２０１７年３月５日

数学研究の紹介

鈴木啓一

自己紹介

現住所　　　　　　　山形県高畠町
年齢　　　　　　　　５９歳
職業　　　　　　　　一般
基本的スタンス　問題を解くー×
（リーマン予想・Ｐ,ＮＰ問題等）
数学を造るー〇

ホームページ　　「こだわりハウス」
http://www.geocities.co.jp/Technopolis/2061/
「Yahooカテゴリ→自然科学→数学」
から参照可能
注：この資料の詳細は、ホームページ
に記載

代数方程式の演算(高校生の問題1)

代数方程式の乗法・因数分解

問題例

$\left(2x^2+x+3\right)\left(2x^2-x+3\right)$を展開しなさい。

解答

$t=2x^2+3$とおくと、

$$
\begin{aligned}
\left(2x^2+x+3\right)\left(2x^2-x+3\right) &= (t+x)(t-x)\\
&= t^2-x^2\\
&= 4x^4+12x^2+9-x^2\\
&= 4x^4+11x^2+9
\end{aligned}
$$

高校生の問題2

問題例

x^5-x+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ

解答

余りを $ax+b$ とおく。

因数定理より、$x=\omega, x=\omega^2$ のとき、$x^5-x+1=0$

$x^3=1$ という性質を使い、次数を下げて $x^2-x+1=0$ となる。

$x=\omega,\omega^2$ とおいて

$$\begin{cases} a\omega+b=\omega^2-\omega+1 \\ a\omega^2+b=\omega^4-\omega^2+1 \end{cases}$$

の a,b の連立方程式を解く。

別解（大学2年、1977年）

$$\left(2x^2+x+3\right)\left(2x^2-x+3\right)$$

		2	1	3
	×	2	−1	3
		6	3	9
	−2	−1	−3	
4	2	6		
4	0	11	0	9

$$\left(x^5-x+1\right)/\left(x^2+x+1\right)$$

						1	−1	0	1
1	1	1	)	1	0	0	0	−1	1
				1	1	1			
					−1	−1	0		
					−1	−1	−1		
							1	−1	1
							1	1	1
								−2	0

当時の研究テーマ
5次以上の方程式は代数的に解けない
⇒　代数的な手法でなければ解けるかも？

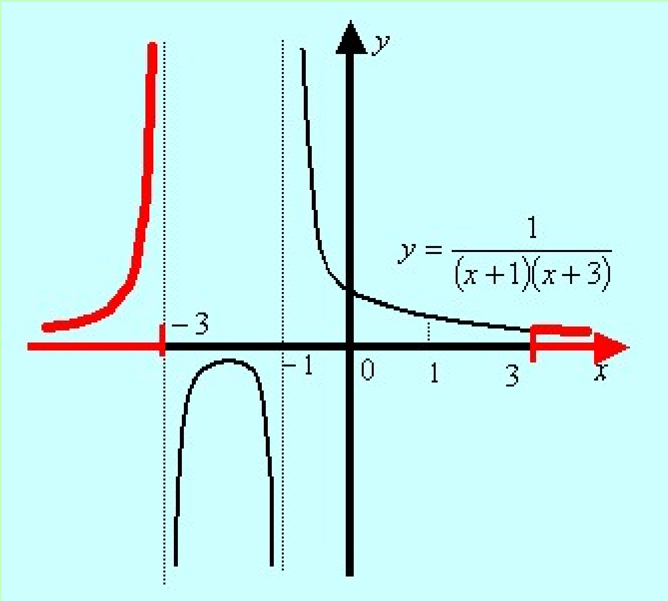
2012年4月（35年後）
循環小数のように計算したらどうなる？
もしかしたらテイラー級数？

計算1 $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$

```
              0. 0  1  -4  13 -40  ・  ・
1  4  3 ) 1. 0  0
          1  4  3
             -4  -3   0
             -4 -16 -12
                 13  12   0
                 13  52  39
                    -40 -39    0
                    -40 -160 -120
                          121  120
```

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{13}{x^4}-\frac{40}{x^5}+\cdots、|x|>3$$

