_2 j$ の積の実数部 $\mathrm{Re}[Z_{j1}Z_{j2}]$ の積である。

同様に、b, c, d についても、積の積で表現できることになる。

複素数を積で表示する

定理

$Z \neq 0$ならば$\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$を実数、

さらに$\alpha_j \geq 0, \alpha_{ij} \geq 0, \left|\alpha_{ij}\right| \geq \left|\beta_{ij}\right|$として、

$$Z = a + bi + cj + dij$$
$$= (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$

とi, j, ijの積で表示できる。

さらに、関係式

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2) \times (\alpha_{ij}{}^2 + \beta_{ij}{}^2) \cdot\cdot \text{積 1 ①}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = (\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 - \beta_j{}^2) \times (\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2) \cdot\cdot \text{積 1 ②}$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = (\alpha_i{}^2 - \beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2) \times (\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2) \cdot\cdot \text{積 1 ③}$$

を満たす。

（証明）

$$Z = a + bi + cj + dij$$
$$= (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$

において$\alpha_j < 0$の場合、

$$(\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= (-\alpha_i - \beta_i i)(-\alpha_j - \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$

と変換できるので、$\alpha_j \geq 0$という条件を入れても、一般性は失われない。同様に、$\alpha_{ij} \geq 0$という条件を入れても、一般性は失われない。

$\left|\alpha_{ij}\right| < \left|\beta_{ij}\right|$の場合、

$$(\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= (ij)^2 (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= (-\beta_i + \alpha_i i)(-\beta_j + \alpha_j j)(\beta_{ij} + \alpha_{ij} ij)$$

と変換できるので、$\left|\alpha_{ij}\right| \geq \left|\beta_{ij}\right|$という条件を入れても、一般性は失われない。

$\left|\alpha_j\right| < \left|\beta_j\right|, \left|\alpha_{ij}\right| \geq \left|\beta_{ij}\right|$の場合、

$$(\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= -j^2 (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= -(\alpha_i j + \beta_i ij)(-\beta_j + \alpha_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= -(\alpha_i \alpha_{ij} j - \alpha_i \beta_{ij} i + \beta_i \alpha_{ij} ij + \beta_i \beta_{ij}) \times (-\beta_j + \alpha_j j)$$
$$= -(\beta_i - \alpha_i i)(-\beta_j + \alpha_j j)(\beta_{ij} + \alpha_{ij} ij)$$

と変換できる。この式で、j項を変換するとij項も変換されてしまい、

$\left|\alpha_j\right| < \left|\beta_j\right|, \left|\alpha_{ij}\right| \geq \left|\beta_{ij}\right|$の条件から

$\left|\alpha_j\right| \geq \left|\beta_j\right|, \left|\alpha_{ij}\right| \geq \left|\beta_{ij}\right|$という条件への変換には矛盾がある。

つまり、$\left|\alpha_{ij}\right| \geq \left|\beta_{ij}\right|$という条件を入れるならば、$\left|\alpha_j\right|$と$\left|\beta_j\right|$との間に条件を入れることはできない。

$$(\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$
$$= (\alpha_i \alpha_j \alpha_{ij} + \beta_i \beta_j \beta_{ij}) + (\beta_i \alpha_j \alpha_{ij} - \alpha_i \beta_j \beta_{ij}) i + (\alpha_i \beta_j \alpha_{ij} - \beta_i \alpha_j \beta_{ij}) j + (\alpha_i \alpha_j \beta_{ij} + \beta_i \beta_j \alpha_{ij}) ij$$

$$\begin{cases} a = \alpha_i \alpha_j \alpha_{ij} + \beta_i \beta_j \beta_{ij} \cdot\cdot \text{積 2 ①} \\ b = \beta_i \alpha_j \alpha_{ij} - \alpha_i \beta_j \beta_{ij} \cdot\cdot \text{積 2 ②} \\ c = \alpha_i \beta_j \alpha_{ij} - \beta_i \alpha_j \beta_{ij} \cdot\cdot \text{積 2 ③} \\ d = \alpha_i \alpha_j \beta_{ij} + \beta_i \beta_j \alpha_{ij} \cdot\cdot \text{積 2 ④} \end{cases}$$

を満たす。まず、

$$a + bi + cj + dij$$
$$= (\alpha_i + \beta_i i)(\alpha_j + \beta_j j)(\alpha_{ij} + \beta_{ij} ij)$$

において、$a + bi + cj + dij \neq 0$なので、

$$\alpha_i = \alpha_j = \alpha_{ij} = \beta_i = \beta_j = \beta_{ij} = 0$$

というすべてが 0 とはならない。つまり

$\alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2 \neq 0, \alpha_j{}^2 + \beta_j{}^2 \neq 0,$

$\alpha_{ij}{}^2 + \beta_{ij}{}^2 \neq 0$は明らかである。

I　$a^2 + b^2 \neq 0, a^2 + c^2 \neq 0,$
$b^2 + d^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0,$
$a^2 - d^2 \neq 0, b^2 - c^2 \neq 0,$
$\alpha_{ij}{}^2 - \beta_{ij}{}^2 \neq 0$の場合

積２①×α_i＋積２②×β_i

$$a\alpha_i = \alpha_i^2\alpha_j\alpha_{ij} + \alpha_i\beta_i\beta_j\beta_{ij}$$

＋ $$b\beta_i = \beta_i^2\alpha_j\alpha_{ij} - \alpha_i\beta_i\beta_j\beta_{ij}$$

$a\alpha_i + b\beta_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\alpha_j\alpha_{ij}$ ··積３①

積２①×β_i－積２②×α_i

$$a\beta_i = \alpha_i\beta_i\alpha_j\alpha_{ij} + \beta_i^2\beta_j\beta_{ij}$$

－ $$b\alpha_i = \alpha_i\beta_i\alpha_j\alpha_{ij} - \alpha_i^2\beta_j\beta_{ij}$$

$a\beta_i - b\alpha_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\beta_j\beta_{ij}$ ··積３②

積２①×α_j＋積２③×β_j

$$a\alpha_j = \alpha_i\alpha_j^2\alpha_{ij} + \beta_i\alpha_j\beta_j\beta_{ij}$$

＋ $$c\beta_j = \alpha_i\beta_j^2\alpha_{ij} - \beta_i\alpha_j\beta_j\beta_{ij}$$

$a\alpha_j + c\beta_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)\alpha_i\alpha_{ij}$ ··積３③

積２①×β_j－積２③×α_j

$$a\beta_j = \alpha_i\alpha_j\beta_j\alpha_{ij} + \beta_i\beta_j^2\beta_{ij}$$

－ $$c\alpha_j = \alpha_i\alpha_j\beta_j\alpha_{ij} - \beta_i\alpha_j^2\beta_{ij}$$

$a\beta_j - c\alpha_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)\beta_i\beta_{ij}$ ··積３④

積２①×α_{ij}－積２④×β_{ij}

$$a\alpha_{ij} = \alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}^2 + \beta_i\beta_j\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

－ $$d\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j\beta_{ij}^2 + \beta_i\beta_j\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

$a\alpha_{ij} - d\beta_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right)\alpha_i\alpha_j$ ··積３⑤

積２①×β_{ij}－積２④×α_{ij}

$$a\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}\beta_{ij} + \beta_i\beta_j\beta_{ij}^2$$

－ $$d\alpha_{ij} = \alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}\beta_{ij} + \beta_i\beta_j\alpha_{ij}^2$$

$a\beta_{ij} - d\alpha_{ij} = \left(\beta_{ij}^2 - \alpha_{ij}^2\right)\beta_i\beta_j$ ··積３⑥

積２②×β_{ij}＋積２③×α_{ij}

$$b\beta_{ij} = \beta_i\alpha_j\alpha_{ij}\beta_{ij} - \alpha_i\beta_j\beta_{ij}^2$$

＋ $$c\alpha_{ij} = \alpha_i\beta_j\alpha_{ij}^2 - \beta_i\alpha_j\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

$b\beta_{ij} + c\alpha_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right)\alpha_i\beta_j$ ··積３⑦

積２②×α_{ij}＋積２③×β_{ij}

$$b\alpha_{ij} = \beta_i\alpha_j\alpha_{ij}^2 - \alpha_i\beta_j\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

＋ $$c\beta_{ij} = \alpha_i\beta_j\alpha_{ij}\beta_{ij} - \beta_i\alpha_j\beta_{ij}^2$$

$b\alpha_{ij} + c\beta_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right)\beta_i\alpha_j$ ··積３⑧

積２④×α_j－積２②×β_j

$$d\alpha_j = \alpha_i\alpha_j^2\beta_{ij} + \beta_i\alpha_j\beta_j\alpha_{ij}$$

－ $$b\beta_j = \beta_i\alpha_j\beta_j\alpha_{ij} - \alpha_i\beta_j^2\beta_{ij}$$

$d\alpha_j - b\beta_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)\alpha_i\beta_{ij}$ ··積３⑨

積２④×β_j＋積２②×α_j

$$d\beta_j = \alpha_i\alpha_j\beta_j\beta_{ij} + \beta_i\beta_j^2\alpha_{ij}$$

＋ $$b\alpha_j = \beta_i\alpha_j^2\alpha_{ij} - \alpha_i\alpha_j\beta_j\beta_{ij}$$

$d\beta_j + b\alpha_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)\beta_i\alpha_{ij}$ ··積３⑩

積２④×β_i＋積２③×α_i

$$d\beta_i = \alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_{ij} + \beta_i^2\beta_j\alpha_{ij}$$

＋ $$c\alpha_i = \alpha_i^2\beta_j\alpha_{ij} - \alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_{ij}$$

$d\beta_i + c\alpha_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\beta_j\alpha_{ij}$ ··積３⑪

積２④×α_i－積２③×β_i

$$d\alpha_i = \alpha_i^2\alpha_j\beta_{ij} + \alpha_i\beta_i\beta_j\alpha_{ij}$$

－ $$c\beta_i = \alpha_i\beta_i\beta_j\alpha_{ij} - \beta_i^2\alpha_j\beta_{ij}$$

$d\alpha_i - c\beta_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\alpha_j\beta_{ij}$ ··積３⑫

まとめると、

$a\alpha_i + b\beta_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\alpha_j\alpha_{ij}$ ··積３①

$a\beta_i - b\alpha_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\beta_j\beta_{ij}$ ··積３②

$a\alpha_j + c\beta_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)\alpha_i\alpha_{ij}$ ··積３③

$a\beta_j - c\alpha_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)\beta_i\beta_{ij}$ ··積３④

$a\alpha_{ij} - d\beta_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right)\alpha_i\alpha_j$ ··積３⑤

$a\beta_{ij} - d\alpha_{ij} = \left(\beta_{ij}^2 - \alpha_{ij}^2\right)\beta_i\beta_j$ ··積３⑥

$b\beta_{ij}+c\alpha_{ij}=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\alpha_i\beta_j$ ‥積３⑦

$b\alpha_{ij}+c\beta_{ij}=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\beta_i\alpha_j$ ‥積３⑧

$d\alpha_j-b\beta_j=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\alpha_i\beta_{ij}$ ‥積３⑨

$d\beta_j+b\alpha_j=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\beta_i\alpha_{ij}$ ‥積３⑩

$d\beta_i+c\alpha_i=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\beta_j\alpha_{ij}$ ‥積３⑪

$d\alpha_i-c\beta_i=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\alpha_j\beta_{ij}$ ‥積３⑫

積３①×a−積３②×b

$$\begin{aligned}
&a^2\alpha_i+ab\beta_i=a\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\alpha_j\alpha_{ij}\\
-\;&\underline{ab\beta_i-b^2\alpha_i=b\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\beta_j\beta_{ij}}\\
&\left(a^2+b^2\right)\alpha_i=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(a\alpha_j\alpha_{ij}-b\beta_j\beta_{ij}\right)\text{‥積４①}
\end{aligned}$$

積３①×b＋積３②×a

$$\begin{aligned}
&ab\alpha_i+b^2\beta_i=b\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\alpha_j\alpha_{ij}\\
+\;&\underline{a^2\beta_i-ab\alpha_i=a\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\beta_j\beta_{ij}}\\
&\left(a^2+b^2\right)\beta_i=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(b\alpha_j\alpha_{ij}+a\beta_j\beta_{ij}\right)\text{‥積４②}
\end{aligned}$$

積３③×a−積３④×c

$$\begin{aligned}
&a^2\alpha_j+ac\beta_j=a\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\alpha_i\alpha_{ij}\\
-\;&\underline{ac\beta_j-c^2\alpha_j=c\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\beta_i\beta_{ij}}\\
&\left(a^2+c^2\right)\alpha_j=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(a\alpha_i\alpha_{ij}-c\beta_i\beta_{ij}\right)\text{‥積４③}
\end{aligned}$$

