オイラーの無限解析

オイラーの著書「無限解析序説１」における自然対数 e、及びオイラーの公式の導入、円周率と素数の関係の説明。

前提条件

オイラーの考え方を説明する。数学の記号は、一部現代の表記方法を使用する。

例

名称	原書	現代表記
組合せの記号	なし	${}_nC_r$
複素数	$\sqrt{-\mathrm{I}}$ 注：i は自然数の変数	i
十分に大きな自然数	言葉で説明	N
階乗	$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$	$5!$
数列	$a,b,c,d,e\cdots$ $P,Q,R,S,\cdots$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$	$\{a_m\}(m=1,2,3,\cdots)$ $\{P_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ $\{\alpha_k\}(k=1,2,3,\cdots)$
数列の加算	$a+b+c+\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} a_i$

追記、この時代ではまだ負の数が十分に認知されていなかったので、変数はすべて正の数である。

自然対数 e

$a^0=1$

ω を十分に小さい正の数とする。a^ω は 1 より少し大きい数となる。

$a^\omega=1+k\omega$ を満たす k が存在する。N を十分に大きな自然数とする。

$$
\begin{aligned}
a^{\omega N} &= (1+k\omega)^N \\
&= 1+{}_NC_1k\omega+{}_NC_2k^2\omega^2+{}_NC_3k^3\omega^3+\cdots \\
&= 1+\frac{N}{1}k\omega+\frac{N(N-1)}{2!}k^2\omega^2+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}k^3\omega^3+\cdots
\end{aligned}
$$

$\omega N=x$ とおく。$\omega=\dfrac{x}{N}$、x は正の実数となる。

$$
\begin{aligned}
a^x &= \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N \\
&= 1+\frac{1}{1}kx+\frac{1\cdot(N-1)}{2!N}k^2x^2+\frac{1\cdot(N-1)(N-2)}{3!N^2}k^3x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

N が十分に大きな自然数なので、$\dfrac{N-1}{N}=1,\dfrac{N-1}{2N}=\dfrac{1}{2},\dfrac{N-2}{3N}=\dfrac{1}{3},\cdots$ となる。　注：この証明はない。

これを代入すると、

$$a^x=1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^3x^3}{3!}+\frac{k^4x^4}{4!}+\cdots$$

となる。$x=1,k=1$ とすると、

$$a=\left(1+\frac{1}{N}\right)^N、\quad a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.71828\cdots$$

ここで、a を e と表記する。注：$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ という性質は記載されていない。

三角関数の級数表示

$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ より、

$(\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = 1$

そして、一般的に n を自然数として、

$(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx$ となる。

$$\cos nx = \frac{(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n}{2}$$

$$\sin nx = \frac{(\cos x + i\sin x)^n - (\cos x - i\sin x)^n}{2i}$$

それぞれを展開すると、

$$\cos nx = (\cos x)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos x)^{n-4}(\sin x)^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}(\cos x)^{n-6}(\sin x)^6 + \cdots$$

$$\sin nx = \frac{n}{1}(\cos x)^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\cos x)^{n-3}(\sin x)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{5!}(\cos x)^{n-5}(\sin x)^5 -$$

円の半周は 180°である。ここで、円の半周を弧長 π とする。

十分に小さい正の実数 x に対して、$\sin x = x, \cos x = 1$ とできる。注：$\sin x = x, \cos x = 1$ の証明は記載されていない。

N を十分に大きな自然数とする。$x = \dfrac{v}{N}$ とおく。v は実数となる。$\sin x = \dfrac{v}{N}, \cos x = 1$

$$\cos Nx = 1 - \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{v}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}\left(\frac{v}{N}\right)^4 - \cdots$$

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots$$

同様に、

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots$$

オイラーの公式の導入

$$\cos Nx = \frac{(\cos x + i\sin x)^N + (\cos x - i\sin x)^N}{2}$$

$$\cos v = \frac{\left(\cos\frac{v}{N} + i\sin\frac{v}{N}\right)^N + \left(\cos\frac{v}{N} - i\sin\frac{v}{N}\right)^N}{2}$$

$\dfrac{v}{N}$ は十分に小さい数なので、$\cos\dfrac{v}{N} = 1, \sin\dfrac{v}{N} = \dfrac{v}{N}$ とおける。したがって、

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{iv}{N}\right)^N}{2}$$

となる。同様に、

$$\sin v=\frac{\left(1+\frac{iv}{N}\right)^N-\left(1-\frac{iv}{N}\right)^N}{2i}$$

ところで、$e^x=\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$ なので、x の代わりに iv と表記し、

$$\cos v=\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2},\sin v=\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}$$

となる。したがって、$e^{iv}=\cos v+i\sin v$ となる。　　注：$e^{i\pi}+1=0$ の説明はない

整関数の因子

$\{a_n\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ を実数の無限数列とする。$f(x)$ を無限次の多項式とする。