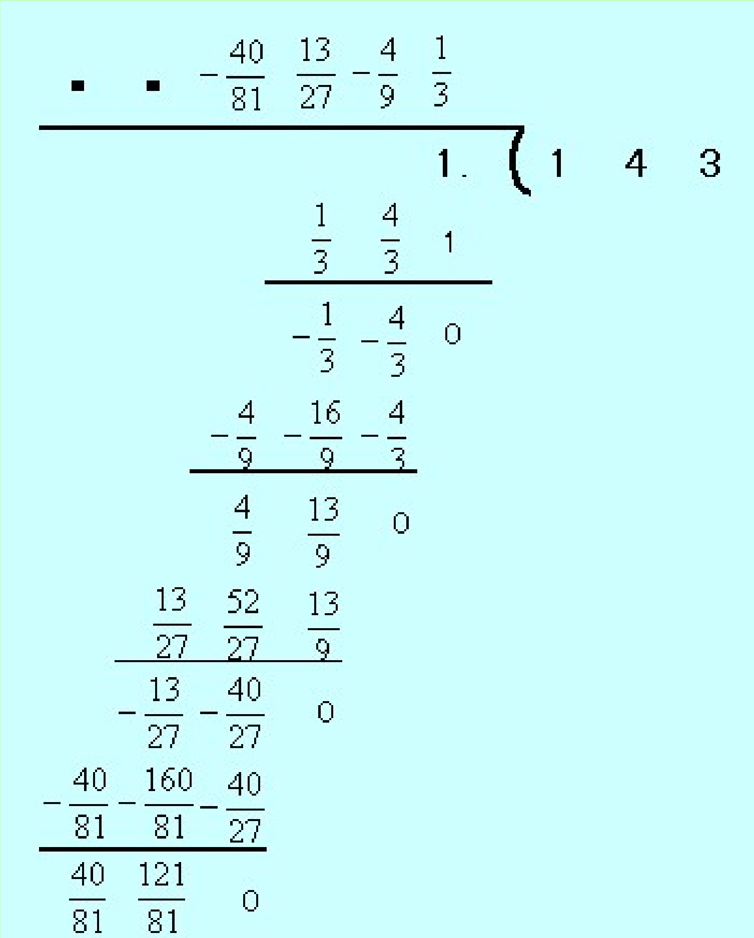
主要部のみのローラン級数と一致した。



ローラン級数（ローランの定理）

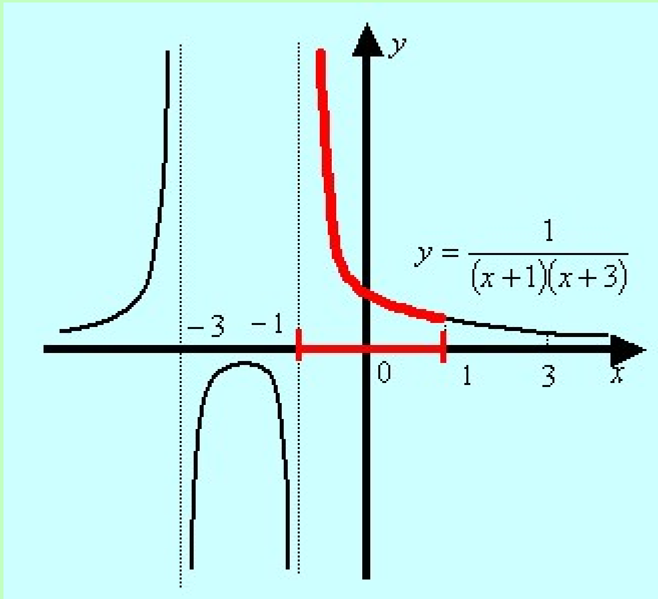
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-a)^{n+1}}d\varsigma、\ f(z)=\underbrace{\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-a)}}_{\text{主要部}}\underbrace{+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots}_{\text{正則部}}$$

計算2 $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$



$$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x+\frac{13}{27}x^2-\frac{40}{81}x^3+\cdots、|x|<1$$