積３③3×c＋積３④×a

$$\begin{aligned}
&ac\alpha_j+c^2\beta_j=c\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\alpha_i\alpha_{ij}\\
+\;&\underline{a^2\beta_j-ac\alpha_j=a\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\beta_i\beta_{ij}}\\
&\left(a^2+c^2\right)\beta_j=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(c\alpha_i\alpha_{ij}+a\beta_i\beta_{ij}\right)\text{‥積４④}
\end{aligned}$$

積３⑤×a＋積３⑥×d

$$\begin{aligned}
&a^2\alpha_{ij}-ad\beta_{ij}=a\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\alpha_i\alpha_j\\
+\;&\underline{ad\beta_{ij}-d^2\alpha_{ij}=d\left(\beta_{ij}{}^2-\alpha_{ij}{}^2\right)\beta_i\beta_j}\\
&\left(a^2-d^2\right)\alpha_{ij}=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(a\alpha_i\alpha_j-d\beta_i\beta_j\right)\text{‥積４⑤}
\end{aligned}$$

積３⑤×d＋積３⑥×a

$$\begin{aligned}
&ad\alpha_{ij}-d^2\beta_{ij}=d\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\alpha_i\alpha_j\\
+\;&\underline{a^2\beta_{ij}-ad\alpha_{ij}=a\left(\beta_{ij}{}^2-\alpha_{ij}{}^2\right)\beta_i\beta_j}\\
&\left(a^2-d^2\right)\beta_{ij}=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(d\alpha_i\alpha_j-a\beta_i\beta_j\right)\text{‥積４⑥}
\end{aligned}$$

積３⑧×b−積３⑦×c

$$\begin{aligned}
&b^2\alpha_{ij}+bc\beta_{ij}=b\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\beta_i\alpha_j\\
-\;&\underline{bc\beta_{ij}+c^2\alpha_{ij}=c\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\alpha_i\beta_j}\\
&\left(b^2-c^2\right)\alpha_{ij}=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(b\beta_i\alpha_j-c\alpha_i\beta_j\right)\text{‥積４⑦}
\end{aligned}$$

積３⑦×b−積３⑧×c

$$\begin{aligned}
&b^2\beta_{ij}+bc\alpha_{ij}=b\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\alpha_i\beta_j\\
-\;&\underline{bc\alpha_{ij}+c^2\beta_{ij}=c\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\beta_i\alpha_j}\\
&\left(b^2-c^2\right)\beta_{ij}=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(b\alpha_i\beta_j-c\beta_i\alpha_j\right)\text{‥積４⑧}
\end{aligned}$$

積３⑩×b＋積３⑨×d

$$\begin{aligned}
&bd\beta_j+b^2\alpha_j=b\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\beta_i\alpha_{ij}\\
+\;&\underline{d^2\alpha_j-bd\beta_j=d\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\alpha_i\beta_{ij}}\\
&\left(b^2+d^2\right)\alpha_j=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(b\beta_i\alpha_{ij}+d\alpha_i\beta_{ij}\right)\text{‥積４⑨}
\end{aligned}$$

積３⑩×d−積３⑨×b

$$\begin{aligned}
&d^2\beta_j+bd\alpha_j=d\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\beta_i\alpha_{ij}\\
-\;&\underline{bd\alpha_j-b^2\beta_j=b\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\alpha_i\beta_{ij}}\\
&\left(b^2+d^2\right)\beta_j=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(d\beta_i\alpha_{ij}-b\alpha_i\beta_{ij}\right)\text{‥積４⑩}
\end{aligned}$$

積３⑪×c＋積３⑫×d

$$cd\beta_i + c^2\alpha_i = c\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\beta_j\alpha_{ij}$$

＋

$$d^2\alpha_i - cd\beta_i = d\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\alpha_j\beta_{ij}$$

$$\left(c^2 + d^2\right)\alpha_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) \times\left(c\beta_j\alpha_{ij} + d\alpha_j\beta_{ij}\right)$$ ‥積４⑪

積３⑪×d－積３⑫×c

$$d^2\beta_i + cd\alpha_i = d\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\beta_j\alpha_{ij}$$

－

$$cd\alpha_i - c^2\beta_i = c\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\alpha_j\beta_{ij}$$

$$\left(c^2 + d^2\right)\beta_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) \times\left(d\beta_j\alpha_{ij} - c\alpha_j\beta_{ij}\right)$$ ‥積４⑫

まとめると

$$\left(a^2 + b^2\right)\alpha_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) \times\left(a\alpha_j\alpha_{ij} - b\beta_j\beta_{ij}\right)$$ ‥積４①

$$\left(a^2 + b^2\right)\beta_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) \times\left(b\alpha_j\alpha_{ij} + a\beta_j\beta_{ij}\right)$$ ‥積４②

$$\left(a^2 + c^2\right)\alpha_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right) \times\left(a\alpha_i\alpha_{ij} - c\beta_i\beta_{ij}\right)$$ ‥積４③

$$\left(a^2 + c^2\right)\beta_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right) \times\left(c\alpha_i\alpha_{ij} + a\beta_i\beta_{ij}\right)$$ ‥積４④

$$\left(a^2 - d^2\right)\alpha_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right) \times\left(a\alpha_i\alpha_j - d\beta_i\beta_j\right)$$ ‥積４⑤

$$\left(a^2 - d^2\right)\beta_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right) \times\left(d\alpha_i\alpha_j - a\beta_i\beta_j\right)$$ ‥積４⑥

$$\left(b^2 - c^2\right)\alpha_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right) \times\left(b\beta_i\alpha_j - c\alpha_i\beta_j\right)$$ ‥積４⑦

$$\left(b^2 - c^2\right)\beta_{ij} = \left(\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2\right) \times\left(b\alpha_i\beta_j - c\beta_i\alpha_j\right)$$ ‥積４⑧

$$\left(b^2 + d^2\right)\alpha_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right) \times\left(b\beta_i\alpha_{ij} + d\alpha_i\beta_{ij}\right)$$ ‥積４⑨

$$\left(b^2 + d^2\right)\beta_j = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right) \times\left(d\beta_i\alpha_{ij} - b\alpha_i\beta_{ij}\right)$$ ‥積４⑩

$$\left(c^2 + d^2\right)\alpha_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) \times\left(c\beta_j\alpha_{ij} + d\alpha_j\beta_{ij}\right)$$ ‥積４⑪

$$\left(c^2 + d^2\right)\beta_i = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) \times\left(d\beta_j\alpha_{ij} - c\alpha_j\beta_{ij}\right)$$ ‥積４⑫

積４①^2＋積４②^2

$$\left(a^2 + b^2\right)^2\alpha_i^2 = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)^2 \times\left(a\alpha_j\alpha_{ij} - b\beta_j\beta_{ij}\right)^2$$

＋

$$\left(a^2 + b^2\right)^2\beta_i^2 = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)^2 \times\left(b\alpha_j\alpha_{ij} + a\beta_j\beta_{ij}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\left(a^2 + b^2\right)^2\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) &= \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)^2\left(\left(a\alpha_j\alpha_{ij} - b\beta_j\beta_{ij}\right)^2 + \left(b\alpha_j\alpha_{ij} + a\beta_j\beta_{ij}\right)^2\right)\\ &= \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)^2\left(\left(a\alpha_j\alpha_{ij}\right)^2 + \left(a\beta_j\beta_{ij}\right)^2 + \left(b\alpha_j\alpha_{ij}\right)^2 + \left(b\beta_j\beta_{ij}\right)^2\right)\\ &= \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)^2\left(a^2 + b^2\right) \times\left(\alpha_j^2\alpha_{ij}^2 + \beta_j^2\beta_{ij}^2\right)\end{aligned}$$ ‥積５①１

$a^2 + b^2 \neq 0, \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ なので、

$$a^2 + b^2 = \left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\left(\alpha_j^2\alpha_{ij}^2 + \beta_j^2\beta_{ij}^2\right)$$ ‥積５①２

積４③^2＋積４④^2

$$\left(a^2 + c^2\right)^2\alpha_j^2 = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)^2 \times\left(a\alpha_i\alpha_{ij} - c\beta_i\beta_{ij}\right)^2$$

＋

$$\left(a^2 + c^2\right)^2\beta_j^2 = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)^2 \times\left(c\alpha_i\alpha_{ij} + a\beta_i\beta_{ij}\right)^2$$

$$\left(a^2 + c^2\right)^2\left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right) = \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)^2\left(\left(a\alpha_i\alpha_{ij} - c\beta_i\beta_{ij}\right)^2\right.$$

$$+\left(c\alpha_i\alpha_{ij}+a\beta_i\beta_{ij}\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\Big(\left(a\alpha_i\alpha_{ij}\right)^2+\left(c\beta_i\beta_{ij}\right)^2$$

$$+\left(c\alpha_i\alpha_{ij}\right)^2+\left(a\beta_i\beta_{ij}\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(a^2+c^2\right)$$

$$\times\left(\alpha_i^2\alpha_{ij}^2+\beta_i^2\beta_{ij}^2\right)\cdot\cdot\text{積５②１}$$

$a^2+c^2\neq 0, \alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\neq 0$ なので、

$$a^2+c^2=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\alpha_{ij}{}^2+\beta_i{}^2\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$\cdot\cdot\text{積５②２}$$

積４⑤^2－積４⑥^2

$$\left(a^2-d^2\right)^2\alpha_{ij}{}^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\times\left(a\alpha_i\alpha_j-d\beta_i\beta_j\right)^2$$

$$-\quad\left(a^2-d^2\right)^2\beta_{ij}{}^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\times\left(d\alpha_i\alpha_j-a\beta_i\beta_j\right)^2$$

$$\left(a^2-d^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\Big(\left(a\alpha_i\alpha_j-d\beta_i\beta_j\right)^2$$

$$-\left(d\alpha_i\alpha_j-a\beta_i\beta_j\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\Big(\left(a\alpha_i\alpha_j\right)^2+\left(d\beta_i\beta_j\right)^2$$

$$-\left(d\alpha_i\alpha_j\right)^2-\left(a\beta_i\beta_j\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\left(a^2-d^2\right)$$

$$\times\left(\alpha_i^2\alpha_j^2-\beta_i^2\beta_j^2\right)\cdot\cdot\text{積５③１}$$

$a^2-d^2\neq 0, \alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\neq 0$ なので、

$$a^2-d^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2-\beta_i{}^2\beta_j{}^2\right)$$

$$\cdot\cdot\text{積５③２}$$

積４⑦^2－積４⑧^2

$$\left(b^2-c^2\right)^2\alpha_{ij}{}^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\times\left(b\beta_i\alpha_j-c\alpha_i\beta_j\right)^2$$

$$-\quad\left(b^2-c^2\right)^2\beta_{ij}{}^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\times\left(b\alpha_i\beta_j-c\beta_i\alpha_j\right)^2$$

$$\left(b^2-c^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\Big(\left(b\beta_i\alpha_j-c\alpha_i\beta_j\right)^2$$

$$-\left(b\alpha_i\beta_j-c\beta_i\alpha_j\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\Big(\left(b\beta_i\alpha_j\right)^2+\left(c\alpha_i\beta_j\right)^2$$

$$-\left(b\alpha_i\beta_j\right)^2-\left(c\beta_i\alpha_j\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\left(b^2-c^2\right)$$

$$\times\left(\beta_i^2\alpha_j^2-\alpha_i^2\beta_j^2\right)\cdot\cdot\text{積５④１}$$

$b^2-c^2\neq 0, \alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\neq 0$ なので、

$$b^2-c^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\left(\beta_i{}^2\alpha_j{}^2-\alpha_i{}^2\beta_j{}^2\right)$$

$$\cdot\cdot\text{積５④２}$$

積４⑨^2＋積４⑩^2

$$\left(b^2+d^2\right)^2\alpha_j{}^2=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\times\left(b\beta_i\alpha_{ij}+d\alpha_i\beta_{ij}\right)^2$$

$$+\quad\left(b^2+d^2\right)^2\beta_j{}^2=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\times\left(d\beta_i\alpha_{ij}-b\alpha_i\beta_{ij}\right)^2$$

$$\left(b^2+d^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\Big(\left(b\beta_i\alpha_{ij}+d\alpha_i\beta_{ij}\right)^2$$

$$+\left(d\beta_i\alpha_{ij}-b\alpha_i\beta_{ij}\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\Big(\left(b\beta_i\alpha_{ij}\right)^2+\left(d\alpha_i\beta_{ij}\right)^2$$

$$+\left(d\beta_i\alpha_{ij}\right)^2+\left(b\alpha_i\beta_{ij}\right)^2\Big)$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(b^2+d^2\right)$$

$$\times\left(\alpha_i^2\beta_{ij}^2+\beta_i^2\alpha_{ij}^2\right)\cdot\cdot\text{積５⑤１}$$