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$

$f(x)$ の因数（因数分解）を考える。$px-q$ の因数を持つならば、$f\left(\frac{q}{p}\right)=0$ となる。

上記は実数解の場合だが、虚数解の場合について考える。

$\alpha+i\beta$ が解であれば $\alpha-i\beta$ も解なので、px^2-qx+r の因数を持つと仮定する。px^2-qx+r が虚数解を持つのであれば、

$q^2-4pr<0$

$q^2<4pr$

$0<\frac{q}{2\sqrt{pr}}<1$

$\frac{q}{2\sqrt{pr}}=\cos\varphi$、を満たす φ が存在する。$q=2\sqrt{pr}\cos\varphi$

$px^2-qx+r=px^2-2\sqrt{pr}x\cos\varphi+r$

ここで、式中の $\sqrt{\ }$ 表示をさけるため、p を p^2 と、r を q^2 と書き直す。

$p^2x^2-2pqx\cos\varphi+q^2$

$p^2x^2-2pqx\cos\varphi+q^2=0$ とすると、

$$x=\frac{pq\cos\varphi\pm\sqrt{p^2q^2\cos^2\varphi-p^2q^2}}{p^2}$$

$$=\frac{q\cos\varphi\pm q\sqrt{\cos^2\varphi-1}}{p}$$

$$=\frac{q}{p}(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$$

$px=q(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$

したがって、$f(x)$ は $px-q(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ と $px-q(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ の因数を持つ。

一般的に $(\cos x\pm i\sin x)^n=\cos nx\pm i\sin nx$ となるので、

$x=\frac{q}{p}(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$、$x^2=\frac{q^2}{p^2}(\cos 2\varphi\pm i\sin 2\varphi)$ $x^3=\frac{q^3}{p^3}(\cos 3\varphi\pm i\sin 3\varphi)$、・・・

$f(x)=x^n+a^n$ の因数

$f\left(x\right)=x^n+a^n$ の虚数解による因数を考える。$\dfrac{q}{p}=r$ とおくと、

$r^n\cos n\varphi+a^n=0$、$r^n\sin n\varphi=0$ という 2 つの方程式ができる。

$\sin n\varphi=0$ となるのは、k を整数とした場合に $n\varphi=2k\pi$ 又は $n\varphi=\left(2k+1\right)\pi$ のときである。

ところで $n\varphi=2k\pi$ とすると $\cos 2k\varphi=1$、$a>0, r>0$ なので矛盾がでる。したがって、$n\varphi=\left(2k+1\right)\pi$ としなければならない。

したがって、虚数による因数の式は

$x^2-2ax\cos\dfrac{2k+1}{n}\pi+a^2=0$ の解である。

$f\left(x\right)=x^n-a^n$ の場合の因数は、$x^2-2ax\cos\dfrac{2k}{n}\pi+a^2=0$ となる。

---

e^n の因数

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$$

$$e^x-1=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\left(1+\frac{x}{N}\right)^N-1$$

$\left(1+\dfrac{x}{N}\right)^N-1$ は $f\left(x\right)=x^n-a^n$ と同じ形式なので、

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k}{N}\pi+1$$

$k=0$ とすると、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k}{N}\pi+1&=\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)+1\\&=\left(1+\frac{x}{N}-1\right)^2\\&=\frac{x^2}{N^2}\end{aligned}$$

したがって、$\dfrac{x^2}{N^2}$ の因数を持つ。

$\dfrac{x}{N}$ が微小であることから、

$\cos v=1-\dfrac{v^2}{2}+\dfrac{v^4}{4!}-\dfrac{v^6}{6!}+\cdots$ において、

$1-\dfrac{v^2}{2}$ の右側の項、$\dfrac{v^4}{4!}-\dfrac{v^6}{6!}+\cdots$ は無視できる。

$\cos\dfrac{2k}{N}\pi=1-\dfrac{2k^2\pi^2}{N^2}$ とできる。

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k}{N}\pi+1&=\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\left(1-\frac{2k^2\pi^2}{N^2}\right)+1\\&=1+\frac{2x}{N}+\frac{x^2}{N^2}-2+\frac{4k^2\pi^2}{N^2}-\frac{2x}{N}+\frac{4k^2\pi^2x}{N^3}+1\\&=\frac{x^2}{N^2}+\frac{4k^2\pi^2}{N^2}+\frac{4k^2\pi^2x}{N^3}\end{aligned}$$

$$=\frac{4k^2\pi^2}{N^2}\left(\frac{x^2}{4k^2\pi^2}+\frac{x}{N}+1\right)$$

したがって、$\frac{x^2}{4k^2\pi^2}+\frac{x}{N}+1\left(k=1,2,3,\cdots\right)$という無限個の因数を持つので、$e^x-1$は、

$$\left(\frac{x^2}{4\pi^2}+\frac{x}{N}+1\right)\left(\frac{x^2}{16\pi^2}+\frac{x}{N}+1\right)\left(\frac{x^2}{36\pi^2}+\frac{x}{N}+1\right)\cdots$$