というテーラー級数と一致した。



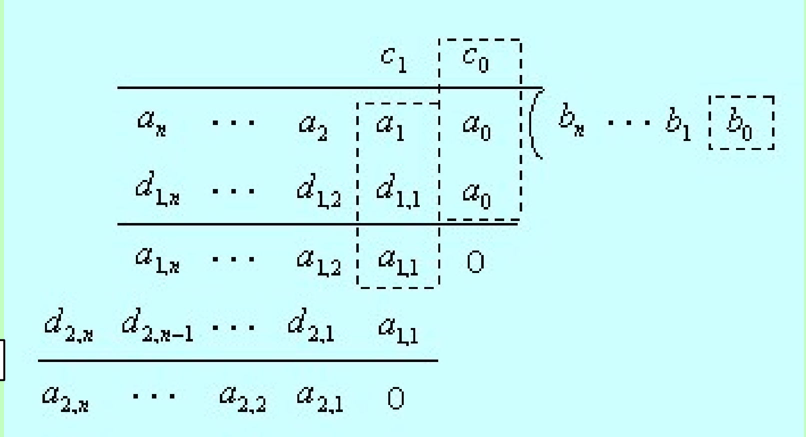
赤い曲線部分を級数で表示した。

割算が、テイラー級数と一致することの証明の概要

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

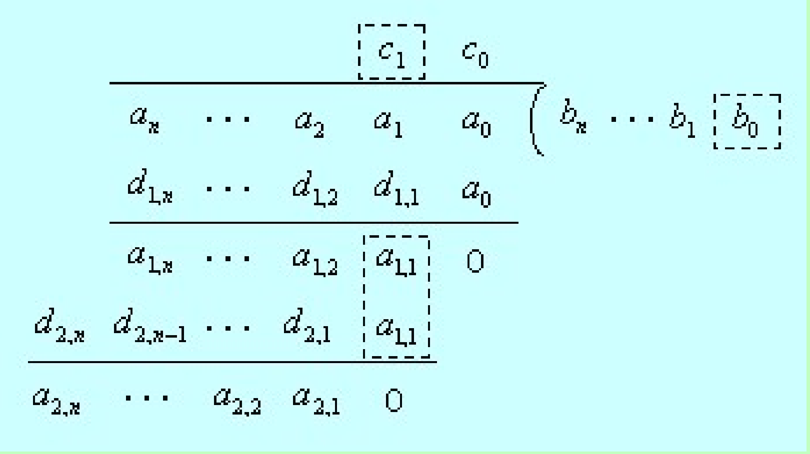
とおく。

代数方程式を、左に向かって割算すると、



$$\boxed{c_0 = \frac{a_0}{b_0}}, d_{1,1} = c_0 b_1, a_{1,1} = a_1 - d_{1,1}$$

$$c_1 = \frac{a_{1,1}}{b_0} = \frac{a_1 - c_0 b_1}{b_0} = \boxed{\frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0{}^2}}$$



ところで、

$$f(0) = \frac{A(0)}{B(0)} = \frac{a_0}{b_0} = c_0$$

$$\boxed{\frac{f'(0)}{1!} = \frac{A'(0)B(0) - A(0)B'(0)}{B(0)^2} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0{}^2} = c_1}$$

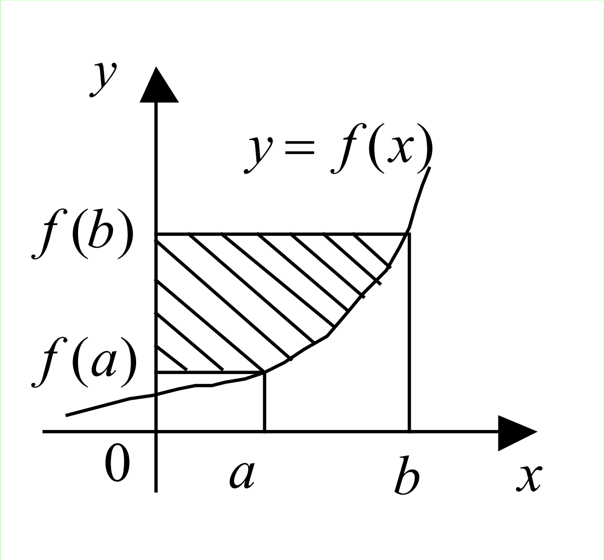
テイラー展開の第 1・2 項の係数が一致する。

数学的帰納法で、$k < n$ として、$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = c_k$ が成り立つことが証明できる。

積分の式

１９７５年秋（高校３年）

$\int_a^b xf'(x)dx$ は右図の斜線部の面積を示す



その他

$$2\pi\int_a^b xf(x)dx \text{、} 2\pi\int_a^b x^2 f'(x)dx \text{、}$$

$$2\pi\int_a^b xf'(x)f(x)dx \text{、}$$

$$2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

証明

① $\int xdy = \int x\frac{dy}{dx}dx = \int_a^b xf'(x)dx$

② $\int_a^b xf'(x)dx = \left[xf(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)dx$

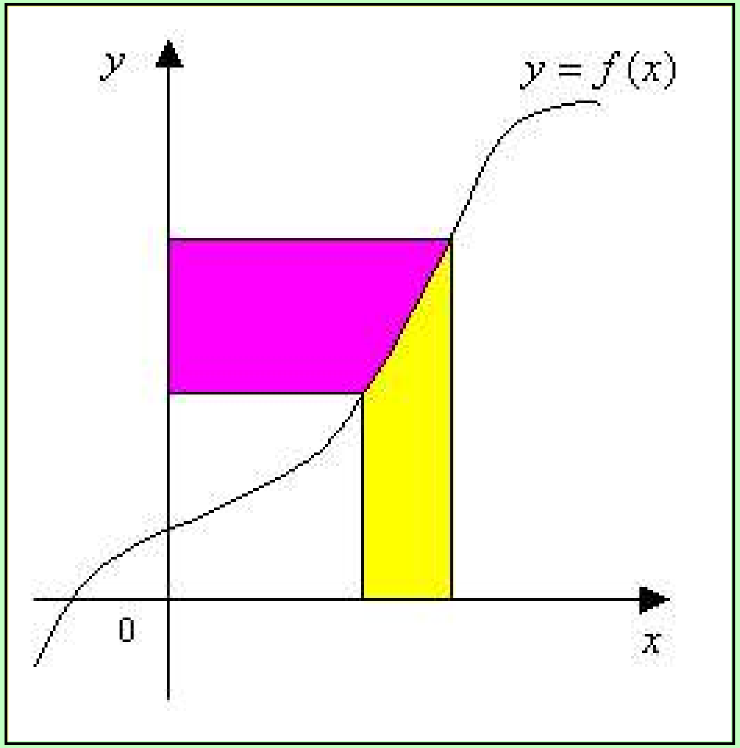
積分の関係式

1998年5月(39才)