$b^2+d^2\neq 0, \alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\neq 0$ なので、

$$b^2+d^2=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_i{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)$$

$$\cdot\cdot\text{積５⑤２}$$

積４⑪^2＋積４⑫^2

$$\left(c^2+d^2\right)^2\alpha_i{}^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2$$

$$\times\left(c\beta_j\alpha_{ij}+d\alpha_j\beta_{ij}\right)^2$$

$$+\quad \left(c^2+d^2\right)^2\beta_i{}^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\times\left(d\beta_j\alpha_{ij}-c\alpha_j\beta_{ij}\right)^2$$

$$\left(c^2+d^2\right)^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\left(c\beta_j\alpha_{ij}+d\alpha_j\beta_{ij}\right)^2+\left(d\beta_j\alpha_{ij}-c\alpha_j\beta_{ij}\right)^2\right)$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\left(c\beta_j\alpha_{ij}\right)^2+\left(d\alpha_j\beta_{ij}\right)^2+\left(d\beta_j\alpha_{ij}\right)^2+\left(c\alpha_j\beta_{ij}\right)^2\right)$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(c^2+d^2\right)\times\left(\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５⑥１}$$

$c^2+d^2\neq 0,\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\neq 0$なので、

$$c^2+d^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５⑥２}$$

まとめると、

$$a^2+b^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2\alpha_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５①２}$$
$$a^2+c^2=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\alpha_{ij}{}^2+\beta_i{}^2\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５②２}$$
$$a^2-d^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2-\beta_i{}^2\beta_j{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５③２}$$
$$b^2-c^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\left(\beta_i{}^2\alpha_j{}^2-\alpha_i{}^2\beta_j{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５④２}$$
$$b^2+d^2=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_i{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５⑤２}$$
$$c^2+d^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積５⑥２}$$

積５①２+積５⑥２

$$a^2+b^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\times\left(\alpha_j{}^2\alpha_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\beta_{ij}{}^2\right)$$
$$+\quad c^2+d^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\times\left(\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\times\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積１①}$$

積５①２−積５⑥２

$$a^2+b^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\times\left(\alpha_j{}^2\alpha_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\beta_{ij}{}^2\right)$$
$$-\quad c^2+d^2=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\times\left(\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)$$

$$a^2+b^2-c^2-d^2$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2\alpha_{ij}{}^2+\beta_j{}^2\beta_{ij}{}^2-\alpha_j{}^2\beta_{ij}{}^2-\beta_j{}^2\alpha_{ij}{}^2\right)$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2-\beta_j{}^2\right)\times\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積１②}$$

積５③２−積５④２

$$a^2-d^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\times\left(\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2-\beta_i{}^2\beta_j{}^2\right)$$
$$-\quad b^2-c^2=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\times\left(\beta_i{}^2\alpha_j{}^2-\alpha_i{}^2\beta_j{}^2\right)$$

$$a^2-b^2+c^2-d^2$$
$$=\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\left(\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2-\beta_i{}^2\beta_j{}^2-\beta_i{}^2\alpha_j{}^2+\alpha_i{}^2\beta_j{}^2\right)$$
$$=\left(\alpha_i{}^2-\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\times\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積１③}$$

まとめると

$a^2+b^2\neq 0,a^2+c^2\neq 0,b^2+d^2\neq 0,$
$c^2+d^2\neq 0,a^2-d^2\neq 0,b^2-c^2\neq 0,$
$\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\neq 0$ならば、

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$
$$\times\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積１①}$$
$$a^2+b^2-c^2-d^2$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2-\beta_j{}^2\right)$$
$$\times\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積１②}$$
$$a^2-b^2+c^2-d^2$$
$$=\left(\alpha_i{}^2-\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$
$$\times\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)\cdot\cdot\text{積１③}$$

Ⅱ　特殊例

Ⅱ１　$\alpha_{ij}=\beta_{ij}$の場合

積２①～④で、$a=d,b=-c$

つまり、$\alpha_{ij}=\beta_{ij}\Rightarrow Z\in 0_{Z2}$

$$Z=a+bi-bj+aij$$
$$=(a+bi)(1+ij)$$
$$\begin{cases}\alpha_i=a\\ \beta_i=b\end{cases},\begin{cases}\alpha_j=1\\ \beta_j=0\end{cases},\begin{cases}\alpha_i=1\\ \beta_i=1\end{cases}$$

積で表示できて、積１①、積１②、積１③を満たす。

Ⅱ２　その他

・　$\alpha_{ij}=-\beta_{ij}$の場合

・　$a^2+b^2=0,c^2+d^2\neq 0$の場合

・　$a^2+c^2=0,b^2+d^2\neq 0$の場合

・　$b^2+d^2=0,a^2+c^2\neq 0$の場合

・　$c^2+d^2=0,a^2+b^2\neq 0$の場合

いずれも積で表示できて、積１①、積１②、積１③を満たす。

Ⅱ３　$a^2-d^2=0\,,\alpha_i=0\,,\beta_i\neq 0\,,\alpha_j\neq 0\,,\beta_j=0$の場合

$a^2-d^2=0$ならば､積２①､積２④より､

$$0=\left(\alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}+\beta_i\beta_j\beta_{ij}\right)^2$$
$$-\left(\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}+\beta_i\beta_j\alpha_{ij}\right)^2$$
$$=\left(\alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}\right)^2+\left(\beta_i\beta_j\beta_{ij}\right)^2$$
$$-\left(\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}\right)^2-\left(\beta_i\beta_j\alpha_{ij}\right)^2$$
$$=\left(\left(\alpha_i\alpha_j\right)^2-\left(\beta_i\beta_j\right)^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

$\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2=0$の場合は、すでに証明済みなので、

$\left(\alpha_i\alpha_j\right)^2-\left(\beta_i\beta_j\right)^2=0,\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\neq 0$

となる場合を考える。

まず、$\alpha_i\alpha_j=\beta_i\beta_j=0$となる場合を考える。

$\alpha_i=\beta_i=0$または$\alpha_j=\beta_j=0$の場合、$Z=0$となるので矛盾する。したがって、α_i,β_iにおいてどちらか一方が０ではない。α_j,β_jについても同様である。

$\alpha_i=0\,,\beta_i\neq 0\,,\alpha_j\neq 0\,,\beta_j=0$とする。

積２①～④より、

$$\begin{cases}a=0\\ b=\beta_i\alpha_j\alpha_{ij}\\ c=-\beta_i\alpha_j\beta_{ij}\\ d=0\end{cases}$$

したがって、

$$Z=bi-cj$$
$$=i\left(b-c\frac{j}{i}\right)$$
$$=i\left(b-c\frac{i\times j}{i\times i}\right)$$
$$=i(b+cij)$$
$$\begin{cases}\alpha_i=0\\ \beta_i=1\end{cases},\begin{cases}\alpha_j=1\\ \beta_j=0\end{cases},\begin{cases}\alpha_i=b\\ \beta_i=c\end{cases}$$

積で表示できて、積１①、積１②、積１③を満たす。

Ⅱ４　その他

・　$a^2-d^2=0\,,\alpha_i=0\,,\beta_i\neq 0\,,\alpha_j=0\,,\beta_j\neq 0$の場合

・　$a^2-d^2=0\,,\alpha_i\neq 0\,,\beta_i=0\,,\alpha_j\neq 0\,,\beta_j=0$の場合

・　$a^2-d^2=0\,,\alpha_i\neq 0\,,\beta_i=0\,,\alpha_j=0\,,\beta_j\neq 0$の場合

いずれも積で表示できて、積１①、積１②、積１③を満たす。

Ⅱ５　$a^2-d^2=0$, $\alpha_i\neq 0$, $\beta_i\neq 0$, $\alpha_j\neq 0$, $\beta_j\neq 0$ の場合

つまり、$\alpha_i\alpha_j\neq 0, \alpha_i\alpha_j=\pm\beta_i\beta_j$ となる場合を考える。

$\alpha_i\alpha_j=\beta_i\beta_j$ とする。

$$\beta_j=\frac{\alpha_i\alpha_j}{\beta_i}$$

ところで、

$$Z=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$
$$=\alpha_i\alpha_j\left(1+\frac{\beta_i}{\alpha_i}i\right)\left(1+\frac{\beta_j}{\alpha_j}j\right)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$
$$=\left(1+\frac{\beta_i}{\alpha_i}i\right)\left(1+\frac{\beta_j}{\alpha_j}j\right)\times(\alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}+\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}ij)$$

と変換できるので、新たに、

$$\beta_{i1}=\frac{\beta_i}{\alpha_i}, \beta_{j1}=\frac{\beta_j}{\alpha_j}, \alpha_{ij1}=\alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}, \beta_{ij1}=\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}$$

とおく。

$$Z=(1+\beta_{i1}i)(1+\beta_{j1}j)(\alpha_{ij1}+\beta_{ij1}ij)$$

$\dfrac{\beta_j}{\alpha_j}=\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$ より、$\beta_{j1}=\dfrac{1}{\beta_{i1}}$

積２①～④より、

$$\begin{cases}a=d=\alpha_{ij1}+\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}=\alpha_{ij1}+\beta_{ij1}\\ b=\beta_{i1}\alpha_{ij1}-\beta_{j1}\beta_{ij1}=\beta_{i1}\alpha_{ij1}-\dfrac{\beta_{ij1}}{\beta_{i1}}\\ c=\beta_{j1}\alpha_{ij1}-\beta_{i1}\beta_{ij1}=\dfrac{\alpha_{ij1}}{\beta_{i1}}-\beta_{i1}\beta_{ij1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=\beta_{i1}\alpha_{ij1}-\dfrac{1}{\beta_{i1}}(a-\alpha_{ij1})\\ c=\dfrac{1}{\beta_{i1}}\alpha_{ij1}-\beta_{i1}(a-\alpha_{ij1})\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=\dfrac{1}{\beta_{i1}}\left(\beta_{i1}{}^2\alpha_{ij1}+\alpha_{ij1}-a\right)\\ c=\dfrac{1}{\beta_{i1}}\left(\beta_{i1}{}^2\alpha_{ij1}+\alpha_{ij1}-\beta_{i1}{}^2a\right)\end{cases}$$

$$b-c=\frac{a}{\beta_{i1}}\left(\beta_{i1}{}^2-1\right)$$

$$0=a\beta_{i1}{}^2-(b-c)\beta_{i1}-a$$

$$\beta_{i1}=\frac{(b-c)\pm\sqrt{(b-c)^2+4a^2}}{2a}$$

$(b-c)^2+4a^2\geq 0$ なので、β_{i1} は実数である。

$$1+\beta_{i1}{}^2=2+(b-c)\frac{\beta_{i1}}{a}$$
$$=\frac{2a+(b-c)\beta_{i1}}{a}$$

$1+\beta_{i1}{}^2>0$ なので、$2a+(b-c)\beta_{i1}\neq 0$

$$1+\beta_{j1}{}^2=1+\frac{1}{\beta_{i1}{}^2}$$
$$=1+\frac{1}{1+(b-c)\dfrac{\beta_{i1}}{a}}$$
$$=1+\frac{a}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{2a+(b-c)\beta_{i1}}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$

$1+\beta_{j1}{}^2>0$ なので、$a+(b-c)\beta_{i1}\neq 0$

$$b\beta_{i1}=\beta_{i1}{}^2\alpha_{ij1}+\alpha_{ij1}-a$$
$$=\alpha_{ij1}\left(1+\beta_{i1}{}^2\right)-a$$

$$ab\beta_{i1}=\alpha_{ij1}\left(a+a\beta_{i1}{}^2\right)-a^2$$
$$=\alpha_{ij1}\left(2a+(b-c)\beta_{i1}\right)-a^2$$

$$\alpha_{ij1}=\frac{a^2+ab\beta_{i1}}{2a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{a(a+b\beta_{i1})}{2a+(b-c)\beta_{i1}}$$

$$\beta_{ij1}=a-\alpha_{ij1}$$

$$=a-\frac{a^2+ab\beta_{i1}}{2a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{a^2-ac\beta_{i1}}{2a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{a(a-c\beta_{i1})}{2a+(b-c)\beta_{i1}}$$