という因数を持つ。

三角関数の因数

$$e^x-e^{-x}=\left(1+\frac{x}{N}\right)^N-\left(1-\frac{x}{N}\right)^N=2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$f\left(x\right)=x^n-a^n$の場合の虚数による因数の式はが、$x^2-2ax\cos\frac{2k}{n}\pi+a^2$となることから、

e^x-e^{-x}の因数の式は、$\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\left(1-\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k}{N}\pi+\left(1-\frac{x}{N}\right)^2=0$となる。

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\left(1-\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k}{N}\pi+\left(1-\frac{x}{N}\right)^2=0$$

$\cos\frac{2k}{N}\pi=1-\frac{2k^2\pi^2}{N^2}$となるので

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{N}\right)\left(1-\frac{x}{N}\right)\cos\frac{2k}{N}\pi+\left(1-\frac{x}{N}\right)^2&=2+\left(\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1-\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\left(1-\frac{2k^2\pi^2}{N^2}\right)\\&=2+\left(\frac{x}{N}\right)^2-2\left(1-\left(\frac{x}{N}\right)^2-\frac{2k^2\pi^2}{N^2}+\frac{2k^2\pi^2x^2}{N^4}\right)\\&=\frac{4x^2}{N^2}+\frac{4k^2\pi^2}{N^2}-\frac{4k^2\pi^2x^2}{N^4}\\&=\frac{4k^2\pi^2}{N^2}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}+1-\frac{x^2}{N^2}\right)\end{aligned}$$

Nが十分に大きいので$\frac{x^2}{N^2}=0$とできる。e^x-e^{-x}は、$1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}$で割り切れる。

第1因子がxとなるので、

$$\begin{aligned}\frac{e^x-e^{-x}}{2}&=x\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)\\&=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\frac{e^x+e^{-x}}{2}&=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\\&=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

$x=iv$とおくと、

$$\cos v=\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}$$

$$=\left(1-\frac{4v^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4v^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4v^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4v^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

$$\sin v=\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}$$

$$=v\left(1-\frac{v^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

整関数、積による表示

$\{A_n\}\{\alpha_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ を有限又は無限数列とする。

$$1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots=(1+\alpha_1x)(1+\alpha_2x)(1+\alpha_3x)\cdots$$

とする。

$$A_1=\sum_i\alpha_i$$

$$A_2=\sum_{i,j(i\neq j)}\alpha_i\alpha_j$$

$$A_3=\sum_{\substack{i,j,k\\(i\neq j,j\neq k,k\neq i)}}\alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

・・・・・・・

$$P_1=\sum_i\alpha_i$$

$$P_2=\sum_i\alpha_i^2$$

$$P_3=\sum_i\alpha_i^3$$

・・・・・・・・

とする。

$$P_1=A_1$$

$$P_2=A_1P_1-2A_2$$

$$P_3=A_1P_2-A_2P_1+3A_3$$

・・・・・・・

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)$$

$$=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$ より、

$$1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

$s=\dfrac{x^2}{\pi^2}$ とおくと、

$$1+\frac{\pi^2s}{3!}+\frac{\pi^4s^2}{5!}+\frac{\pi^6s^3}{7!}+\cdots=(1+s)\left(1+\frac{s}{4}\right)\left(1+\frac{s}{9}\right)\left(1+\frac{s}{16s}\right)\cdots$$

$$A_1=\frac{\pi^2}{6},A_2=\frac{\pi^4}{120},A_3=\frac{\pi^6}{5040},\cdots$$

$$P_1=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$P_2 = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots = \frac{2^2}{5!} \cdot \frac{1}{3} \pi^4$$

$$P_3 = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \cdots = \frac{2^4}{7!} \cdot \frac{1}{3} \pi^6$$

・・・・・・

このことから、n を自然数として、$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$ という一般的な級数が想定できる。

円周率と素数の関係

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

この式では、2 のべき乗のみが現れる。

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \cdots$$

この式では、2 のべき乗、3 のべき乗、及びその積のみが現れる。

したがって、左辺にすべての素数を使うと、右辺にはすべての自然数が現れる。

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{17}\right)\cdots}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots$$

さらに、素数のべき乗の場合も同様な式になる。

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right)\left(1 - \frac{1}{13^n}\right)\left(1 - \frac{1}{17^n}\right)\cdots}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots$$

これを応用すると、

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^n}\right)\left(1 - \frac{1}{13^2}\right)\left(1 - \frac{1}{17^2}\right)\cdots}$$

$$= \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \cdot \frac{13^2}{13^2 - 1} \cdot \frac{17^2}{17^2 - 1} \cdots$$

のように、円周率が、すべての素数による演算の積で表現できる。