関数の積分と逆関数の積分との関係

$$\int y dx + \int x dy = xy + c$$

(Cは積分定数)



証明

$$\frac{d}{dx}(xy) = y + x\frac{dy}{dx}$$

$$\begin{aligned} xy + c &= \int y dx + \int x \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int y dx + \int x dy \end{aligned}$$

式の作成方法:ひらめき

完成後の思い:数学は造れる余地はまだある。

疑問1

$$xy + c = \int y\,dx + \int x\,dy$$

変数を複素数に拡張する。

$$zw = \int_C w\,dz + \int_{C_w} z\,dw$$

疑問点

留数≠0$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \neq 0\right)$となる点が存在する場合、曲線$C_w$はどのような形？

疑問2

$$xy + c = \int y dx + \int x dy$$

の証明を拡張する。

「n回微分して、その後n回積分して元に戻したならどうなる？」

疑問点

n回微分から思いつくこと

→　テイラー級数　＝　正則部のみのローラン級数

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

n回積分する　→　？？？？？　＝　主要部のみのローラン級数

$$f(z) = a_0{}' + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots$$

疑問1からの発展、テイラー級数の性質1

変数を複素数に拡張する。$zw = \int_C wdz + \int_{C_w} zdw$ からの発展

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

次数が２飛びになっている。⇒一般的に n 飛びになる条件は？

$$z = \alpha + re^{i\theta}\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

極形式に変換し、

$$f(z) = g(r, \theta)$$

と表現する。n を自然数として $g(r,\theta)$ が恒等的に

$$\boxed{g(r,\theta) = g(r, \theta + \frac{2\pi}{n})}$$

テイラー級数の性質２

$\cos x = \cos(x + 2n\pi)$より、

$$\cos(x+2n\pi) = 1 - \frac{(x+2n\pi)^2}{2} + \frac{(x+2n\pi)^4}{4!} - \frac{(x+2n\pi)^6}{6!} + \cdots$$

周期性のある点$\alpha(\cdot\cdot, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \cdot\cdot)$が無限個あるようだが、一般的にはいくつ？

$w = f(z)$ ： 複素平面上の整関数。

任意の点 α で、 $z = \alpha + re^{i\theta}$ 、 $f(z) = g_\alpha(r, \theta)$

$g_\alpha(r, \theta)$ が恒等的に $g_\alpha(r, \theta) = g_\alpha(r, \theta + 2\pi/n)$ となるような α の個数は、複素平面上で

① 存在しない

② １個だけ存在する

③ 一直線上に等間隔に無限個（可符番個）存在し、各点では、$g_\alpha(r, \theta) = g_\alpha(r, \theta + \pi)$

のいずれかである。

疑問2からの発展:ローラン級数の主要部

$xy + c = \int y dx + \int x dy$ の証明の拡張「n回微分・n回積分」からの発展

主要部のみのローラン級数について

マイナス微分の定義を

$$F^{(-1)}(A) = -\lim_{X_1 \to \infty} (X_1 - A)^2 F(X_1)', F^{(-i)}(A) = -\lim_{X_1 \to \infty} (X_1 - A)^2 F^{(1-i)'}(X_1)$$