これで、$\beta_{i1},\beta_{j1},\alpha_{ij1},\beta_{ij1}$が定まった。

$$1-\beta_{i1}{}^2=\frac{(c-b)\beta_{i1}}{a}$$
$$1-\beta_{j1}{}^2=1-\frac{1}{\beta_{i1}{}^2}$$
$$=1-\frac{1}{1+(b-c)\frac{\beta_{i1}}{a}}$$
$$=1-\frac{a}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{(b-c)\beta_{i1}}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$

$$\alpha_{ij1}{}^2+\beta_{ij1}{}^2$$
$$=\left(\frac{a(a+b\beta_{i1})}{2a+(b-c)\beta_{i1}}\right)^2+\left(\frac{a(a-c\beta_{i1})}{2a+(b-c)\beta_{i1}}\right)^2$$
$$=\frac{a^2\left(2a^2+2a(b-c)\beta_{i1}+(b^2+c^2)\beta_{i1}{}^2\right)}{(2a+(b-c)\beta_{i1})^2}$$

$$\alpha_{ij1}{}^2-\beta_{ij1}{}^2$$
$$=\left(\frac{a(a+b\beta_{i1})}{2a+(b-c)\beta_{i1}}\right)^2-\left(\frac{a(a-c\beta_{i1})}{2a+(b-c)\beta_{i1}}\right)^2$$
$$=\frac{a^2(2a+(b-c)\beta_{i1})(b+c)\beta_{i1}}{(2a+(b-c)\beta_{i1})^2}$$
$$=\frac{a^2(b+c)\beta_{i1}}{2a+(b-c)\beta_{i1}}$$

$$(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2)(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2)(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2)$$
$$=(1+\beta_{i1}{}^2)(1+\beta_{j1}{}^2)(\alpha_{ij1}{}^2+\beta_{ij1}{}^2)$$
$$=\frac{a\left(2a^2+2a(b-c)\beta_{i1}+(b^2+c^2)\beta_{i1}{}^2\right)}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=2a^2+\frac{a(b^2+c^2)\beta_{i1}{}^2}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=2a^2+\frac{(b^2+c^2)(a+(b-c)\beta_{i1})}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=2a^2+b^2+c^2$$

$$(1+\beta_{i1}{}^2)(1-\beta_{j1}{}^2)(\alpha_{ij1}{}^2-\beta_{ij1}{}^2)$$
$$=\frac{a(b-c)(b+c)\beta_{i1}{}^2}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{(b^2-c^2)(a+(b-c)\beta_{i1})}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=b^2-c^2$$

$$(1-\beta_{i1}{}^2)(1+\beta_{j1}{}^2)(\alpha_{ij1}{}^2-\beta_{ij1}{}^2)$$
$$=\frac{a(c-b)(b+c)\beta_{i1}{}^2}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=\frac{(c-b)(b+c)(a+(b-c)\beta_{i1})}{a+(b-c)\beta_{i1}}$$
$$=c^2-b^2$$

したがって、$a^2-d^2=0$, $\alpha_i\neq 0,\beta_i\neq 0,$
$\alpha_j\neq 0,\beta_j\neq 0$, $\alpha_i\alpha_j=\beta_i\beta_j$の場合、

$$\alpha_{i1}=\alpha_{j1}=1$$
$$\beta_{i1}=\frac{(b-c)\pm\sqrt{(b-c)^2+4a^2}}{2a}$$
$$\beta_{j1}=\frac{1}{\beta_{i1}}$$
$$\alpha_{ij1}=\frac{a(a+b\beta_{i1})}{2a+\beta_{i1}(b-c)}$$
$$\beta_{ij1}=\frac{a(a-c\beta_{i1})}{2a+\beta_{i1}(b-c)}$$

とおけば積で表示できて、積１①、積１②、積１③を満たす。
$\alpha_i\alpha_j=-\beta_i\beta_j$の場合も同様に証明できる。

Ⅱ６　$b^2-c^2=0$の場合

$$iZ=ia-b+ijc-jd$$
$$=-b+ia-jd+ijc$$
$$-b=a',a=b',-d=c',c=d'$$

とおくと、$a'^2-d'^2=0$という条件になるので、
$a^2-d^2=0$のときの条件に帰着できる。

$$iZ=a'+b'i+c'j+d'ij$$

$$=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij)$$

と積による表示が可能なので、

$$Z=(-\beta_i+\alpha_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij)$$

となる。

かつ、積１①、積１②、積１③を満たす。

（証明完）

複素数を積で表示した場合の特殊例

$ad=bc$ となる条件

$\alpha_{ij}=1, \beta_{ij}=0$、ならば、

$$a+bi+cj+dij=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)$$

$$\begin{cases} a=\alpha_i\alpha_j \\ b=\beta_i\alpha_j \\ c=\alpha_i\beta_j \\ d=\beta_i\beta_j \end{cases}$$

となるので、$ad=bc$ を満たす。

一般的に、$\alpha_{ij}=\alpha_{ij0}(\text{Constant}), \beta_{ij}=0$、ならば、

$$a+bi+cj+dij=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)\alpha_{ij0}$$

$$\begin{cases} a=\alpha_i\alpha_j\alpha_{ij0} \\ b=\beta_i\alpha_j\alpha_{ij0} \\ c=\alpha_i\beta_j\alpha_{ij0} \\ d=\beta_i\beta_j\alpha_{ij0} \end{cases}$$

となるので、$ad=bc$ を満たす。また、$\alpha_{ij}=0, \beta_{ij}=\beta_{ij0}(\text{Constant})$、ならば、

$$a+bi+cj+dij=ij(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)\beta_{ij0}$$

$$\begin{cases} a=\beta_i\beta_j\beta_{ij0} \\ b=-\alpha_i\beta_j\beta_{ij0} \\ c=-\beta_i\alpha_j\beta_{ij0} \\ d=\alpha_i\alpha_j\beta_{ij0} \end{cases}$$

となるので、同様に $ad=bc$ を満たす。

$ac=-bd$ となる条件

$\alpha_j=1, \beta_j=0$、の場合もありうる。このとき、

$$a+bi+cj+dij=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij)$$

$$\begin{cases} a=\alpha_i\alpha_{ij} \\ b=\beta_i\alpha_{ij} \\ c=-\beta_i\beta_{ij} \\ d=\alpha_i\beta_{ij} \end{cases}$$

となるので、$ac=-bd$ を満たす。

一般的に $\alpha_j=\alpha_{j0}(\text{Constant}), \beta_j=0$ または、$\alpha_j=0, \beta_j=\beta_{j0}(\text{Constant})$ ならば、$ac=-bd$ を満たす。

$ab=-cd$ となる条件

$\alpha_i=1, \beta_i=0$ とすると、

$$a+bi+cj+dij=(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij} ij)$$

$$\begin{cases} a=\alpha_j\alpha_{ij} \\ b=-\beta_j\beta_{ij} \\ c=\beta_j\alpha_{ij} \\ d=\alpha_j\beta_{ij} \end{cases}$$

となるので、$ab=-cd$ を満たす。

一般的に $\alpha_i=\alpha_{i0}(\text{Constant}), \beta_i=0$ または、$\alpha_i=0, \beta_i=\beta_{i0}(\text{Constant})$ ならば、$ab=-cd$ を満たす。

特殊な場合の続き

$ad=bc$ ならば、

$a:b=c:d$

$a:b=-c:-d$

$a:-b=-c:d$

$a:c=b:d$

$a:c=-b:-d$

$a:-c=-b:d$

注：次の条件から、$-$を単純に付加した比例式を省略する。

$ac=-bd$ ならば、

$a:b=-d:c$

$a:-d=b:c$

$ab=-cd$ ならば、

$a:c=-d:b$

$a:-d=c:b$

複素数の絶対値

定理（複素空間上の絶対値）

$Z=a+bi+cj+dij$

$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$

$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2ij$

とおいたとき、複素空間上の絶対値 $\|Z\|$ を以下のように定義できて、

$\|Z_1Z_2\|=\|Z_1\|\|Z_2\|$ を満たす。

1　絶対値の一般的な定義

$$\|Z\|=\sqrt[4]{(a-d)^2+(b+c)^2}\times\sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}\quad\text{‥絶１①}$$

$$=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\quad\text{‥絶１②}$$

2　$ad=bc$ の場合

$$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\quad\text{‥絶２①}$$

$$=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\quad\text{‥絶２②}$$

$a_1d_1=b_1c_1$ または $a_2d_2=b_2c_2$ であれば、つまりどちらか一方が $ad=bc$ の条件を満たせば、絶対値の条件

$\|Z_1Z_2\|=\|Z_1\|\|Z_2\|$ を満たす。

3　$ac=-bd$ の場合

$$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}\quad\text{‥絶３①}$$

$$=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\quad\text{‥絶３②}$$

$a_1c_1=-b_1d_1$ または $a_2c_2=-b_2d_2$ であれば、つまりどちらか一方が $ac=-bd$ の条件を満たせば、絶対値の条件

$\|Z_1Z_2\|=\|Z_1\|\|Z_2\|$ を満たす。

4　$ab=-cd$ の場合

$$\|Z\|=\sqrt{a^2-b^2+c^2-d^2}\quad\text{‥絶４①}$$

$$=\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\quad\text{‥絶４②}$$

$a_1b_1=-c_1d_1$ または $a_2b_2=-c_2d_2$ であれば、つまりどちらか一方が $ab=-cd$ の条件を満たせば、絶対値の条件

$\|Z_1Z_2\|=\|Z_1\|\|Z_2\|$ を満たす。

5　その他の性質１

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq\|Z\|^2\quad\text{‥絶５①}$$

$$a^2+b^2-c^2-d^2\leq\|Z\|^2\quad\text{‥絶５②}$$

$$a^2-b^2+c^2-d^2\leq\|Z\|^2\quad\text{‥絶５③}$$

$$\frac{\|Z\|^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}=\frac{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}{\alpha_{ij}^2+\beta_{ij}^2}\quad\text{‥絶５④}$$

6　その他の性質２

$$ad-bc=\alpha_{ij}\beta_{ij}\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_j^2+\beta_j^2\right)\quad\text{‥絶６①}$$

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\|Z\|^2=2\beta_{ij}^2\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_j^2+\beta_j^2\right)\quad\text{‥絶６②}$$

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\|Z\|^2=2\alpha_{ij}^2\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_j^2+\beta_j^2\right)\quad\text{‥絶６③}$$

$$\|Z\|^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)=2\beta_j^2\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2\right)\quad\text{‥絶６④}$$

$$\|Z\|^2+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)=2\alpha_j^2\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)\left(\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2\right)\quad\text{‥絶６⑤}$$

$$\|Z\|^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)=2\beta_i^2\left(\alpha_j^2+\beta_j^2\right)\left(\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2\right)\quad\text{‥絶６⑥}$$

$$\|Z\|^2+\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)=2\alpha_i^2\left(\alpha_j^2+\beta_j^2\right)\left(\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2\right)\quad\text{‥絶６⑦}$$

7　$\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}$ は、絶対値の要件を満たさない。

（証明）

$|Z|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ と定義してみる。

$$|Z|^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)$$
$$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$$
$$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2ij$$
として$|Z_1Z_2|$を考察する。

$$|Z_1Z_2|^2$$
$$\begin{aligned}
&=\left|(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2)\right.\\
&\quad+(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2)i\\
&\quad+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2)j\\
&\quad\left.+(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2)ij\right|\\
&=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2)^2\\
&\quad+(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2)^2\\
&\quad+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2)^2\\
&\quad+(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2)^2\\
&=(a_1a_2)^2+(b_1b_2)^2+(c_1c_2)^2+(d_1d_2)^2\\
&\quad-2a_1b_1a_2b_2-2a_1c_1a_2c_2+2a_1d_1a_2d_2\\
&\quad+2b_1c_1b_2c_2-2b_1d_1b_2d_2-2c_1d_1c_2d_2\\
&\quad+(a_1b_2)^2+(b_1a_2)^2+(c_1d_2)^2+(d_1c_2)^2\\
&\quad+2a_1b_1a_2b_2-2a_1c_1b_2d_2-2a_1d_1b_2c_2\\
&\quad-2b_1c_1a_2d_2-2b_1d_1a_2c_2+2c_1d_1c_2d_2\\
&\quad+(a_1c_2)^2+(b_1d_2)^2+(c_1a_2)^2+(d_1b_2)^2\\
&\quad-2a_1b_1c_2d_2+2a_1c_1a_2c_2-2a_1d_1b_2c_2\\
&\quad-2b_1c_1a_2d_2+2b_1d_1b_2d_2-2c_1d_1a_2b_2\\
&\quad+(a_1d_2)^2+(b_1c_2)^2+(c_1b_2)^2+(d_1a_2)^2\\
&\quad+2a_1b_1c_2d_2+2a_1c_1b_2d_2+2a_1d_1a_2d_2\\
&\quad+2b_1c_1b_2c_2+2b_1d_1a_2c_2+2c_1d_1a_2b_2\\
&=(a_1a_2)^2+(b_1b_2)^2+(c_1c_2)^2+(d_1d_2)^2\\
&\qquad\qquad+2a_1d_1a_2d_2+2b_1c_1b_2c_2\\
&\quad+(a_1b_2)^2+(b_1a_2)^2+(c_1d_2)^2+(d_1c_2)^2\\
&\qquad\qquad-2a_1d_1b_2c_2-2b_1c_1a_2d_2\\
&\quad+(a_1c_2)^2+(b_1d_2)^2+(c_1a_2)^2+(d_1b_2)^2\\
&\qquad\qquad-2a_1d_1b_2c_2-2b_1c_1a_2d_2\\
&\quad+(a_1d_2)^2+(b_1c_2)^2+(c_1b_2)^2+(d_1a_2)^2\\
&\qquad\qquad+2a_1d_1a_2d_2+2b_1c_1b_2c_2\\
&=\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2\right)\\
&\qquad\times\left(a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2\right)\\
&\qquad\qquad+4(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)
\end{aligned}$$