とし、マイナス微分用平均値の定理が作成できて、

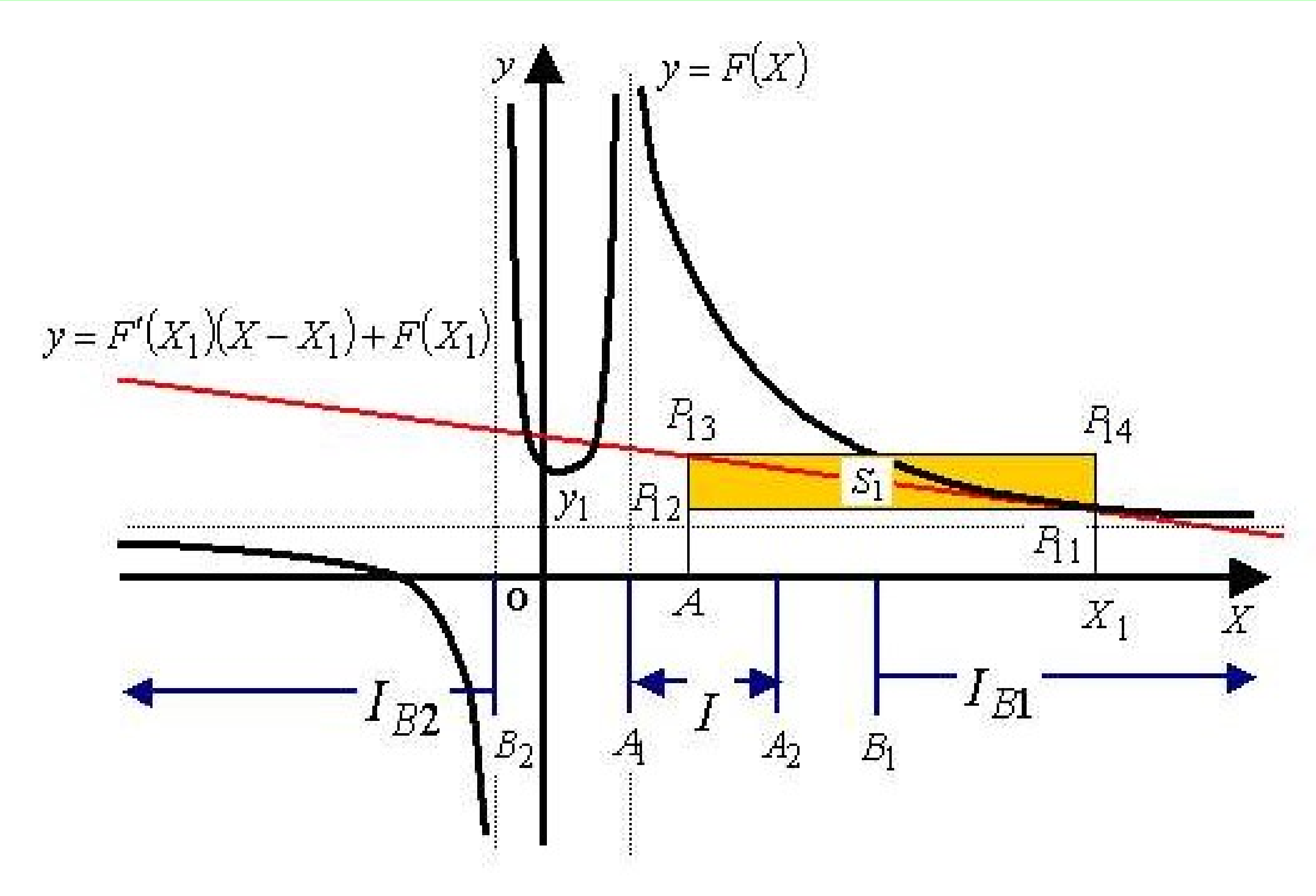
$$F(X) = y_1 + \frac{F^{(-1)}(A)}{X - A} + \frac{F^{(-2)}(A)}{2!(X - A)^2} + \cdots + \frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(X - A)^{n-1}} + \frac{F^{(-n)}(\Phi : A)}{n!(X - A)^n}$$

が導ける。

「微分の反対は積分」、「マイナス微分も、微分の反対？」

マイナス微分の視覚的な解釈

$$F^{(-1)}(A) = -\lim_{X_1 \to \infty} (X_1 - A)^2 F(X_1)'$$



微積分の関係

微分

反対

積分

級数という
観点で反対

マイナス微分

マイナス積分？
使い道は？

テイラー級数の拡張(余談1)

テイラー級数は、微分列 $f(a), f'(a), f''(a), \cdots, f^{(n)}(a), \cdots$

$\Rightarrow$ 積分列の級数にしたら？

関数 $f(x)$ を区間 (x_1, x_2) で定義された関数とし、積分可能とする。

$f^{[0]}(x) = f(x)$、定数：$x_0 (x_1 \le x_0 \le x_2)$

$f^{[1]}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{[0]}(t)dt$、$f^{[2]}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{[1]}(t)dt$、・・・

$$f^{[n]}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{[n-1]}(t)dt$$

$f^{[n]}(x)$ を第 n 次積分関数と呼ぶことにする。

定数：$a < x_1$ 又は $x_2 < a$。部分積分を続けると、

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[0]}(t)}{t-a} dt = \sum_{i=1}^{n} (i-1)! \frac{f^{[i]}(x)}{(x-a)^i} + n! \int_{x_0}^{x} \frac{f^{[n]}(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$ $\Rightarrow$ $n!$ が分母から分子へ

テイラー級数の拡張(余談2)

計算例

$x \geqq \frac{1}{2}, f(x)=1, a=0, x_0=1$の場合、$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{[0]}(t)}{t-a}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \log x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{nx^n}$

$x=\frac{1}{1-t}$と変換すると、周知の式、「　$|t|<1$の場合、$\log\frac{1}{1-t} = t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^n}{n}+\cdots$」
と一致した。

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots = \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^{2^n}}{2^n}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{x^3}{3}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{x^{3^n}}{3^n}+\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{x^5}{5}+\frac{x^{25}}{25}+\cdots+\frac{x^{5^n}}{5^n}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{x^7}{7}+\frac{x^{49}}{49}+\cdots+\frac{x^{7^n}}{7^n}+\cdots\right)+\cdots$$
$$=\prod_p \frac{p}{p-x^p}$$