したがって、$a_1d_1=b_2c_2$または$a_2d_2=b_2c_2$であれば、$|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$を満たす。

つまり、ユークリッド空間上の絶対値と、複素空間上の絶対値とは違うことがわかる。ここで、複素空間上の絶対値を$\|Z\|$と表現する。

$ad=bc$ならば、

$Z=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)$と表現できて、絶対値を

$$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\ \cdots絶２①$$
$$=\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\ \cdots絶２②$$

と定義できる。

$ad-bc$を計算してみる。

$$\begin{aligned}
ad-bc&=(\alpha_i\alpha_j\alpha_{ij}+\beta_i\beta_j\beta_{ij})\\
&\qquad\times(\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}+\beta_i\beta_j\alpha_{ij})\\
&\quad-(\beta_i\alpha_j\alpha_{ij}-\alpha_i\beta_j\beta_{ij})\\
&\qquad\times(\alpha_i\beta_j\alpha_{ij}-\beta_i\alpha_j\beta_{ij})\\
&=\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}+\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j\alpha_{ij}{}^2\\
&\quad+\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j\beta_{ij}{}^2+\beta_i{}^2\beta_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}\\
&\quad-\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j\alpha_{ij}{}^2+\beta_i{}^2\alpha_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}\\
&\quad+\alpha_i{}^2\beta_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}-\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j\beta_{ij}{}^2\\
&=\alpha_i{}^2\alpha_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}+\beta_i{}^2\beta_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}\\
&\quad+\beta_i{}^2\alpha_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}+\alpha_i{}^2\beta_j{}^2\alpha_{ij}\beta_{ij}\\
&=\alpha_{ij}\beta_{ij}\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\cdots絶６①
\end{aligned}$$

$\alpha_{ij}\neq\pm\beta_{ij}$ならば、

$$Z=a+bi+cj+dij$$
$$=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$

なので、

$$Z_1=(\alpha_{i1}+\beta_{i1}i)(\alpha_{j1}+\beta_{j1}j)(\alpha_{ij1}+\beta_{ij1}ij)$$
$$Z_2=(\alpha_{i2}+\beta_{i2}i)(\alpha_{j2}+\beta_{j2}j)(\alpha_{ij2}+\beta_{ij2}ij)$$

とおき、$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$と定義し

てみる。

$$
\begin{aligned}
\|Z_1Z_2\|^2 = &\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right)\\
&\quad\times\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right)\\
&\quad+4(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)
\end{aligned}
$$

より、$\alpha_{ij1}\neq\pm\beta_{ij1}$の場合、つまり $a_1=d_1, b_1=-c_1$ や $a_1=-d_1, b_1=c_1$ が成り立たない条件だから、$(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)=0$ という条件は満たさないので $|Z_1Z_2|\neq|Z_1||Z_2|$ となる。

したがって $\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ と定義することに矛盾がある。

$\|Z\|=\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}$ と定義した場合を考察する。

$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$

$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2ij$

$Z=Z_1Z_2=a+bi+cj+dij$

とする。

$$
\begin{cases}
a=a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2\\
b=a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2\\
c=a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2\\
d=a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\|Z\|^2 &= (a-d)^2+(b+c)^2\\
&=a^2+b^2+c^2+d^2-2ad+2bc\\
&=\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right)\\
&\qquad\times\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right)\\
&\qquad+4(a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)\\
&\quad-2(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2)\\
&\qquad\times(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2)\\
&\quad+2(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2)\\
&\qquad\times(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2)\\
&=\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right)\\
&\qquad\times\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right)\\
&\qquad+4a_1d_1a_2d_2-4a_1d_1b_2c_2\\
&\qquad-4b_1c_1a_2d_2+4b_1c_1b_2c_2\\
&\qquad-2a_1a_2a_1d_2-2a_1a_2b_1c_2\\
&\qquad-2a_1a_2c_1b_2-2a_1a_2d_1a_2\\
&\qquad+2b_1b_2a_1d_2+2b_1b_2b_1c_2\\
&\qquad+2b_1b_2c_1b_2+2b_1b_2d_1a_2\\
&\qquad+2c_1c_2a_1d_2+2c_1c_2b_1c_2\\
&\qquad+2c_1c_2c_1b_2+2c_1c_2d_1a_2\\
&\qquad-2d_1d_2a_1d_2-2d_1d_2b_1c_2\\
&\qquad-2d_1d_2c_1b_2-2d_1d_2d_1a_2\\
&\qquad+2a_1b_2a_1c_2-2a_1b_2b_1d_2\\
&\qquad+2a_1b_2c_1a_2-2a_1b_2d_1b_2\\
&\qquad+2b_1a_2a_1c_2-2b_1a_2b_1d_2\\
&\qquad+2b_1a_2c_1a_2-2b_1a_2d_1b_2\\
&\qquad-2c_1d_2a_1c_2+2c_1d_2b_1d_2\\
&\qquad-2c_1d_2c_1a_2+2c_1d_2d_1b_2\\
&\qquad-2d_1c_2a_1c_2+2d_1c_2b_1d_2\\
&\qquad-2d_1c_2c_1a_2+2d_1c_2d_1b_2\\
&=\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right)\\
&\qquad\times\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right)\\
&\qquad+4a_1d_1a_2d_2-4a_1d_1b_2c_2\\
&\qquad-4b_1c_1a_2d_2+4b_1c_1b_2c_2\\
&\qquad-2a_1^2a_2d_2-2a_1b_1a_2c_2\\
&\qquad-2a_1c_1a_2b_2-2a_1d_1a_2^2\\
&\qquad+2a_1b_1b_2d_2+2b_1^2b_2c_2\\
&\qquad+2b_1c_1b_2^2+2b_1d_1a_2b_2\\
&\qquad+2a_1c_1c_2d_2+2b_1c_1c_2^2\\
&\qquad+2c_1^2b_2c_2+2c_1d_1a_2c_2\\
&\qquad-2a_1d_1d_2^2-2b_1d_1c_2d_2\\
&\qquad-2c_1d_1b_2d_2-2d_1^2a_2d_2\\
&\qquad+2a_1^2b_2c_2-2a_1b_1b_2d_2\\
&\qquad+2a_1c_1a_2b_2-2a_1d_1b_2^2\\
&\qquad+2a_1b_1a_2c_2-2b_1^2a_2d_2\\
&\qquad+2b_1c_1a_2^2-2b_1d_1a_2b_2\\
&\qquad-2a_1c_1c_2d_2+2b_1c_1d_2^2\\
&\qquad-2c_1^2a_2d_2+2c_1d_1b_2d_2\\
&\qquad-2a_1d_1c_2^2+2b_1d_1c_2d_2\\
&\qquad-2c_1d_1a_2c_2+2d_1^2b_2c_2\\
&=\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right)\\
&\qquad\times\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2\right)\\
&\qquad+4a_1d_1a_2d_2-4a_1d_1b_2c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-4b_1c_1a_2d_2+4b_1c_1b_2c_2\\
&-2a_1{}^2a_2d_2-2a_1d_1a_2{}^2\\
&+2b_1{}^2b_2c_2+2b_1c_1b_2{}^2\\
&+2b_1c_1c_2{}^2+2c_1{}^2b_2c_2\\
&-2a_1d_1d_2{}^2-2d_1{}^2a_2d_2\\
&+2a_1{}^2b_2c_2-2a_1d_1b_2{}^2\\
&-2b_1{}^2a_2d_2+2b_1c_1a_2{}^2\\
&+2b_1c_1d_2{}^2-2c_1{}^2a_2d_2\\
&-2a_1d_1c_2{}^2+2d_1{}^2b_2c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|Z_1\|^2\|Z_2\|^2 &= \left(\left(a_1-d_1\right)^2+\left(b_1+c_1\right)^2\right)\\
&\quad\times\left(\left(a_2-d_2\right)^2+\left(b_2+c_2\right)^2\right)\\
&=\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2-2a_1d_1+2b_1c_1\right)\\
&\quad\times\left(a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2\right.\\
&\qquad\left.-2a_2d_2+2b_2c_2\right)\\
&=\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2\right)\\
&\quad\times\left(a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2\right)\\
&\quad-2a_1{}^2a_2d_2+2a_1{}^2b_2c_2\\
&\quad-2b_1{}^2a_2d_2+2b_1{}^2b_2c_2\\
&\quad-2c_1{}^2a_2d_2+2c_1{}^2b_2c_2\\
&\quad-2d_1{}^2a_2d_2+2d_1{}^2b_2c_2\\
&\quad-2a_1d_1a_2{}^2+2b_1c_1a_2{}^2\\
&\quad-2a_1d_1b_2{}^2+2b_1c_1b_2{}^2\\
&\quad-2a_1d_1c_2{}^2+2b_1c_1c_2{}^2\\
&\quad-2a_1d_1d_2{}^2+2b_1c_1d_2{}^2\\
&\quad+4a_1d_1a_2d_2-4a_1d_1b_2c_2\\
&\quad-4b_1c_1a_2d_2+4b_1c_1b_2c_2
\end{aligned}
$$

したがって、$\|Z_1Z_2\|^2=\|Z_1\|^2\|Z_2\|^2$

同様に、$\|Z\|=\sqrt{\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2}$ と定義しても同じ $\|Z_1Z_2\|^2=\|Z_1\|^2\|Z_2\|^2$ が成り立つ。

さて、上記２つの定義の式を掛けることにより、絶対値 $\|Z\|$ が０になるかどうかという判定と、Z が零元になるかどうかという判定が一致する。あらためて、

$$
\begin{aligned}
\|Z\| &= \sqrt[4]{\left(a-d\right)^2+\left(b+c\right)^2}\\
&\quad\times\sqrt[4]{\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2}
\end{aligned}
$$

‥絶１①

と定義できる。

この式において、$ad=bc$ ならば

$$
\begin{aligned}
\|Z\|^4 &= \left(\left(a-d\right)^2+\left(b+c\right)^2\right)\\
&\quad\times\left(\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2\right)\\
&=\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2\left(ad-bc\right)\right)\\
&\quad\times\left(a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(ad-bc\right)\right)\\
&=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2
\end{aligned}
$$

したがって、 $Z\ =\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\|Z\| &= \sqrt[4]{\left(a-d\right)^2+\left(b+c\right)^2}\\
&\quad\times\sqrt[4]{\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2}
\end{aligned}
$$

という式は複素空間において、一般化された絶対値の式になる。

$Z_1\in 0_Z, Z_1\neq 0, Z_2\notin 0_Z$ とする。明らかに $\|Z_1\|=0, \|Z_2\|\neq 0$ は成り立つ。 $Z_1Z_2\in 0_Z$ となるので、

$\|Z_1\|\|Z_2\|=\|Z_1Z_2\|=0$ となる。

$\|Z_1\|=0$ なので、$\|Z_1+Z_2\|=\|Z_2\|$ となることも予想される。

$$
\begin{aligned}
\|Z_1+Z_2\|^4 &= \left(\left(a_1+a_2-d_1-d_2\right)^2\right.\\
&\qquad\left.+\left(b_1+b_2+c_1+c_2\right)^2\right)\\
&\quad\times\left(\left(a_1+a_2+d_1+d_2\right)^2\right.\\
&\qquad\left.+\left(b_1+b_2-c_1-c_2\right)^2\right)\\
&=\left(\left(2a_1+a_2-d_2\right)^2+\left(2b_1+b_2+c_2\right)^2\right)\\
&\quad\times\left(\left(a_2+d_2\right)^2+\left(b_2-c_2\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

したがって、一般的に $\|Z_1+Z_2\|\neq\|Z_2\|$ となり、予想は間違っていた。

積による表示を計算する。

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(a-d\right)^2+\left(b+c\right)^2\right)\left(\left(a+d\right)^2+\left(b-c\right)^2\right)\\
&\quad=\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2\left(ad-bc\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\times\left(a^2+b^2+c^2+d^2+2(ad-bc)\right)$$

$$=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2-4(ad-bc)^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$-4\alpha_{ij}{}^2\beta_{ij}{}^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

したがって、$\alpha_{ij}{}^2>\beta_{ij}{}^2$として、

$$\|Z\|=\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}$$

‥絶１②

という形でも定義できる。

$\alpha_{ij}{}^2<\beta_{ij}{}^2$ならば、

$$ij(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$

$$=(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\beta_{ij}+\alpha_{ij}ij)$$

と変換できるから、右辺のα_{ij}とβ_{ij}を入れ替えることにより、$\alpha_{ij}{}^2>\beta_{ij}{}^2$という条件だけで一般性を失わない。

また、$\alpha_{ij}<0$ならば、

$$(\alpha_i+\beta_i i)(\alpha_j+\beta_j j)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij)$$

$$=(\alpha_i+\beta_i i)(-\alpha_j-\beta_j j)(-\alpha_{ij}-\beta_{ij}ij)$$

と変換できるから、$\alpha_{ij}>0$という条件だけで一般性を失わない。

まとめると、$\alpha_{ij}>0$、$\alpha_{ij}{}^2>\beta_{ij}{}^2$という条件だけを考慮に入れるだけで十分である。

積１①～積１③と$\|Z\|$とを比較する。

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2-\ Z\ ^4$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$-\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2$$

$$\times\left(\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)^2-\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\right)$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\times4\alpha_{ij}{}^2\beta_{ij}{}^2\geq0$$

したがって、

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq\|Z\|^2$$ ‥絶５①

が成り立つ。

$$\|Z\|^4-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$-\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2-\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$\times\left(\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2-\left(\alpha_j{}^2-\beta_j{}^2\right)^2\right)$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\times4\alpha_j{}^2\beta_j{}^2\geq0$$

したがって、

$$a^2+b^2-c^2-d^2\leq\ Z\ ^2$$ ‥絶５②

が成り立つ。

$$\|Z\|^4-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$-\left(\alpha_i{}^2-\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2$$

$$\times\left(\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2-\left(\alpha_i{}^2-\beta_i{}^2\right)^2\right)$$

$$=\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)^2\times4\alpha_i{}^2\beta_i{}^2\geq0$$

したがって、

$$a^2-b^2+c^2-d^2\leq\|Z\|^2$$ ‥絶５③

が成り立つ。

積１①を使う。

$$\frac{\|Z\|^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$=\frac{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)}{\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)}$$

$$=\frac{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}{\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2}$$ ‥絶５④

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\|Z\|^2$$

$$=\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2+\beta_{ij}{}^2\right)$$
$$-\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$
$$=2\beta_{ij}{}^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)^2$$

したがって、

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\|Z\|^2$$
$$=2\beta_{ij}{}^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$

‥絶６②

が成り立つ。同様に、

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\|Z\|^2$$
$$=2\alpha_{ij}{}^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)$$

‥絶６③

$$\|Z\|^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$
$$=2\beta_j{}^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

‥絶６④

$$\|Z\|^2+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)$$
$$=2\alpha_j{}^2\left(\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

‥絶６⑤

$$\|Z\|^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)$$
$$=2\beta_i{}^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

‥絶６⑥

$$\|Z\|^2+\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)$$
$$=2\alpha_i{}^2\left(\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2\right)\left(\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2\right)$$

‥絶６⑦

も成り立つ。

次に条件を限定し、$\alpha_j=1,\beta_j=0$ の場合を考察する。

$$a+bi+cj+dij$$
$$=\left(\alpha_i+\beta_i i\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$
$$=\alpha_i\alpha_{ij}+\beta_i\alpha_{ij}i-\beta_i\beta_{ij}j+\alpha_i\beta_{ij}ij$$

したがって、$ac=-bd$ が成り立つ。

$\|Z\|=\sqrt{\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2}\sqrt{\alpha_{ij}{}^2-\beta_{ij}{}^2}$ ‥絶３②

絶６④・絶６⑤の式より、

$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}$ ‥絶３①

が成り立つかもしれない。

$a^2+b^2-c^2-d^2$ が絶対値の用件を満たすかどうか考察する。

$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$

$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2ij$

として $\|Z_1Z_2\|$ を考察する。

$$\|Z_1Z_2\|^2$$
$$=\left(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2\right)^2$$
$$+\left(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2\right)^2$$
$$-\left(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2\right)^2$$
$$-\left(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2\right)^2$$
$$=\left(a_1a_2\right)^2+\left(b_1b_2\right)^2+\left(c_1c_2\right)^2+\left(d_1d_2\right)^2$$
$$-2a_1b_1a_2b_2-2a_1c_1a_2c_2+2a_1d_1a_2d_2$$
$$+2b_1c_1b_2c_2-2b_1d_1b_2d_2-2c_1d_1c_2d_2$$
$$+\left(a_1b_2\right)^2+\left(b_1a_2\right)^2+\left(c_1d_2\right)^2+\left(d_1c_2\right)^2$$
$$+2a_1b_1a_2b_2-2a_1c_1b_2d_2-2a_1d_1b_2c_2$$
$$-2b_1c_1a_2d_2-2b_1d_1a_2c_2+2c_1d_1c_2d_2$$
$$-\left(a_1c_2\right)^2-\left(b_1d_2\right)^2-\left(c_1a_2\right)^2-\left(d_1b_2\right)^2$$
$$+2a_1b_1c_2d_2-2a_1c_1a_2c_2+2a_1d_1b_2c_2$$
$$+2b_1c_1a_2d_2-2b_1d_1b_2d_2+2c_1d_1a_2b_2$$
$$-\left(a_1d_2\right)^2-\left(b_1c_2\right)^2-\left(c_1b_2\right)^2-\left(d_1a_2\right)^2$$
$$-2a_1b_1c_2d_2-2a_1c_1b_2d_2-2a_1d_1a_2d_2$$
$$-2b_1c_1b_2c_2-2b_1d_1a_2c_2-2c_1d_1a_2b_2$$
$$=\left(a_1a_2\right)^2+\left(b_1b_2\right)^2+\left(c_1c_2\right)^2+\left(d_1d_2\right)^2$$
$$+\left(a_1b_2\right)^2+\left(b_1a_2\right)^2+\left(c_1d_2\right)^2+\left(d_1c_2\right)^2$$
$$-\left(a_1c_2\right)^2-\left(b_1d_2\right)^2-\left(c_1a_2\right)^2-\left(d_1b_2\right)^2$$
$$-\left(a_1d_2\right)^2-\left(b_1c_2\right)^2-\left(c_1b_2\right)^2-\left(d_1a_2\right)^2$$
$$-4a_1c_1a_2c_2-4b_1d_1b_2d_2$$
$$-4a_1c_1b_2d_2-4b_1d_1a_2c_2$$
$$=\left(a_1{}^2+b_1{}^2-c_1{}^2-d_1{}^2\right)$$
$$\times\left(a_2{}^2+b_2{}^2-c_2{}^2-d_2{}^2\right)$$
$$-4\left(a_1c_1+b_1d_1\right)\left(a_2c_2+b_2d_2\right)$$
$$=\|Z_1\|^2\|Z_2\|^2$$
$$-4\left(a_1c_1+b_1d_1\right)\left(a_2c_2+b_2d_2\right)$$

したがって、$a_1c_1=-b_1d_1$ または $a_2c_2=-b_2d_2$ なので、$\|Z_1Z_2\|=\|Z_1\|\|Z_2\|$ を満たす。

$$\|Z\|=\sqrt[4]{\left(a-d\right)^2+\left(b+c\right)^2}$$

$$\times\sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}$$

の式において、$ac=-bd$とする。

$$\left((a-d)^2+(b+c)^2\right)\left((a+d)^2+(b-c)^2\right)$$
$$-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$
$$=\left(a^2+b^2-c^2-d^2+2\left(bc-ad+c^2+d^2\right)\right)$$
$$\times\left(a^2+b^2-c^2-d^2+2\left(ad-bc+c^2+d^2\right)\right)$$
$$-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$
$$=4\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$
$$+4\left(bc-ad+c^2+d^2\right)\left(ad-bc+c^2+d^2\right)$$
$$=4\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-4(bc-ad)^2$$
$$=4\left(a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2\right)$$
$$-4\left(b^2c^2+a^2d^2-2abcd\right)$$
$$=4\left(a^2c^2+b^2d^2+2abcd\right)$$
$$=4(ac+bd)^2$$
$$=0$$

したがって、$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}$ は、

$$\|Z\|=\sqrt[4]{(a-d)^2+(b+c)^2}$$
$$\times\sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}$$

の特殊例として扱える。

同様な方法で $\alpha_i=1,\beta_i=0$ の場合を考察する。

$$a+bi+cj+dij$$
$$=\left(\alpha_j+\beta_j j\right)\left(\alpha_{ij}+\beta_{ij}ij\right)$$
$$=\alpha_j\alpha_{ij}-\beta_j\beta_{ij}i+\beta_j\alpha_{ij}j+\alpha_j\beta_{ij}ij$$

したがって、$ab=-cd$が成り立つ。

$$\|Z\|=\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}\sqrt{\alpha_{ij}^2-\beta_{ij}^2}\ \cdots 絶4②$$

絶6⑥・絶6⑦の式より、

$$\|Z\|=\sqrt{a^2-b^2+c^2-d^2}\ \cdots 絶4①$$

が成り立つ。

同様に、$\|Z\|=\sqrt{a^2-b^2+c^2-d^2}$ が

$$\|Z\|=\sqrt[4]{(a-d)^2+(b+c)^2}$$
$$\times\sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}$$

の特殊例として扱える。

$a^2+b^2+c^2-d^2$ が絶対値の用件を満たすかどうか考察する。

$$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$$
$$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2ij$$

として$\|Z_1Z_2\|$を考察する。

$$\|Z_1Z_2\|^2=\left(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2\right)^2$$
$$+\left(a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2\right)^2$$
$$+\left(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2\right)^2$$
$$-\left(a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2\right)^2$$
$$=\left(a_1a_2\right)^2+\left(b_1b_2\right)^2+\left(c_1c_2\right)^2+\left(d_1d_2\right)^2$$
$$-2a_1b_1a_2b_2-2a_1c_1a_2c_2+2a_1d_1a_2d_2$$
$$+2b_1c_1b_2c_2-2b_1d_1b_2d_2-2c_1d_1c_2d_2$$
$$+\left(a_1b_2\right)^2+\left(b_1a_2\right)^2+\left(c_1d_2\right)^2+\left(d_1c_2\right)^2$$
$$+2a_1b_1a_2b_2-2a_1c_1b_2d_2-2a_1d_1b_2c_2$$
$$-2b_1c_1a_2d_2-2b_1d_1a_2c_2+2c_1d_1c_2d_2$$
$$+\left(a_1c_2\right)^2+\left(b_1d_2\right)^2+\left(c_1a_2\right)^2+\left(d_1b_2\right)^2$$
$$-2a_1b_1c_2d_2+2a_1c_1a_2c_2-2a_1d_1b_2c_2$$
$$-2b_1c_1a_2d_2+2b_1d_1b_2d_2-2c_1d_1a_2b_2$$
$$-\left(a_1d_2\right)^2-\left(b_1c_2\right)^2-\left(c_1b_2\right)^2-\left(d_1a_2\right)^2$$
$$-2a_1b_1c_2d_2-2a_1c_1b_2d_2-2a_1d_1a_2d_2$$
$$-2b_1c_1b_2c_2-2b_1d_1a_2c_2-2c_1d_1a_2b_2$$
$$=\left(a_1a_2\right)^2+\left(b_1b_2\right)^2+\left(c_1c_2\right)^2+\left(d_1d_2\right)^2$$
$$+\left(a_1b_2\right)^2+\left(b_1a_2\right)^2-\left(c_1d_2\right)^2-\left(d_1c_2\right)^2$$
$$+\left(a_1c_2\right)^2-\left(b_1d_2\right)^2+\left(c_1a_2\right)^2-\left(d_1b_2\right)^2$$
$$-\left(a_1d_2\right)^2+\left(b_1c_2\right)^2+\left(c_1b_2\right)^2-\left(d_1a_2\right)^2$$
$$+2\left(c_1d_2\right)^2+2\left(d_1c_2\right)^2$$
$$+2\left(b_1d_2\right)^2+2\left(d_1b_2\right)^2$$
$$-2\left(b_1c_2\right)^2-2\left(c_1b_2\right)^2$$
$$-4a_1c_1b_2d_2-4a_1d_1b_2c_2$$
$$-4b_1c_1a_2d_2-4b_1d_1a_2c_2$$
$$-4a_1b_1c_2d_2-4c_1d_1a_2b_2$$
$$=\left(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2-d_1{}^2\right)$$
$$\times\left(a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2-d_2{}^2\right)$$
$$+2\left(c_1d_2\right)^2+2\left(d_1c_2\right)^2$$
$$+2\left(b_1d_2\right)^2+2\left(d_1b_2\right)^2$$
$$-2\left(b_1c_2\right)^2-2\left(c_1b_2\right)^2$$

$$-4a_1c_1b_2d_2-4a_1d_1b_2c_2$$
$$-4b_1c_1a_2d_2-4b_1d_1a_2c_2$$
$$-4a_1b_1c_2d_2-4c_1d_1a_2b_2$$