$|x|<1$ならば$\log\frac{1}{1-x} = x-1+\prod_p \frac{p}{p-x^p}$ ⇒**「対数と素数との関係式」**

追記、$\int f(x)e^x dx, \int f(x)\sin x dx, \cdots$の場合は？

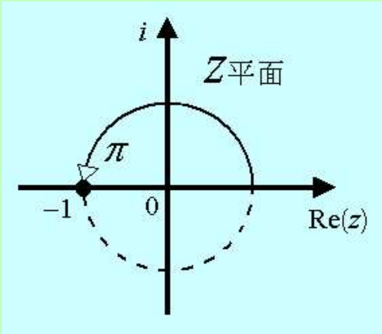
オイラーの公式

$$\cos x + i\sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots = e^{ix}$$

$\therefore e^{ix} = \cos x + i\sin x \Rightarrow x = \pi$ 、とおくと、$e^{i\pi} = -1$ という有名な式ができる。

定義順序を入れかえると、視覚的には、「複素平面で単位円を描き、偏角 π のおける座標は -1 である」と解釈できる。

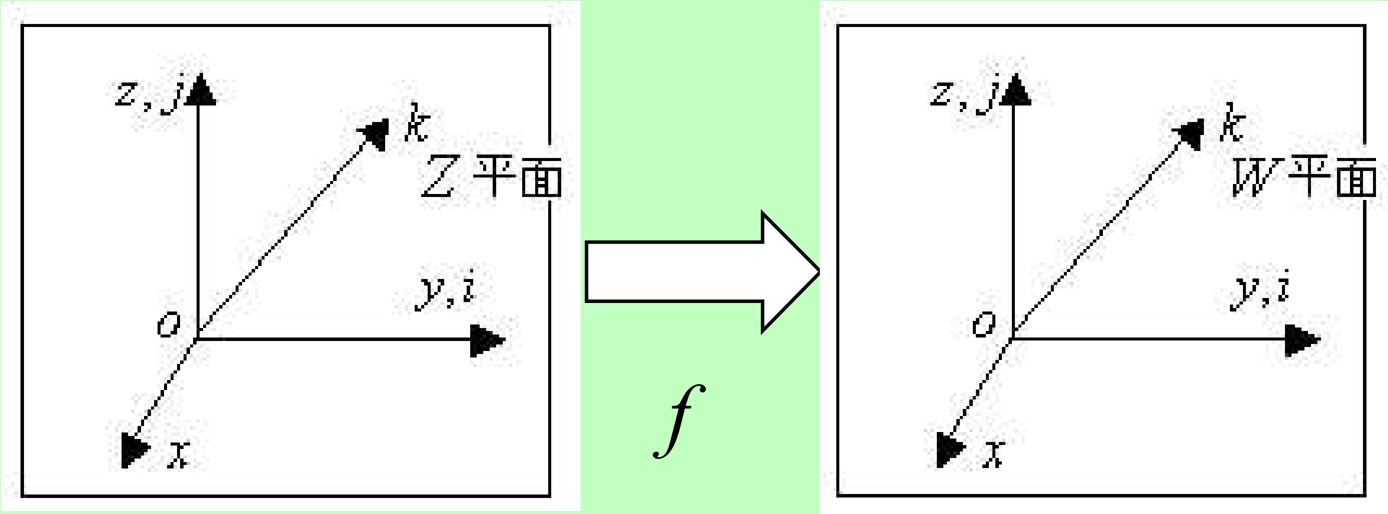


e とは、$e = 2.7182\cdots$ ではなくて関数記号であると解釈できる。

i を掛けることにより、1 → i → −1 → − i → 1と変化するので「複素数とは回転群」と解釈もできる。

研究中:オイラーの公式の拡張(ハミルトンの4元数)

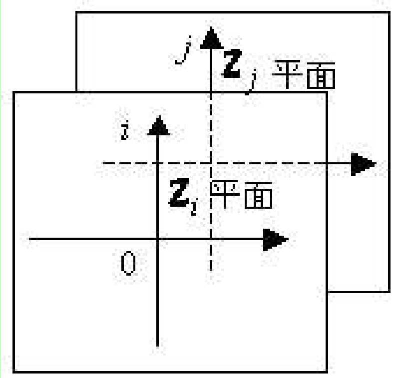
ハミルトンは複素数の次元を増やし、その集合での演算を定義し、4元数間の関数を考えた。

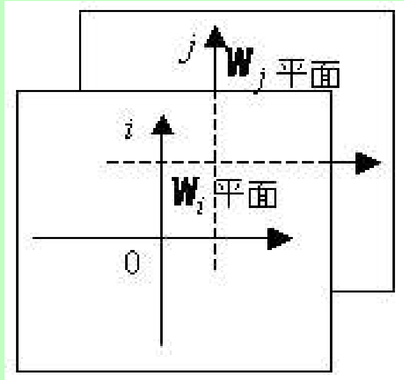


$ij = k$ を回転群で考えると、i による回転群(縦回転)と j による回転群(横回転)の合成が、k による回転群と解釈できる。単純な回転群ではないようである。