特に、
$-4a_1c_1b_2d_2-4a_1d_1b_2c_2$
$-4b_1c_1a_2d_2-4b_1d_1a_2c_2$
$-4a_1b_1c_2d_2-4c_1d_1a_2b_2$
の式に a_1, a_2 が含まれるので、乗法の式に変形できない。したがって、
$\|Z_1Z_2\|=\|Z_1\|\|Z_2\|$ を満たすことはないようである。
また、

$$\|Z\|=\sqrt[4]{(a-d)^2+(b+c)^2}\times\sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}$$

と比較すると、

$$\begin{aligned}
&\left((a-d)^2+(b+c)^2\right)\left((a+d)^2+(b-c)^2\right)-\left(a^2+b^2+c^2-d^2\right)^2\\
&=\left(a^2+b^2+c^2-d^2+2\left(bc-ad+d^2\right)\right)\\
&\quad\times\left(a^2+b^2+c^2-d^2+2\left(ad-bc+d^2\right)\right)-\left(a^2+b^2+c^2-d^2\right)^2\\
&=4\left(a^2+b^2+c^2-d^2\right)d^2+4\left(bc-ad+d^2\right)\left(ad-bc+d^2\right)\\
&=4\left(a^2+b^2+c^2-d^2\right)d^2+4\left(d^4-(ad-bc)^2\right)\\
&=4\left(a^2+b^2+c^2\right)d^2-4(bc-ad)^2\\
&=4\left(a^2d^2+b^2d^2+c^2d^2\right)-4\left(b^2c^2+a^2d^2-2abcd\right)\\
&=4\left(b^2d^2-b^2c^2+c^2d^2+2abcd\right)\\
&=4\left(d^2\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ad-bc)^2\right)
\end{aligned}$$

したがって、$\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}$ は絶対値の条件を満たさない。

（証明完）

$$\|Z\|=\sqrt[4]{(a-d)^2+(b+c)^2}\times\sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}$$

の性質を考察する。
１変数が違う場合。

・ $Z_1=a_1+bi+cj+dij$
$Z_2=a_2+bi+cj+dij$ の場合、
$\|Z_2-Z_1\|=|a_2-a_1|$

・ $Z_1=a+b_1i+cj+dij$
$Z_2=a+b_2i+cj+dij$ の場合、
$\|Z_2-Z_1\|=|b_2-b_1|$

・ $Z_1=a+bi+c_1j+dij$
$Z_2=a+bi+c_2j+dij$ の場合
$\|Z_2-Z_1\|=|c_2-c_1|$

・ $Z_1=a+bi+cj+d_1ij$
$Z_2=a+bi+cj+d_2ij$ の場合、
$\|Z_2-Z_1\|=|d_2-d_1|$

いずれも、各座標の線分の差になる。
２変数が違う場合。

・ $Z_1=a_1+b_1i+cj+dij$
$Z_2=a_2+b_2i+cj+dij$ の場合、

$$\|Z_2-Z_1\|^4=\left((a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2\right)\times\left((a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2\right)$$
$$\|Z_2-Z_1\|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$$

・ $Z_1=a_1+bi+c_1j+dij$
$Z_2=a_2+bi+c_2j+dij$ の場合、

$$\|Z_2-Z_1\|^4=\left((a_2-a_1)^2+(c_2-c_1)^2\right)\times\left((a_2-a_1)^2+(c_1-c_2)^2\right)$$
$$\|Z_2-Z_1\|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

・ $Z_1=a_1+bi+cj+d_1ij$
$Z_2=a_2+bi+cj+d_2ij$ の場合、

$$\begin{aligned}
\|Z_2-Z_1\|^4&=(a_2-a_1-d_2+d_1)^2\times(a_2-a_1+d_2-d_1)^2\\
&=\left((a_2-a_1)^2-(d_2-d_1)^2\right)^2
\end{aligned}$$
$$\|Z_2-Z_1\|=\sqrt{(a_2-a_1)^2-(d_2-d_1)^2}$$

・ $Z_1=a+b_1i+c_1j+dij$
$Z_2=a+b_2i+c_2j+dij$ の場合、

$$\|Z_2-Z_1\|^4=(b_2-b_1+c_2-c_1)^2$$
$$\times(b_2-b_1-c_2+c_1)^2$$
$$\|Z_2-Z_1\|=\sqrt{(b_2-b_1)^2-(c_2-c_1)^2}$$

・ $Z_1=a+b_1i+cj+d_1ij$
$Z_2=a+b_2i+cj+d_2ij$ の場合、
$$\|Z_2-Z_1\|^4=\left((d_1-d_2)^2+(b_2-b_1)^2\right)$$
$$\times\left((d_2-d_1)^2+(b_2-b_1)^2\right)$$
$$\|Z_2-Z_1\|=\sqrt{(b_2-b_1)^2+(d_2-d_1)^2}$$

・ $Z_1=a+bi+c_1j+d_1ij$
$Z_2=a+bi+c_2j+d_2ij$ の場合、
$$\|Z_2-Z_1\|^4=\left((d_1-d_2)^2+(c_2-c_1)^2\right)$$
$$\times\left((d_2-d_1)^2+(c_1-c_2)^2\right)$$
$$\|Z_2-Z_1\|=\sqrt{(c_2-c_1)^2+(d_2-d_1)^2}$$

２変数が違う場合について
a,d のみ違う場合、b,c のみ違う場合は、２変数の差の双曲的絶対値になる。以外は２変数の差の絶対値になる。

３変数が違う場合、たとえば
$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+dij$
$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+dij$
とおくと、
$$\|Z_2-Z_1\|^4$$
$$=\left((a_2-a_1)^2+(b_2-b_1+c_2-c_1)^2\right)$$
$$\times\left((a_2-a_1)^2+(b_2-b_1-c_2+c_1)^2\right)$$
$$=(a_2-a_1)^4$$
$$+(a_2-a_1)^2\left((b_2-b_1+c_2-c_1)^2\right.$$
$$\left.+(b_2-b_1-c_2+c_1)^2\right)$$
$$+(b_2-b_1+c_2-c_1)^2(b_2-b_1-c_2+c_1)^2$$
$$=(a_2-a_1)^4$$
$$+(a_2-a_1)^2\left(2(b_2-b_1)^2+2(c_2-c_1)^2\right)$$
$$+\left((b_2-b_1)^2-(c_2-c_1)^2\right)^2$$
$$=(a_2-a_1)^4$$
$$+(a_2-a_1)^2\left(2(b_2-b_1)^2+2(c_2-c_1)^2\right)$$
$$+\left((b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2\right)^2$$
$$-4(b_2-b_1)^2(c_2-c_1)^2$$
$$=\left((a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2\right)^2$$
$$-4(b_2-b_1)^2(c_2-c_1)^2$$

したがって、３変数が違った場合、合理化する式はないようである。

定理（逆数）

$Z=a+bi+cj+dij$ とおくと、

$$\frac{1}{Z}=\frac{\left(|Z|^2-2(ad-bc)ij\right)(a-bi-cj+dij)}{\|Z\|^4}$$

$$=\frac{1}{\|Z\|^4}(a+bi-cj-dij)$$

$$\times(a-bi+cj-dij)(a-bi-cj+dij)$$

$ad-bc=0$ ならば、

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{|Z|^2}(a-bi-cj+dij)$$

（証明）

$Z_1=a_1+b_1i+c_1j+d_1ij$

$Z_2=a_2+b_2i+c_2j+d_2ij$

とする。

$Z_1\times Z_2=1$ならば、

$$\begin{cases} a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2+d_1d_2=1 \\ a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2-d_1c_2=0 \\ a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2-d_1b_2=0 \\ a_1d_2+b_1c_2+c_1b_2+d_1a_2=0 \end{cases}$$

を a_1,b_1,c_1,d_1 の連立方程式と考える。

$$a_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ 0 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

$$分母=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=\|Z_2\|^4$$

$$分子=\begin{vmatrix} 1 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ 0 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & -c_2 \\ -d_2 & a_2 & -b_2 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=a_2{}^3+b_2c_2d_2+b_2c_2d_2$$

$$+a_2c_2{}^2+a_2b_2{}^2-a_2d_2{}^2$$

$$b_1=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & 1 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & 0 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & 0 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

$$分子=\begin{vmatrix} a_2 & 1 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & 0 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & 0 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

第１列と第２列を入れかえる

$$=-\begin{vmatrix} 1 & a_2 & -c_2 & d_2 \\ 0 & b_2 & -d_2 & -c_2 \\ 0 & c_2 & a_2 & -b_2 \\ 0 & d_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} b_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-a_2{}^2b_2-b_2d_2{}^2+b_2c_2{}^2$$

$$-a_2c_2d_2-a_2c_2d_2-b_2{}^3$$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & 1 & d_2 \\ b_2 & a_2 & 0 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & 0 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & 0 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

$$分子=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & 1 & d_2 \\ b_2 & a_2 & 0 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & 0 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

第 1 列と第 3 列を入れかえる

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -b_2 & a_2 & d_2 \\ 0 & a_2 & b_2 & -c_2 \\ 0 & -d_2 & c_2 & -b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & -c_2 \\ -d_2 & c_2 & -b_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-a_2{}^2c_2+b_2{}^2c_2-c_2d_2{}^2$$
$$-c_2{}^3-a_2b_2d_2-a_2b_2d_2$$

$$d_1=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & 1 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & 0 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & 0 \\ d_2 & c_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & -c_2 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

$$分子=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & 1 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & 0 \\ c_2 & -d_2 & a_2 & 0 \\ d_2 & c_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix}$$

第 1 列と第 4 列を入れかえる

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -b_2 & -c_2 & a_2 \\ 0 & a_2 & -d_2 & b_2 \\ 0 & -d_2 & a_2 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & b_2 \\ -d_2 & a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$=-a_2{}^2d_2+b_2{}^2d_2+c_2{}^2d_2$$
$$+a_2b_2c_2+a_2b_2c_2+d_2{}^3$$

$$Z=a+bi+cj+dij$$

の場合、

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{\|Z\|^4}$$
$$\times\Big\{\left(a^3+2bcd+ac^2+ab^2-ad^2\right)$$
$$-\left(a^2b+bd^2-bc^2+2acd+b^3\right)i$$
$$-\left(a^2c-b^2c+cd^2+c^3+2abd\right)j$$
$$+\left(-a^2d+b^2d+c^2d+2abc+d^3\right)ij\Big\}$$

$$=\frac{1}{\|Z\|^4}\Big\{\left(a\left(a^2+b^2+c^2-d^2\right)+2bcd\right)$$
$$-\left(b\left(a^2+b^2-c^2+d^2\right)+2acd\right)i$$
$$-\left(c\left(a^2-b^2+c^2+d^2\right)+2abd\right)j$$
$$+\left(d\left(-a^2+b^2+c^2+d^2\right)+2abc\right)ij\Big\}$$

$$=\frac{1}{\|Z\|^4}\Big\{\left(a|Z|^2-2ad^2+2bcd\right)$$
$$-\left(b|Z|^2-2bc^2+2acd\right)i$$
$$-\left(c|Z|^2-2b^2c+2abd\right)j$$
$$+\left(d|Z|^2-2a^2d+2abc\right)ij\Big\}$$

$$=\frac{1}{\|Z\|^4}\Big\{\left(a|Z|^2-2d\left(ad-bc\right)\right)$$
$$-\left(b|Z|^2+2c\left(ad-bc\right)\right)i$$
$$-\left(c|Z|^2+2b\left(ad-bc\right)\right)j$$
$$+\left(d|Z|^2-2a\left(ad-bc\right)\right)ij\Big\}$$

$$=\frac{|Z|^2}{\|Z\|^4}\left(a-bi-cj+dij\right)$$
$$-\frac{2\left(ad-bc\right)}{\|Z\|^4}\left(d+ci+bj+aij\right)$$

$$\frac{2\left(ad-bc\right)}{\|Z\|^4}\left(d+ci+bj+aij\right)$$
$$=\frac{2\left(ad-bc\right)\left(ij\right)^2}{\|Z\|^4\left(ij\right)^2}\left(d+ci+bj+aij\right)$$
$$=\frac{2\left(ad-bc\right)ij}{\|Z\|^4}\left(a-bi-cj+dij\right)$$

したがって、

$$\frac{1}{Z}=\frac{\left(|Z|^2-2(ad-bc)ij\right)(a-bi-cj+dij)}{\|Z\|^4}$$

$$\begin{aligned}
&|Z|^2-2(ad-bc)ij\\
&\quad=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ad-bc)ij\\
&\quad=a^2+(dij)^2-2adij\\
&\qquad\qquad\quad-(bi)^2-(cj)^2+2bcij\\
&\quad=(a-dij)^2-(bi-cj)^2\\
&\quad=(a+bi-cj-dij)(a-bi+cj-dij)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z}&=\frac{1}{\|Z\|^4}(a+bi-cj-dij)\\
&\qquad\times(a-bi+cj-dij)(a-bi-cj+dij)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

さらに、$ad-bc=0$ ならば、$\|Z\|=|Z|$ なので、

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{|Z|^2}(a-bi-cj+dij)$$

となる。

（証明完）

系（逆数より）

$Z=a+bi+cj+dij$ として、

$$\begin{aligned}
\|Z\|^4&=(a+bi+cj+dij)(a+bi-cj-dij)\\
&\quad\times(a-bi+cj-dij)(a-bi-cj+dij)
\end{aligned}$$

$\cdot\cdot$絶１③

が成り立つ。

（証明）

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z}&=\frac{1}{\|Z\|^4}(a+bi-cj-dij)\\
&\qquad\times(a-bi+cj-dij)(a-bi-cj+dij)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\|Z\|^4&=(a+bi+cj+dij)(a+bi-cj-dij)\\
&\qquad\times(a-bi+cj-dij)(a-bi-cj+dij)
\end{aligned}$$

（証明完）

複素空間上の三平方の定理

定理（複素空間上の三平方の定理）
複素空間において、絶対値を$\|Z\|$で定義した場合、三平方の定理は成り立たない。
複素空間の中で、楕円型空間の性質をもった場所、双曲型空間の性質をもった場所が存在する。

（証明）
ΔOABにおいて、$\angle OAB$が９０°とする。
たとえば、３点O,A,Bの座標を
$O=(0,0,0,0)$, $A=(1,1,-1,1)$,
$B=(2,2,2,-2)$
とする。ユークリッド空間であれば、各線分の長さは、

$$|OA|^2=4, |OB|^2=16$$

$$|AB|^2=(2-1)^2+(2-1)^2+(2+1)^2+(-2-1)^2$$
$$=20$$

となり、ΔOABにおいて三平方の定理が成り立つ。
しかし、複素空間上で考えると、

$$\|OA\|^2=0, \|OB\|^2=0$$

$$AB=(1,1,3,-3)$$

$$\|AB\|^2=\sqrt{\left((1+3)^2+(1+3)^2\right)}$$
$$\times\sqrt{\left((1-3)^2+(1-3)^2\right)}$$
$$=16$$

$$\|OA\|^2+\|OB\|^2<\|AB\|^2$$

より、三平方の定理が成り立たない。
この場合、双曲型空間の性質をもっている。

$A=(a_1,b_1,c_1,d_1)$, $B=(a_2,b_2,c_2,d_2)$
とする。
$a_1d_1=b_1c_1, a_2d_2=b_2c_2$を満たすならば、

$$\|OA\|^2=a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2$$

$$\|OB\|^2=a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2$$

となる

$$AB=(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1,d_2-d_1)$$

において、

$$(a_2-a_1)(d_2-d_1)-(b_2-b_1)(c_2-c_1)$$
$$=-a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2+b_2c_1$$

一般的に

$$(a_2-a_1)(d_2-d_1)\neq(b_2-b_1)(c_2-c_1)$$

$$\|AB\|^2\neq(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2$$
$$+(c_2-c_1)^2+(d_2-d_1)^2$$

絶対値の条件（絶５１）により、

$$|AB|^2\geq\|AB\|^2$$

したがって

$$|OA|^2+|OB|^2=|AB|^2$$

$$|OA|^2+|OB|^2=\|OA\|^2+\|OB\|^2$$

$$\|OA\|^2+\|OB\|^2\geq\|AB\|^2$$

が成り立つ。この場合、楕円型空間の性質をもっている。

（証明完）

４次元ユークリッド空間

４次元ユークリッド空間を**E**、空間上の点を $E=(a,b,c,d)$ と表記する。

$E_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)$, $E_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ とする。

加法・減法については、

$E_1 \pm E_2=(a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2, c_1 \pm c_2, d_1 \pm d_2)$

と定義する。

積については、$|E_1||E_2|=|E_1E_2|$ が成り立つよう定義しなければならない。

Eが２次元であれば、乗法公式

$$\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)$$
$$=\left(a_1a_2-b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)^2$$

より $E_1E_2=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)$ と定義することができる。そして、この式は、複素数 $Z_1=a_1+b_1i$ と $Z_2=a_2+b_2i$ の積の定義と一致する。

さて、乗法公式の符号を変えて、

$$\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)$$
$$=\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2-b_1a_2\right)^2$$

とすると、$E_1E_2=(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2-b_1a_2)$ と定義することも可能である。

この定義は、複素数 $Z_1=a_1+b_1i$ と $Z_2=a_2-b_2i$ の積と一致する。ただ、$-b_2=b_2'$ とおけば、従来の複素数の積と一致する。

ところで、$a_1a_2+b_1b_2$ はベクトルの内積 $a_1b_2-b_1a_2$ は外積のスカラー量である。したがって、

$E_1E_2=(\text{内積}, |\text{外積}|)$

注：外積はベクトルなので、スカラー量として $|\text{外積}|$ と表記した。

と扱うことも可能と思う。

定理（$ad=bc$ の場合の乗法の定義）

４次元ユークリッド空間の絶対値を $|E|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ とする。

$E_1=(a_1,b_1,c_1,d_1), E_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ において、$a_1d_1=b_1c_1$, $a_2d_2=b_2c_2$ ならば、絶対値の条件 $|E_1||E_2|=|E_1E_2|$ を満たす積 E_1E_2 の演算方法が存在する。

そして、$E_1E_2=(a_{12},b_{12},c_{12},d_{12})$ とおくと、$a_{12}d_{12}=b_{12}c_{12}$ を満たす。

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ として、積は

$$E_1E_2=\left(\frac{1}{a_1a_2}(a_1a_2-b_1b_2)(a_1a_2-c_1c_2)\right.$$
$$,\frac{1}{a_1a_2}(a_1b_2+b_1a_2)(a_1a_2-c_1c_2)$$
$$,\frac{1}{a_1a_2}(a_1a_2-b_1b_2)(a_1c_2+c_1a_2)$$
$$\left.,\frac{1}{a_1a_2}(a_1b_2+b_1a_2)(a_1c_2+c_1a_2)\right)$$

と定義できる。

（証明）

$a=0$ の場合、$ad=bc$ より $b=0$ 又は $c=0$ とならなければならない。

つまり、２次元の平面を扱うことのになるので、$a \neq 0$ として十分である。

$E=(a,b,c,d)$ において、$ad=bc, a\neq 0$ とする。

$a=su, b=tu, c=sv, d=tv$

$s\neq 0, u\neq 0$

と満たす数の組 (s,t,u,v) が存在すると仮定する。明らかに、$ad=bc, a\neq 0$ を満たす。

$a+b+c+d=(s+t)(u+v)$

$ad=bc$ より、

$$a+b+c+d=a+b+c+\frac{bc}{a}$$
$$=\frac{1}{a}(a+b)(a+c)$$
$$=(a+b)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

したがって、

$$s=a, t=b, u=1, v=\frac{c}{a}$$

とすればいいので、数の組 (s,t,u,v) は存在する。

$E_1=(a_1,b_1,c_1,d_1),E_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ において、$a_1d_1=b_1c_1,a_1\neq 0$, $a_2d_2=b_2c_2,a_2\neq 0$ とする。それぞれに対する $(s_1,t_1,u_1,v_1),(s_2,t_2,u_2,v_2)$ が存在する。

$$\begin{aligned}|E_1|^2|E_2|^2 &= (a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\\&\quad\times(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)\\&=(s_1^2+t_1^2)(u_1^2+v_1^2)\\&\quad\times(s_2^2+t_2^2)(u_2^2+v_2^2)\\&=(a_1^2+b_1^2)(1+v_1^2)(a_2^2+b_2^2)(1+v_2^2)\end{aligned}$$

この式で、$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$ と $(1+v_1^2)(1+v_2^2)$ の組合せで、2 次元での場合のように、乗法公式で展開が可能である。また、符号を＋で統一すると、

$$\begin{aligned}|E_1|^2|E_2|^2 &= \left((a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2)^2\right)\\&\quad\times\left((1-v_1v_2)^2+(v_1+v_2)^2\right)\\&=\left((a_1a_2-b_1b_2)(1-v_1v_2)\right)^2\\&\quad+\left((a_1b_2+b_1a_2)(1-v_1v_2)\right)^2\\&\quad+\left((a_1a_2-b_1b_2)(v_1+v_2)\right)^2\\&\quad+\left((a_1b_2+b_1a_2)(v_1+v_2)\right)^2\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}E_1E_2 &= \big((a_1a_2-b_1b_2)(1-v_1v_2)\\&\quad,(a_1b_2+b_1a_2)(1-v_1v_2)\\&\quad,(a_1a_2-b_1b_2)(v_1+v_2)\\&\quad,(a_1b_2+b_1a_2)(v_1+v_2)\big)\\&=\left((a_1a_2-b_1b_2)\left(1-\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)\right.\\&\quad,(a_1b_2+b_1a_2)\left(1-\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)\\&\quad,(a_1a_2-b_1b_2)\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}\right)\\&\quad\left.,(a_1b_2+b_1a_2)\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}\right)\right)\\&=\left(\frac{1}{a_1a_2}(a_1a_2-b_1b_2)(a_1a_2-c_1c_2)\right.\\&\quad,\frac{1}{a_1a_2}(a_1b_2+b_1a_2)(a_1a_2-c_1c_2)\\&\quad,\frac{1}{a_1a_2}(a_1a_2-b_1b_2)(a_1c_2+c_1a_2)\\&\quad\left.,\frac{1}{a_1a_2}(a_1b_2+b_1a_2)(a_1c_2+c_1a_2)\right)\end{aligned}$$

とすれば、E_1E_2 の計算方法が定義できて、$|E_1||E_2|=|E_1E_2|$ を満たす。

さらに、$E_1E_2=(a_{12},b_{12},c_{12},d_{12})$ とおくと、$a_{12}d_{12}=b_{12}c_{12}$ を満たすことは明らかである。

（証明完）

定理（ユークリッド空間と複素空間）

複素空間 $\mathbf{Z}(a,b,c,d)$、及びユークリッド空間 $\mathbf{E}(a,b,c,d)$ において、共に $ad=bc$ を満たすとする。ユークリッド空間上の点 E_1,E_2 において、$|E_1||E_2|=|E_1E_2|$ となるような、そして複素空間上での積の演算方法が一致するような積 E_1E_2 が存在する。

$E_1=(a_1,b_1,c_1,d_1),E_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ において、$a_1d_1=b_1c_1,a_1\neq 0$, $a_2d_2=b_2c_2,a_2\neq 0$ ならば、積 E_1E_2 は

$$\begin{aligned}E_1E_2 &= \left(\frac{1}{a_1a_2}(a_1a_2-b_1b_2)(a_1a_2-c_1c_2)\right.\\&\quad,\frac{1}{a_1a_2}(a_1b_2+b_1a_2)(a_1a_2-c_1c_2)\\&\quad,\frac{1}{a_1a_2}(a_1a_2-b_1b_2)(a_1c_2+c_1a_2)\\&\quad\left.,\frac{1}{a_1a_2}(a_1b_2+b_1a_2)(a_1c_2+c_1a_2)\right)\end{aligned}$$

と定義できる。

（証明は略）

定理
（ユークリッド空間と複素空間 No2）
４次元ユークリッド空間$\mathsf{E}(4)$の点
$E(a,b,c,d)$において、絶対値を

$$\|E\| = \sqrt[4]{(a-d)^2+(b+c)^2} \times \sqrt[4]{(a+d)^2+(b-c)^2}$$

と定義する。
２点 $E_1(a_1,b_1,c_1,d_1), E_2(a_2,b_2,c_2,d_2)$ の積が $E(a,b,c,d)$ になるとして、

$$\begin{cases} a = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2 \\ b = a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 - d_1c_2 \\ c = a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2 \\ d = a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + d_1a_2 \end{cases}$$

と定義する。このとき$\|E_1\|\|E_2\| = \|E_1E_2\|$が成り立つ。そして、この積の定義は、複素空間上の積の定義と一致する。
（証明は略）