研究中:オイラーの公式の拡張(2つの複素平面)

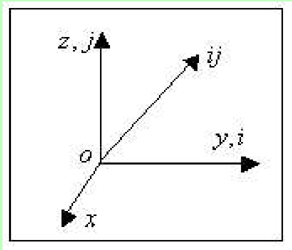
２つの複素平面（i平面・j平面）から２つの複素平面への関数

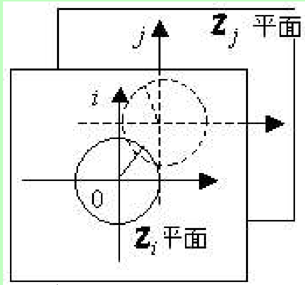




F

関数の表現方法を定義





$\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j$ 平面の点を $Z_i = \alpha_i + \beta_i i, Z_j = \alpha_j + \beta_j j \left(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j \in R\right)$ とする。Z_i, Z_j による演算が定義できる。特に $Z_i Z_j = Z_j Z_i$ より $ij = ji$ が成り立つ。$(ij)^2 = i^2 j^2 = 1$ も成り立つ。

$Z = a + bi + cj + dij\left(a, b, c, d \in R\right)$ による演算を定義:

$a \neq -d, b \neq c$ または $a \neq d, b \neq -c$ ならば、四則演算・交換法則・結合法則・分配法則すべてが成り立つ。

注: $a = -d, b = c$ または $a = d, b = -c$ ならば、零元(0と同じ性質)

研究中:オイラーの公式の拡張(極座標表示)

Z が零元でなく、かつ $ad = bc$ ならば、

絶対値 $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$$Z = |Z|(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)(\cos\theta_j + j\sin\theta_j)$$
$$= |Z| e^{i\theta_i + j\theta_j}$$

Z が零元でなければ、

絶対値 $|Z| = \sqrt[4]{\left((a-d)^2 + (b+c)^2\right)\left((a+d)^2 + (b-c)^2\right)}$

$$Z = |Z|(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)(\cos\theta_j + j\sin\theta_j)(\cosh\theta_{ij} + ij\sinh\theta_{ij})$$
$$= |Z| e^{i\theta_i + j\theta_j + ij\theta_{ij}}$$

研究中:オイラーの公式の拡張(3次元空間との関係)

Z が零元でなく、$ad=bc$ ならば、

$$Z=a+bi+cj+dij=|Z|(\cos\theta_i+i\sin\theta_i)(\cos\theta_j+j\sin\theta_j)=|Z|e^{i\theta_i+j\theta_j}$$

$d=\dfrac{bc}{a}$ なので、変数は３個（３次元）

$$\cos\theta_i=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

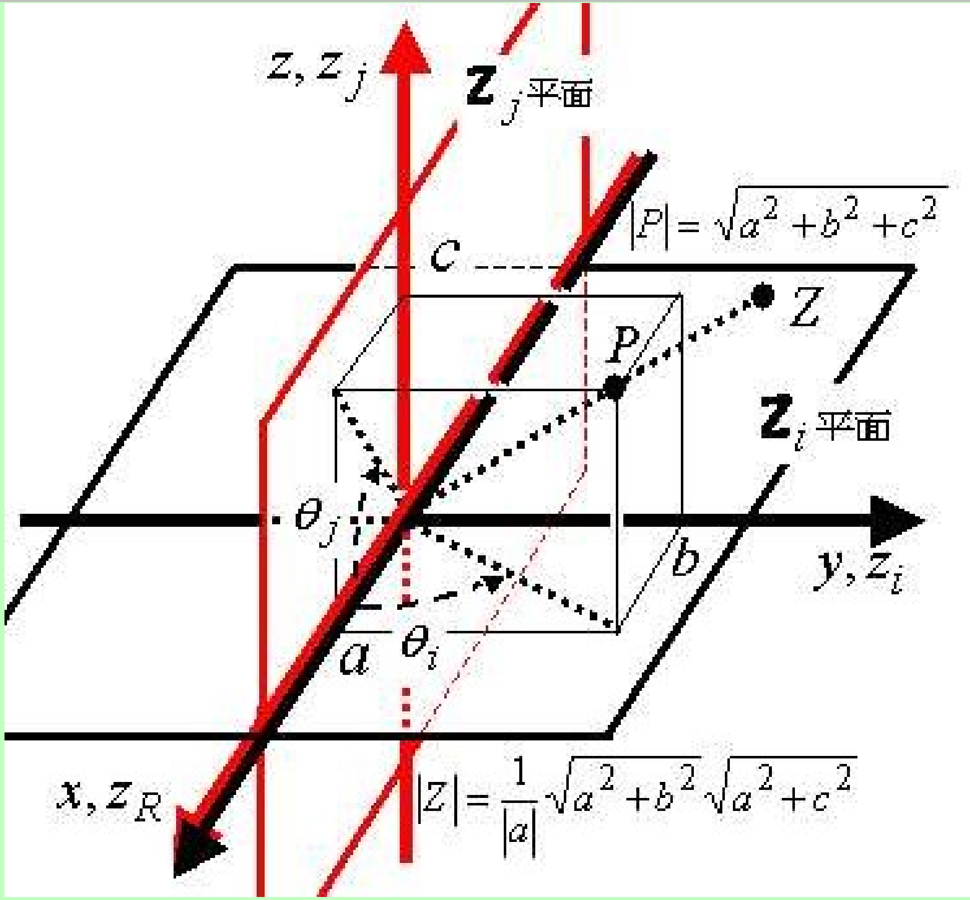
$$\sin\theta_i=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\theta_j=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\sin\theta_j=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

注：$P=(a,b,c),|P|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$|Z|\neq|P|$



研究中:オイラーの公式の拡張、Cauchy-Riemannの関係式の拡張

$W=F(Z)$、$Z=z_R+iz_i+jz_j+ijz_{ij}$、$W=w_R+iw_i+jw_j+ijw_{ij}$

$w_R=f_R(z_R,z_i,z_j,z_{ij}),\ w_i=f_i(z_R,z_i,z_j,z_{ij}),$

$w_j=f_j(z_R,z_i,z_j,z_{ij}),\ w_{ij}=f_{ij}(z_R,z_i,z_j,z_{ij})$

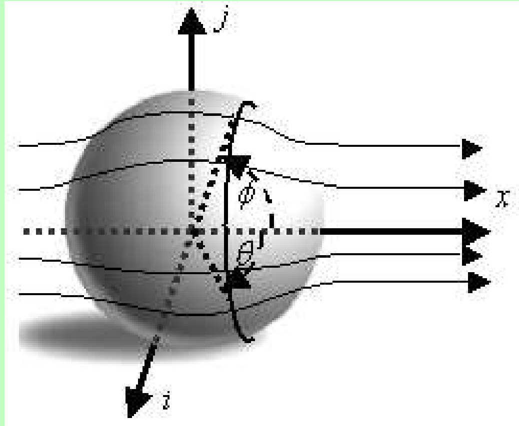
$$\begin{cases}
f_R{}'=\dfrac{\partial f_R}{\partial z_R}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_{ij}}\\[2ex]
f_i{}'=-\dfrac{\partial f_R}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_i}{\partial z_R}=-\dfrac{\partial f_j}{\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_j}\\[2ex]
f_j{}'=-\dfrac{\partial f_R}{\partial z_j}=-\dfrac{\partial f_i}{\partial z_{ij}}=\dfrac{\partial f_j}{\partial z_R}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_i}\\[2ex]
f_{ij}{}'=\dfrac{\partial f_R}{\partial z_{ij}}=-\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}=-\dfrac{\partial f_j}{\partial z_i}=\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial z_R}
\end{cases}$$

が成り立つ。Cauchy-Riemann の関係式の拡張になる。

$$\frac{\partial(f_R,f_i,f_j,f_{ij})}{\partial(z_R,z_i,z_j,z_{ij})}=|F'(Z)|^4$$

研究中:オイラーの公式の拡張、応用例

空間上に障害物の球体があった場合の方程式を作る。



$$\Omega(Z) = V_0\left(Z + \frac{a^3}{Z}\right)$$

$$\Omega'(Z) = V_0\left(1 - \frac{a^3}{Z^2}\right)$$

$$= V_0\left(1 - \frac{a^3}{r^2}e^{-2i\theta - 2j\phi}\right)$$

$$= V_0\left(1 - \frac{a^3}{r^2}(\cos 2\theta \cos 2\phi - i \sin 2\theta \cos 2\phi - j \cos 2\theta \sin 2\phi + ij \sin 2\theta \sin 2\phi)\right)$$

$$|\Omega'(Z)| = V_0\sqrt{1 - \frac{2a^3}{r^2}\cos 2\theta \cos 2\phi + \frac{a^6}{r^4}}$$

図でもわかるように、$\theta = \phi$ なので、

$$|\Omega'(Z)| = V_0\sqrt{1 - \frac{2a^3}{r^2}\cos^2 2\theta + \frac{a^6}{r^4}}$$

注：物理は専門外なので、正しいかどうかは不明

追記（雑談）

2･3･5･7で数を合成する（合成数）

$5^2 \times 3 - 2^3 \times 7 = 19$

2･3･5･7の組合せで掛算による数を
2つ作り、途中にマイナスを入れる。
120以下であれば、必ず「素数」である。

⇒　合成数の計算式は必ず掛算？
　素数を合成する式があるかもしれ
　ない